Matemática

4

SEGUNDO CICLO
SECUNDARIA

Guía de recursos didácticos

PROYECTO
SABER
HACER

SANTILLANA

La Guía de recursos didácticos **Matemática 4**, del Proyecto **Saber Hacer**,
del Segundo Ciclo de la Educación Secundaria,
es una obra colectiva creada, concebida y diseñada por el equipo de investigaciones
pedagógicas de Editorial Santillana, S. A., en la República Dominicana,
bajo la dirección editorial de **CLAUDIA LLIBRE**.

Su creación y desarrollo ha estado a cargo del siguiente equipo:

Texto: **Altagracia Santos**

Ilustración: Ruddy Núñez, José Amado Polanco, Tulio Matos y Guillermo Pérez.
Ilustración de portada: José Amado Polanco y Wilson Soto.

Fotografía: www.istockphoto.com y Archivo Santillana

Equipo técnico:
• Corrección de estilo: Andrés Blanco Díaz y *Mirtha González Gutiérrez*
• Diseño gráfico: *Josie Antigua*
• Separación de color: José Morales Peralta y César Matías Peguero

Director de Arte y Producción: ***Moisés Kelly Santana***
Subdirectora de Arte: Lilian Salcedo Fernández

Editor: ***Andrés Molina Moloon***

Primera edición 2018

Editado por Santillana, S. A.
Calle Juan Sánchez Ramírez No. 9, Gascue.
Apartado Postal: 11-253 • Santo Domingo, República Dominicana.
Tels. (809) 682-1382 / 689-7749. Fax: (809) 689-1022
Web site: www.santillana.com.do

Registro Industrial: 58-347
ISBN: 978-9945-19-705-1

Impreso por Serigraf, S. A.
Impreso en la República Dominicana
Printed in the Dominican Republic

La presente edición se ha realizado de acuerdo
con las últimas normas ortográficas aprobadas
por la Real Academia Española (RAE).

Matemática

4

SEGUNDO CICLO
SECUNDARIA

Guía de recursos didácticos

PROYECTO
SABER
HACER

SANTILLANA

Índice

Una educación basada en competencias

El diseño y la puesta en marcha de un currículo suponen considerar el tipo de ciudadano que queremos como país y el tipo de sociedad en la que estamos inmersos: una sociedad en continuo proceso de transformación que afecta el modo como nos organizamos, trabajamos, nos relacionamos y aprendemos dentro y fuera de la escuela.

Hoy, nuestra realidad exige que hombres y mujeres participen de manera activa en la identificación de los problemas y sus causas, y en la proposición y ejecución de soluciones viables; asimismo, que sean capaces de desempeñarse responsablemente con ellos mismos, con la naturaleza y con su comunidad, para que juntos construyan una sociedad más libre, más democrática y más justa. Todo esto no sería posible sin individuos capaces de adquirir y emplear conocimientos, habilidades, actitudes y valores a lo largo de su vida.

El cambio permanente de nuestra sociedad también se refleja en la escuela, como institución encargada de formar a los nuevos ciudadanos. ¿En qué aspectos afectan estos cambios a la escuela? ¿Cuál es el modelo pedagógico que demandan?

Ante estas preguntas, los expertos en educación han concluido que la escuela debe poner énfasis en el desarrollo de las competencias.

¿Qué es una competencia?

Una competencia es la habilidad de las personas para actuar apropiadamente ante situaciones específicas y en un momento determinado. Múltiples son las definiciones de competencias y sus aplicaciones al aprendizaje. En el marco del nuevo diseño curricular y en nuestro proyecto **SABER HACER**, una competencia es la capacidad de poner en práctica —de una forma integrada, en contextos y situaciones diferentes— los conocimientos, las habilidades y las actitudes personales adquiridas. Dicho de otra manera, una competencia es la capacidad de los sujetos para utilizar el saber para aprender, actuar y relacionarse con los demás en contextos diversos.

Enfoque tradicional

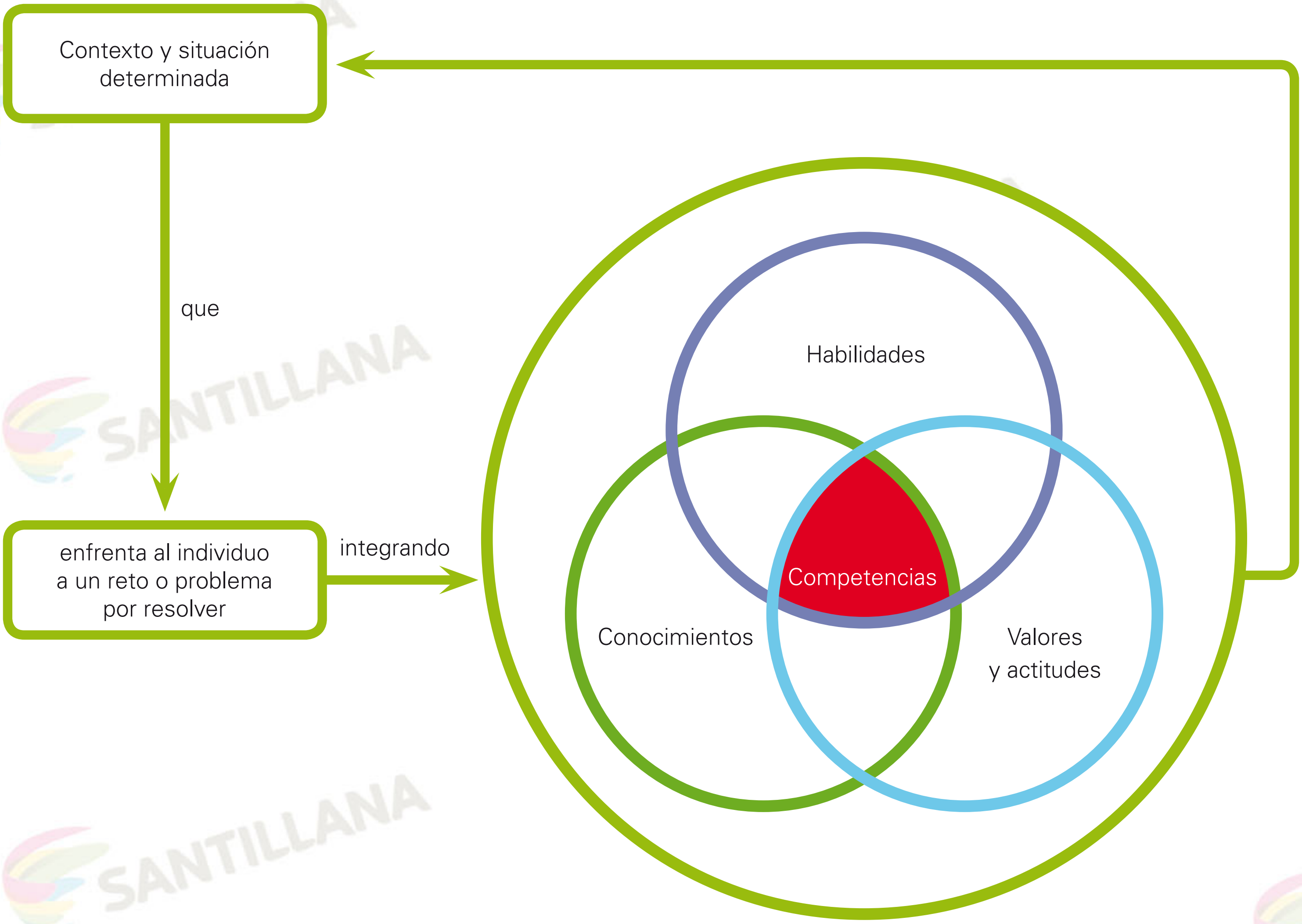
Por lo tanto, hay un desarrollo desvinculado:

Enfoque por competencias

La competencia vincula, integra y pone en marcha los tres componentes

Las competencias, entonces, movilizan y dirigen los saberes hacia la consecución de propósitos concretos, lo cual se evidencia cuando los conocimientos adquiridos y las habilidades desarrolladas se aplican a las tareas y retos cotidianos en entornos escolares y extraescolares.

Una forma de ejemplificar lo anterior es la siguiente:



Competencias fundamentales

Las competencias fundamentales son las competencias que todo individuo debe desarrollar a lo largo de su escolaridad, para poder desempeñarse eficazmente y en igualdad de condiciones en todas las oportunidades de realización personal y de ejercicio ciudadano. A continuación, presentamos las competencias fundamentales definidas en el currículo dominicano con los logotipos que las identifican en los materiales del proyecto **SABER HACER**.

- Competencia ética y ciudadana.
- Competencia comunicativa.
- Pensamiento lógico, creativo y crítico.
- Resolución de problemas.
- Competencia científica y tecnológica.
- Competencia ambiental y de la salud.
- Desarrollo personal y espiritual.

El proyecto SABER HACER en el nuevo diseño curricular

En el nuevo diseño curricular dominicano, las competencias fundamentales expresan las intenciones pedagógicas de mayor relevancia. Son competencias transversales que conectan de forma significativa todo el currículo.

Competencias fundamentales en el Nivel Secundario

Nivel de dominio III

Competencia ética y ciudadana

- Se reconoce como persona perteneciente a una cultura, un proyecto de nación y a una cultura humana planetaria.
- Evalúa las prácticas sociales e institucionales en el devenir histórico y en el presente.
- Contribuye a la creación de relaciones justas y democráticas para la convivencia.
- Actúa con autonomía, responsabilidad y asertividad en referencia a sus deberes y derechos.

Competencia comunicativa

- Reconoce los elementos y características de la situación de comunicación.
- Identifica los diversos modos de organización textual oral y escrita.
- Utiliza diversos códigos de comunicación.
- Autorregula su proceso de comunicación.
- Utiliza las tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) de forma efectiva.

Pensamiento lógico, creativo y crítico

- Elabora y argumenta sus juicios y opiniones.
- Aborda las situaciones y necesidades de forma creativa.
- Examina la validez de las ideas propias y ajenas.

Resolución de problemas

- Identifica y analiza el problema.
- Investiga y busca información.
- Identifica y utiliza estrategias, y genera alternativas de solución.
- Evalúa los resultados obtenidos.

Competencia científica y tecnológica

- Ofrece explicaciones científicas de fenómenos naturales y sociales.
- Aplica y comunica ideas y conceptos del conocimiento científico.

Competencia ambiental y de la salud

- Valora y cuida su cuerpo.
- Practica hábitos de vida saludable.
- Se compromete con la sostenibilidad ambiental.

Desarrollo personal y espiritual

- Desarrolla una autoimagen equilibrada y una sana autoestima.
- Establece relaciones constructivas y colaborativas.
- Descubre su ser en relación con la trascendencia.
- Proyecta su futuro y misión en la vida, con autonomía, realismo y optimismo.

Competencias específicas correspondientes a las distintas áreas del conocimiento que contribuyen al desarrollo de las competencias fundamentales.

Valores integrados al desarrollo de las competencias fundamentales

Ciencia y tecnología · Identidad · Trabajo · Salud · Creatividad · Convivencia · Educación vial · Equidad de género · Conservación del medio ambiente

Formación Humana Integral y Religiosa

- Valoración de la vida y la dignidad humana en apertura a la trascendencia.
- Convivencia fraterna y apertura a la trascendencia.

Ciencias de la Naturaleza

- Enunciado o exposición de explicaciones científicas a problemas y fenómenos naturales.
- Aplicación de procedimientos científicos y tecnológicos para solucionar problemas o dar respuestas a fenómenos naturales.
- Actitudes críticas y preventivas ante fenómenos naturales, problemas y situaciones científicas y tecnológicas.

Lengua Española

- Comprensión oral (CO).
- Producción oral (PO).
- Comprensión escrita (CE).
- Producción escrita (PE).

Indicadores de logro

Parámetros que miden el nivel de dominio de las competencias específicas de cada área y de las competencias fundamentales.

Educación Artística

- Expresión artística.
- Apreciación estética.

Educación Física

- Expresión y comunicación motriz.
- Dominio motriz.
- Aptitud física y deportiva.

Matemática

- Razonamiento y argumentación.
- Empleo de algoritmos.
- Comunicación.
- Resolución de problemas.
- Modelación y representación.
- Utilización de herramientas tecnológicas.
- Conexiones.

Ciencias Sociales

- Pensamiento crítico social.
- Manejo de la información y su aplicación científica.
- Convivencia democrática, identidad y diversidad cultural.

Interdisciplinaridad

Integración o articulación de conceptos, procedimientos, actitudes y valores de distintas disciplinas.

PROYECTO SABER HACER

¿Por qué SABER HACER?

Todos tenemos una **pasión**. Desde su fundación, hace más de 50 años, Santillana no ha dejado de trabajar, investigar, crear productos y servicios y buscar innovaciones que **mejoren la educación**, como forma de construir un mundo mejor para todos.

El fruto de este compromiso ha sido una larga historia de **importantes proyectos educativos**. Proyectos concebidos desde la realidad social y académica existente en cada momento, nacidos con vocación de acompañar a los estudiantes en su aventura de aprender, así como de dotar a los profesores de todas las herramientas y recursos necesarios para llevar a cabo la tarea de educar. Así, nuestro nuevo proyecto, **SABER HACER**, surge como respuesta a un nuevo diseño curricular y a los intensos cambios que se están produciendo en todos los aspectos de nuestra vida.

Hoy, más que nunca, en la sociedad de la información, en un mundo cada vez más global, regido por un cambio rápido y constante, **la educación marca la diferencia**. Vivimos un presente de grandes interrogantes que merecen grandes respuestas. **Hay que educar hoy a los ciudadanos para un mañana que se está por construir**.

La educación se ha centrado tradicionalmente en la enseñanza de contenidos, se trataba de saber. Hoy, la comunidad educativa es consciente de que hay que dar un paso adelante: **además de saber, hay que SABER HACER**. El **aprendizaje por competencias** es el modelo elegido para alcanzar con éxito los nuevos objetivos que la sociedad reconoce como necesarios en la educación de niños y adolescentes. Saber comunicar, interpretar, deducir, formular, valorar, seleccionar, elegir, decidir, comprometerse, asumir, etc., es hoy tan importante como conocer los contenidos tradicionales de nuestras materias. Necesitamos trabajar con ideas, ser capaces de resolver problemas y tomar decisiones en contextos cambiantes. Necesitamos ser flexibles, versátiles, creativos...

Las claves del proyecto SABER HACER

El objetivo: que los estudiantes adquieran las competencias que necesita un ciudadano del siglo XXI

Todos somos conscientes de que la sociedad actual requiere unas capacidades muy diferentes de las que se demandaban hasta hace poco tiempo. Hoy necesitamos personas capaces de:

- Hacerse preguntas pertinentes.
- Informarse a través de fuentes diversas, textuales o gráficas, lo que implica:
  — Buscar información.
  — Interpretar esa información de forma coherente con el tipo de fuente.
- Pensar reflexiva, crítica y creativamente.
- Crearse una opinión, un juicio y tomar decisiones adecuadas.
- Comunicarse oralmente y por escrito.
- Hacer conexiones: conectar lo aprendido con la vida real (próxima o lejana) y conectar los saberes de las distintas materias entre sí.
- Participar y comprometerse, dar servicio a la comunidad.
- Trabajar cooperativamente con otros.
- Tener siempre presente la perspectiva ética, tener inteligencia emocional y ética.
- Aprender a lo largo de la vida.

Este objetivo se materializa en la estructura de las unidades didácticas del material del estudiante y en los distintos proyectos que conforman la Biblioteca del Profesorado.

Una potente oferta digital

- **Plataforma digital Santillana Compartir**, un entorno de contenidos educativos y de gestión del aprendizaje y la labor docente y administrativa. Contiene gran diversidad de recursos digitales e interactivos organizados de acuerdo con el currículo dominicano y que sirven de apoyo al proceso de enseñanza y aprendizaje, enriqueciendo dicho proceso y la labor docente. La plataforma incluye la integración y acceso al módulo de evaluación **Pleno**.
- **Libromedia**, el libro en papel enriquecido con recursos digitales y potentes herramientas.
- **Libroflip**, libros en versión digital de las áreas complementarias y otras.
- **Recursos digitales** diversos que complementan todos nuestros proyectos.
- Libromedia y libroflip colocados en otras plataformas digitales.

Componentes del proyecto SABER HACER Secundaria, de 4.º a 6.º

Materiales para el o la estudiante:

Libro del estudiante
de 4.^{er} a 6.^{er} grado
de la secundaria.

Presenta secuencias didácticas orientadas al logro de las competencias del área y las fundamentales.

Cuaderno de actividades
de 4.° a 6.° de la secundaria.

Actividades de los temas de cada unidad organizadas en fichas correspondientes a cada tema del libro.

Libromedia y Libroflip del estudiante de 4.° a 6.° grado: Estas aplicaciones o versiones digitales del libro se encuentran alojadas en la plataforma digital del Proyecto **Santillana Compartir** y en otras plataformas digitales. Estos materiales integran las TIC al proceso de enseñanza-aprendizaje. Además, a través del Libromedia se integran recursos digitales que enriquecen y refuerzan dicho proceso:

- Animaciones
- Actividades interactivas
- Audios
- Videos
- Presentaciones
- Galería de imágenes

Materiales para el o la docente:

Guía didáctica de 4.to a 6.to grado. Constituye el documento que articula la propuesta técnico-pedagógica y ofrece lo siguiente:

- Descripción del proyecto **SABER HACER** Secundaria.
- Fundamentos curriculares.
- Presentación de los materiales del estudiante y del docente.
- Secuencia de contenidos.
- Programación por unidad.
- Guiones didácticos con sugerencias metodológicas, incluyendo la integración de los recursos digitales a la programación y secuencia didáctica de cada contenido.

Libromedia del docente: alojado en la plataforma digital **Santillana Compartir** de 4.° a 6.° grado. Versiones digitales de las Guías de recursos didácticos que integran las TIC en el proceso de enseñanza-aprendizaje. Contiene todos los recursos digitales del Libromedia del estudiante. Este material se descarga a través de nuestra plataforma digital (LMS) e-stela.

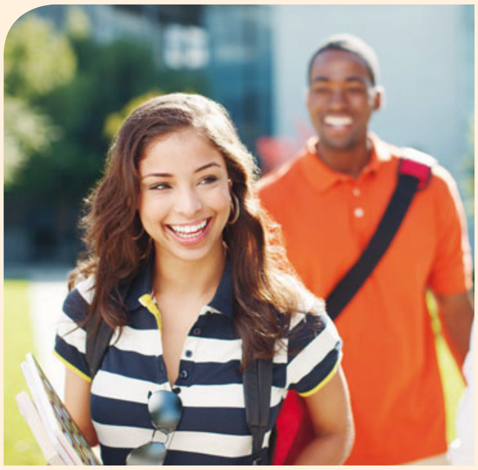
e-stela es nuestra plataforma digital de alojamiento y gestión de contenidos dentro del Proyecto **Santillana Compartir**.

CD del docente Santillana Plan regular: **CD** con recursos digitales organizados en carpetas. Dentro de los recursos tenemos: actividades interactivas, animaciones, documentos con textos de ampliación de temas y fichas de actividades.

Más una carpeta de **Biblioteca del docente**, con otros recursos que enriquecen el desempeño de la labor docente, tales como documentos para la planificación, entre otros.

Competencias e indicadores de logro de Matemática para el cuarto curso del Nivel Secundario

Competencias específicas	Indicadores de logro
Razona y argumenta: • **Identifica** elementos básicos de la geometría en lugares de la comunidad, basados en las nociones esenciales de la misma. • **Propone** y **justifica** los procedimientos que se deben aplicar para interpretar y resolver situaciones del entorno que involucren ángulos. • **Prueba** propiedades y teoremas sobre la congruencia de triángulos. • **Justifica** los pasos dados en las demostraciones relacionadas con circunferencias. • **Clasifica** las transformaciones geométricas de acuerdo a sus propiedades fundamentales. • **Establece** relación y diferencia entre los distintos elementos de una esfera. • **Descubre** relaciones en las demostraciones de teoremas sobre áreas y volúmenes de cuerpos truncados. 	• **Relaciona** los elementos básicos de la geometría con situaciones de la vida cotidiana, como saber la ubicación del lugar en que vive con relación a sus amigos, la escuela, el centro deportivo y otros. • **Identifica** en el entorno situaciones en las que se forman ángulos. • **Identifica** ángulos adyacentes, opuestos por el vértice, complementarios, suplementarios y conjugados. • **Clasifica** los triángulos atendiendo a sus lados y a sus ángulos. • **Demuestra** cualquiera de los teoremas relacionados con la congruencia de triángulos. • **Identifica** las diferentes líneas que se trazan en una circunferencia. • **Identifica** cualquiera de las posiciones relativas de dos circunferencias en el plano. • **Identifica** los ángulos inscrito, interior, exterior y central de la circunferencia. • **Demuestra** cualquiera de los teoremas relacionados con las diferentes posiciones de la tangente a una o más circunferencias. • **Identifica** semejanzas de figuras dadas.
Comunica: • **Lee** e **interpreta** gráficos y figuras geométricas planas en las que intervienen el punto, la recta, el segmento y rayo o semirrecta. • **Explica** gráficas y situaciones del mundo que le rodea relacionadas con ángulos, que son presentadas en láminas, libros y páginas webs. • **Expresa** situaciones relacionadas con la vida cotidiana y con la propia matemática, haciendo uso tanto del lenguaje simbólico como del lenguaje gráfico. • **Define**, **describe** y **diferencia** los elementos de la circunferencia, usando el lenguaje gráfico. • **Expresa** y **representa** de manera gráfica la homotecia y semejanza de figuras.	• **Conoce** y **explica** sobre el origen y desarrollo de la geometría. • **Utiliza** los símbolos técnicos para describir los conceptos de *punto*, *recta*, *plano*, *segmento* y *rayo* o *semirrecta*. • **Define** diferentes sistemas de medidas de ángulos y convierte medidas de un sistema a otro. • **Distingue** cuándo dos a más ángulos son congruentes. • **Expresa** y **comparte** con sus compañeros y compañeras, el concepto de ángulos adyacentes, opuestos por el vértice, complementarios y suplementarios. • **Comparte** con sus compañeros las propiedades de los triángulos isósceles y equilátero.

Competencias específicas	Indicadores de logro
• **Hace** uso apropiado del lenguaje matemático simbólico en las demostraciones y resolución de problemas, así como del lenguaje grafico en la representación de poliedros y cuerpos en general.	• **Establece** la diferencia entre circunferencia y círculo o región circular. • **Establece** la diferencia entre cuadrilátero inscrito, circunscrito, inscriptible y circunscriptible en una circunferencia. • **Muestra** interés en aplicaciones de las transformaciones geométricas (isometría, homotecia y semejanza) que se encuentran en su entorno. • **Disfruta** modelando situaciones de su entorno a través de las transformaciones geométricas (isometría, homotecia y semejanza). • **Define** y **reconoce** los conceptos de *casquete esférico*, *huso esférico*, *segmeno esférico*, *cuña esférica* y *sector esférico*.
	
Modela y representa: • **Representa** una situación determinada de la vida diaria a través de los elementos básicos de la geometría plana. • **Expresa** situaciones de la vida cotidiana que involucran ángulos y teoremas relacionados, mediante gráficas y ecuaciones. • **Representa** situaciones de la matemática y de otras ciencias que hacen las líneas notables de un triángulo. • **Usa** la circunferencia para representar gráficos estadísticos, polígonos regulares, figuras estrelladas, etc. • **Representa** situaciones de su cotidianidad a través de homotecias y semejanzas. • **Representa** situaciones de su cotidianidad usando cuerpos truncados, esfera, casquete esférico, huso esférico, segmento esférico, cuña esférica, y sector esférico.	• **Construye** y **representa** gráficamente el punto, la recta, el plano, segmento y rayo o semirrecta utilizando recursos convencionales y virtuales. • **Determina** gráficamente la distancia entre dos puntos, utilizando recursos convencionales y virtuales (GeoGebra). • **Construye** y **mide** ángulos haciendo uso de herramientas manipulativas y virtuales. • **Identifica** las líneas notables del triángulo. • **Construye** cualquiera de las líneas notables del triángulo. • **Construye** la circunferencia y sus elementos, utilizando tanto herramientas físicas (transportador, regla, cartabón) como tecnológicas, donde cuenten con estos recursos. • **Reconoce** la isometría como transformación geométrica. • **Construye** homotecias de figuras dadas. • **Aprecia** el uso de las transformaciones geométricas. • **Construye** gráficas de poliedros regulares, de cilindros, conos y esferas a partir de sus características.
	

Competencias e indicadores de logro de Matemática para el cuarto curso del Nivel Secundario

Competencias específicas	Indicadores de logro
Conecta: • **Emplea** los elementos básicos de la geometría plana y **los relaciona** con una situación o problema de su contexto. • **Aplica** los conocimientos sobre ángulos para comprender, explicar y construir nuevas situaciones matemáticas y de otras ciencias, como la física, las artes y la educación física. • **Usa** los conocimientos sobre triángulos, sus elementos y propiedades para adquirir nuevos conocimientos y resolver situaciones problemáticas dentro y fuera de la matemática. • **Aplica** los conocimientos sobre la circunferencia, sus elementos y propiedades en situaciones de la cotidianidad, para dar explicaciones y comprobar fenómenos del mundo científico. • **Identifica** transformaciones geométricas en situaciones y objetos del entorno. • **Determina** la cantidad de mosaicos necesarios para embaldosar una habitación y la cantidad de galones de agua que contiene una cisterna de una determinada dimensión. • **Identifica** cuerpos truncados y esferas en objetos del contexto.	• **Maneja** y **aplica** los postulados de congruencia del triángulo. • **Aplica** cualquiera de los teoremas fundamentales en la circunferencia para resolver situaciones problemáticas planteadas. 
Resuelve problemas: • **Resuelve** problemas de la vida cotidiana en que se desenvuelve, utilizando los elementos básicos de la geometría. • **Formula** y **resuelve** problemas, haciendo uso de los ángulos y sus propiedades, en situaciones del entorno. • **Utiliza** los teoremas de congruencias de triángulos para plantear y resolver problemas en los que se aplique la congruencia de triángulos. • **Resuelve** y **elabora** problemas de su entorno cotidiano, utilizando la circunferencia, sus elementos y propiedades, sus diferentes posiciones y teoremas relacionados. • **Utiliza** la homotecia y semejanza para resolver situaciones problemáticas dadas. • **Utiliza** el área y el volumen de la esfera y cuerpos truncados para resolver problemas del entorno.	• **Utiliza** los postulados de la congruencia de triángulos en la resolución de problemas de la vida cotidiana. • **Resuelve** problemas del entorno que involucran conceptos, propiedades y teoremas sobre circunferencias. • **Disfruta** el hacer demostraciones y resolver problemas de la vida cotidiana relacionados con la circunferencia. • **Resuelve** situaciones problemáticas usando áreas y volúmenes de poliedros. • **Resuelve** situaciones problemáticas usando áreas y volúmenes de cuerpos truncados. • **Muestra** entusiasmo al realizar cálculos de áreas y volúmenes de los diferentes cuerpos. • **Determina** el área y volumen de poliedros regulares, de conos, cilindros y esferas.

Competencias específicas	Indicadores de logro
Utiliza herramientas tecnológicas: • **Hace** uso de páginas electrónicas y de diferentes tipos de softwares, en los que se apliquen los conocimientos sobre punto, recta, plano, segmento, rayo o semirrecta. • **Aplica** programas tecnológicos como GeoGebra y otros, para explicar, interpretar y facilitar el aprendizaje y la solución de problemas que se relacionan con los triángulos. • **Maneja** programas tecnológicos como el GeoGebra y otros para realizar construcciones de una circunferencia, así como líneas y puntos notables de la misma. • **Utiliza** diferentes tipos de recursos o herramientas tanto físicos como tecnológicos para representar situaciones que involucren homotecia y semejanza.	• **Usa** los instrumentos apropiados en la interpretación y construcción de situaciones que involucren ángulos. • **Usa** herramientas tradicionales para interpretar con mayor facilidad situaciones planteadas. • **Construye** gráficas sobre cuerpos truncados y esferas usando herramientas tanto físicas como tecnológicas, como el GeoGebra y otras.
Utiliza algoritmos: • **Ejecuta** los procedimientos necesarios y en el orden correspondiente para alcanzar la solución de un problema matemático. • **Sigue** las reglas e instrucciones en un orden sucesivo en la realización de las actividades propuestas.	• **Reconoce** las variables presentes en una fórmula y emplea esta última correctamente.

Secuencia de contenidos del Segundo Ciclo del Nivel Secundario

Cuarto grado

Contenidos

Introducción a la Geometría

- Breve historia de la geometría: origen y evolución.
- Elementos básicos de la geometría: punto, recta y plano.
- Segmento, división de un segmento, segmentos congruentes.
- Mediatriz de un segmento.
- Rayo o semirrecta.
- Distancias entre dos puntos.
- Punto medio de un segmento.
- Conceptos de postulado, teorema, hipótesis, tesis y corolario.

Ángulos y medidas

- Concepto de ángulo y notación.
- Sistemas de medidas de ángulos: en grados sexagesimales y en radianes.
- Tipos de ángulos: agudos, rectos, obtusos, llanos.
- Ángulos congruentes.
- Bisectriz de un ángulo.
- Postulados sobre las medidas de ángulos y construcción de ángulos.
- Pares de ángulos: adyacentes, opuestos por el vértice, complementarios, suplementarios, alternos, conjugados.

Triángulos, líneas notables y congruencias

- Concepto de triángulo. Sus elementos y notación.
- Clase de triángulos atendiendo a sus lados.
- Clase de triángulos atendiendo a sus ángulos.
- Líneas y puntos notables del triángulo.
- Congruencia de triángulos.
- Postulados sobre la congruencia de triángulos.
- Medidas de los ángulos interiores de un triángulo (teorema fundamental).
- Medida de un ángulo exterior de un triángulo.
- Propiedades o principios del triángulo isósceles.

Propiedades o principios del triángulo equilátero.

Circunferencia

- Conceptos de *circunferencia* y *círculo* o *región circular*.
- Líneas y puntos de la circunferencia.
- Posiciones relativas de dos circunferencias en el plano.
- Tangentes trazadas desde un punto exterior a una circunferencia (teorema).
- Tangentes interiores a dos circunferencias (teorema).
- Tangentes comunes exteriores a dos circunferencias (teorema).

Conceptos de *polígonos inscritos* y *circunscritos*, *círculos concéntricos*.

Transformaciones geométricas

- Transformaciones geométricas y su clasificación.
- Concepto de homotecia de un punto.
- Regla para determinar semejanza y homotecias en el plano.

Áreas y volúmenes

- Poliedros, pirámides, prismas, cilindros, conos y esferas.
- Elementos de un poliedro.
- Área y volúmenes de pirámides y prismas regulares y de poliedros o cuerpos truncados.
- Áreas y volúmenes de conos y cilindros.
- Áreas y volúmenes de cuerpos truncados.
- Áreas y volúmenes de cuerpos redondos.
- Concepto de casquete esférico, huso esférico, segmento esférico, cuña esférica y sector esférico.

Secuencia de contenidos del Segundo Ciclo del Nivel Secundario

Contenidos

Quinto grado

Producto cartesiano, relaciones y funciones. Funciones trigonométricas

- Producto cartesiano.
- Relación binaria: clasificación y gráficas.
- Funciones: clasificación y gráficas.
- Breve descripción histórica de la trigonometría.
- Funciones trigonométricas.
- Ángulos notables.
- Ángulos cuadrantales.
- Signos de las funciones trigonométricas según los cuadrantes del ángulo.
- Identidades trigonométricas (pitagóricas, por cocientes e inversas).
- Área y resolución de triángulos rectángulos y oblicuángulos.
- Ley de los senos y cosenos.
- Aplicaciones.

Vectores, matrices y sistema de ecuaciones

- Vectores, Matrices y Determinantes.
- Vector nulo y vector unidad.
- Producto escalar y vectorial
- Suma gráfica y analítica de vectores
- Matriz nula, matriz unidad e inversa de una matriz.
- Operaciones (suma, diferencia y producto de matrices).
- Sistema de ecuaciones lineales.

Estadística y probabilidad

- Medidas de tendencia central: media geométrica y media armónica.
- Medidas de variación para datos no agrupados: desviación media, desviación estándar y varianza.
- Medidas de posición para datos no agrupados: cuartiles, deciles, percentiles y quintiles.
- Principios de conteo.
- Frecuencia relativa y probabilidad.
- Cálculo de probabilidades de: eventos mutuamente excluyentes, eventos independientes, complemento de un evento y la unión de eventos.
- Variables aleatorias discretas y continuas.
- Cálculo de probabilidades relativas a la distribución binomial.
- Cálculo de probabilidades relativas a la distribución normal.
- Cálculo del valor esperado para distribuciones discretas.

Sexto grado

Ecuaciones e inecuaciones

- Ecuaciones exponenciales y logarítmicas.
- Sistemas de inecuaciones lineales en dos variables.

Sucesiones y Series, Matemática Financieras

- Sucesiones (aritméticas, geométricas y otras).
- Fórmula para calcular un término específico y la suma de los N primeros términos de una sucesión.
- Tasa de interés (simple y compuesto).
- Comisión, descuento y la importancia de estos en la vida diaria.
- Fórmula del valor actual, valor futuro y renta a interés simple y compuesto.

Límite de una función

- Concepto de *límite de una función*.
- Propiedades de los límites.
- Concepto de *derivada de una función*.
- Linealidad de la derivada.
- Máximos y mínimos de una función.

Integrales definidas e indefinidas

- Integrales definida e indefinida.
- Teorema fundamental del cálculo.
- Propiedad lineal de las integrales.

Integrales definidas e indefinidas

- Integrales definida e indefinida.

El libro de texto de las y los estudiantes de 4.º a 6.º

Libro que plantea oportunidades de aprendizaje y desarrolla procesos pedagógicos. El libro del tercer curso del Nivel Secundario está compuesto por **10 unidades didácticas, 2 unidades de aprendizaje**, **un proyectos participativo de aula** y dos dobles páginas de **Competencias laborales y profesionales**.

Las **unidades didácticas** trabajan las competencias y temas específicos de la materia.

Unidad didáctica: páginas de apertura


1 Fundamentos de Geometría

1 **Conceptos**

- Historia de la Geometría.
- Axiomas y teoremas.
- El razonamiento deductivo en Geometría.
- Segmentos proporcionales.
- Semejanza y congruencia de figuras.

Procedimientos

- Investigación de los orígenes históricos de la Geometría.
- Construcción de elementos básicos de la Geometría.

Actitudes y valores

- Valoración del uso de la Geometría en el conocimiento del entorno.
- Aprecio por el papel de la geometría en el desarrollo de la tecnología.

2 **Punto de partida**

El resultado de dividir la longitud de la diagonal de un cuadrado por la longitud de sus lados proporciona un valor fijo. La suma de las longitudes de dos lados de un triángulo siempre es mayor que la longitud del tercer lado. El día y la noche se suceden con regularidad. Las estrellas se mueven siguiendo trayectorias que, vistas desde la Tierra, parecen ser circunferencias perfectas.

El mundo que nos rodea está construido de tal modo que entre las cosas y los acontecimientos se establecen relaciones constantes que permiten la obtención de nuevos conocimientos y hacer predicciones exitosas. Esto fue comprendido por quienes se dedicaron a la observación de los fenómenos y a la búsqueda de leyes naturales.

La Geometría se ocupa de estudiar las relaciones fijas entre elementos de una figura o un cuerpo. Si bien los primeros geómetras se limitaron a utilizar con fines prácticos estas relaciones, sus sucesores buscaron procedimientos para probarlas de manera incontrovertible.

- ¿Qué relaciones fijas entre objetos o acontecimientos identificas en tu entorno? **Menciona** tres relaciones.

ANALIZA EL PROBLEMA 3

Se está diseñando un aparato óptico de alta precisión. Los diseñadores procuran dotarlo de una base con patas que garantice que el aparato no sufra deslizamientos o movimientos de vaivén que pudieran afectar los resultados de las observaciones que se harán con él.

Unos hablan de dotar a la base de cuatro patas fuertes y suficientemente fijas al dispositivo óptico de alta precisión. Otros creen que el número de patas del aparato debe ser tres, ya que con ello se minimizaría el riesgo de que sufra oscilaciones al manejarlo.

4 **PLANTEA UNA SOLUCIÓN**

- Responde las preguntas.
  - Si fueras uno de los diseñadores del aparato, ¿cuál de las propuestas te parecería más razonable?
  - ¿Tienes alguna solución mejor para el problema de los diseñadores del aparato? ¿Cuál es?
  - ¿Por qué consideras que tu solución es la mejor?
  - Si tuvieras que justificar la propuesta de las tres patas, ¿qué argumentos extraídos de la Geometría utilizarías?

6 ©Santillana, S. A. ©Santillana, S. A. 7

1 **Conceptos, procedimientos y actitudes y valores**. Se destacan los principales contenidos a estudiar en la unidad, junto a sus procedimientos, actitudes y valores morales trajados en cada unidad.

2 **Punto de partida**. Texto sobre situación o planteamiento que contextualiza el tema de la unidad.

3 **Analiza el problema**. Se presenta un problema con el fin de que los estudiantes, en base a conocimientos y experiencias previas, lo realicen.

4 **Plantea una solución**. En esta sección los estudiantes plantearán una solución al problema planteado en la página anterior.

Páginas de información y actividades

HISTORIA DE LA GEOMETRÍA. CONCEPTOS PRIMITIVOS Y DERIVADOS

4 Identifica y expone momentos importantes del desarrollo histórico de la Geometría. 1

1 **RECUPERACIÓN**

Responde.

- ¿Qué marcas u objetos del entorno te sugieren la noción de punto geométrico?
- ¿Y las nociones de recta y de plano?
- ¿Puedes afirmar que, en rigor, existen puntos, rectas y planos geométricos en tu entorno?

3 

Trazado de los límites de una parcela. Los antiguos egipcios empleaban una cuerda de 12 nudos para trazar ángulos rectos y garantizar la forma rectangular de las parcelas.

1 Orígenes de la Geometría 2

El término *geometría*, etimológicamente *medida de la Tierra*, permite rastrear sus orígenes. La Geometría aparece históricamente asociada a las actividades relacionadas con la medida de áreas de predios agrícolas y otras propiedades inmobiliarias. Desde aquí, se extendió al cálculo de volúmenes con la finalidad de medir la cantidad de granos conservada en los almacenes. Otro importante papel en el origen de la Geometría fue jugado por la astronomía observacional.

Los primeros pasos en la aparición y desarrollo de la Geometría los dieron las civilizaciones egipcia y babilonia, que descubrieron formas de cálculo de distancias, áreas y volúmenes. En todos estos logros, la resolución de problemas prácticos fue el estímulo básico.

La Geometría egipcia, eminentemente práctica, pasa a Grecia y allí empieza a convertirse en una teoría matemática que busca fundamentar sus resultados sobre el razonamiento formal. El paso de la Geometría como un conjunto de reglas prácticas a una teoría matemática tardó varios siglos.

En el siglo III a. e. c, aparece *Los elementos*, obra atribuida a Euclides en los que las afirmaciones de la Geometría, muchas de ellas con siglos de antigüedad, son justificadas mediante el ejercicio de reglas lógicas. En esta, la Geometría se convierte en una ciencia que prueba sus afirmaciones mediante cadenas de razonamiento a partir de unas proposiciones básicas tomadas como puntos de partida.

2 Conceptos primitivos y derivados

Una idea o concepto se llama primitivo o primario si no admite ser definido en términos de otros más simples.

En Geometría son conceptos primarios el punto, la recta y el plano. Si imaginamos a la Geometría como un edificio, estos conceptos juegan el papel de los ladrillos de construcción.

Los conceptos de rayo, segmento y ángulo, llamados conceptos derivados, se definen empleando a los de punto, recta y plano.

De no existir conceptos primitivos, la Geometría implicaría una cadena infinita de definiciones y no podría ser fundada sobre bases firmes.

3 Puntos, rectas y planos

Un punto geométrico se asocia a la marca de un lápiz de punta muy afilada sobre una hoja de papel.

Un punto no tiene largo, ancho o altura.

Una línea recta es el concepto geométrico relacionado con el borde de una regla o un rayo de luz.

Una línea recta se extiende indefinidamente a ambos lados de cualquiera de los puntos que la forman.

Un plano es el concepto geométrico que se vincula a la superficie lisa de una hoja de papel o de un estanque tranquilo.

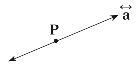
Un plano se extiende también indefinidamente, como una recta, pero en dos dimensiones, largo y ancho.

Punto

• P

Para designar un punto se usa una letra mayúscula: **P**, **Q**, **R**, …

Recta



Para designar una recta se usa una letra sobre la cual se coloca una doble flechita: $\overleftrightarrow{a}$, $\overleftrightarrow{b}$, $\overleftrightarrow{c}$, …

Plano

Un plano se nombra, como se nombra un punto, mediante una letra mayúscula.

4 Rayos y segmentos

Un rayo o semirrecta es el resultado de tomar un punto **P** de una recta y todos los demás, **Q**, **R**, **S**, … a un lado u otro de dicho punto.

P • —— Q • —— R • ——→

El rayo de la figura anterior, que sale de **P**, se designa: $\overrightarrow{PQ}$.

Un segmento es el conjunto de puntos de una recta comprendidos entre dos puntos dados, que son sus extremos.

P •————————• Q

El segmento de la figura, de extremos **P** y **Q**, se designa: $\overline{PQ}$.

5 **ACTIVIDADES**

1 Piensa y, luego, contesta las preguntas justificando tus respuestas.

- ¿Podrías emplear el concepto de línea recta para definir lo que es un punto geométrico? ¿Cómo lo harías?
- ¿Puede afirmarse que tres puntos no alineados siempre están situados sobre un plano? ¿Pueden afirmar lo mismo de cuatro puntos?

Cuaderno: Ficha 1 |

1 **Recuperación**. Preguntas de recuperación de conocimientos para cada tema.

2 **Conceptos** desarrollados con claridad y concisión.

3 **Programas especiales para reforzar y ampliar sus conocimientos y destrezas:**

- **Más información**: lecturas para ampliar tus conocimientos y conocer datos interesantes sobre el tema.
- **Recuerda**: conceptos e ideas estudiadas en unidades o grados anteriores y que se relacionan con el tema que se esté tratando.
- **Inteligencia colaborativa**: actividades para ser realizadas en equipo en el aula.

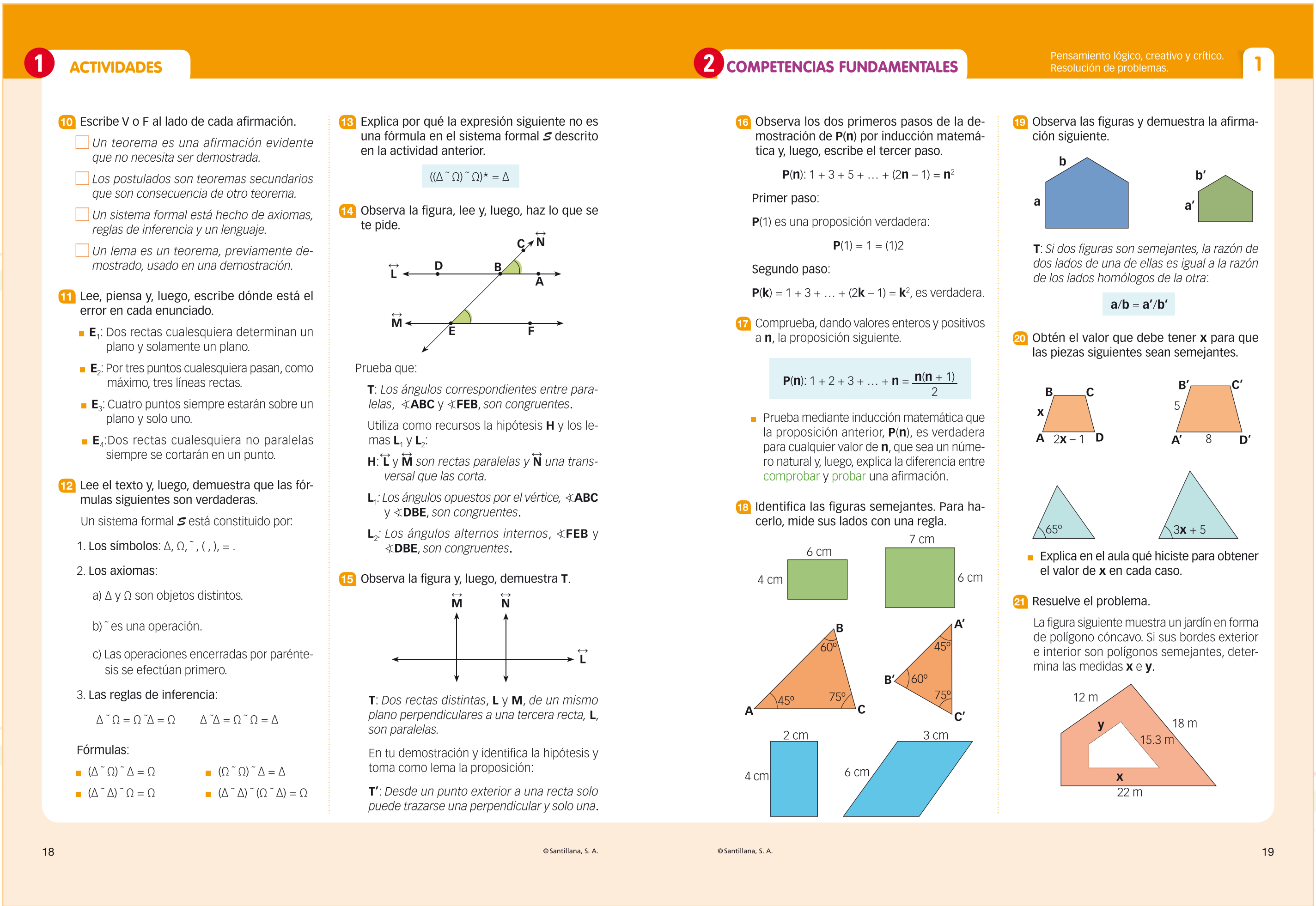
4 **Indicadores de logro** que permiten medir o evaluar el aprendizaje logrado.

5 **Actividades de comprensión y ejercitación**. Actividades de distinta demanda cognitiva para interpretar la información y reforzar las habilidades comunicativas.

El **libro** de texto de las y los estudiantes de 4.º a 6.º

Páginas de actividades y evaluación

1 **Actividades**. Página destinada a actividades que favorecen el desarrollo de las competencias específicas del área.



1 ACTIVIDADES

10 Escribe V o F al lado de cada afirmación.

- ☐ *Un teorema es una afirmación evidente que no necesita ser demostrada.*
- ☐ *Los postulados son teoremas secundarios que son consecuencia de otro teorema.*
- ☐ *Un sistema formal está hecho de axiomas, reglas de inferencia y un lenguaje.*
- ☐ *Un lema es un teorema, previamente demostrado, usado en una demostración.*

11 Lee, piensa y, luego, escribe dónde está el error en cada enunciado.

- E_1: Dos rectas cualesquiera determinan un plano y solamente un plano.
- E_2: Por tres puntos cualesquiera pasan, como máximo, tres líneas rectas.
- E_3: Cuatro puntos siempre estarán sobre un plano y solo uno.
- E_4: Dos rectas cualesquiera no paralelas siempre se cortarán en un punto.

12 Lee el texto y, luego, demuestra que las fórmulas siguientes son verdaderas.

Un sistema formal $\mathcal{S}$ está constituido por:

1. Los símbolos: $\Delta, \Omega, \tilde{}\,, (\,,\,), =$.
2. Los axiomas:
   a) Δ y Ω son objetos distintos.
   b) $\tilde{}$ es una operación.
   c) Las operaciones encerradas por paréntesis se efectúan primero.
3. Las reglas de inferencia:

$$\Delta\,\tilde{}\,\Omega = \Omega\,\tilde{}\,\Delta = \Omega \qquad \Delta\,\tilde{}\,\Delta = \Omega\,\tilde{}\,\Omega = \Delta$$

Fórmulas:

- $(\Delta\,\tilde{}\,\Omega)\,\tilde{}\,\Delta = \Omega$
- $(\Omega\,\tilde{}\,\Omega)\,\tilde{}\,\Delta = \Delta$
- $(\Delta\,\tilde{}\,\Delta)\,\tilde{}\,\Omega = \Omega$
- $(\Delta\,\tilde{}\,\Delta)\,\tilde{}\,(\Omega\,\tilde{}\,\Delta) = \Omega$

13 Explica por qué la expresión siguiente no es una fórmula en el sistema formal $\mathcal{S}$ descrito en la actividad anterior.

$$((\Delta\,\tilde{}\,\Omega)\,\tilde{}\,\Omega)^* = \Delta$$

14 Observa la figura, lee y, luego, haz lo que se te pide.

Prueba que:

T: *Los ángulos correspondientes entre paralelas, $\measuredangle$**ABC** y $\measuredangle$**FEB**, son congruentes.*

Utiliza como recursos la hipótesis **H** y los lemas L_1 y L_2:

H: $\overleftrightarrow{L}$ y $\overleftrightarrow{M}$ *son rectas paralelas y* $\overleftrightarrow{N}$ *una transversal que las corta.*

L_1: *Los ángulos opuestos por el vértice, $\measuredangle$**ABC** y $\measuredangle$**DBE**, son congruentes.*

L_2: *Los ángulos alternos internos, $\measuredangle$**FEB** y $\measuredangle$**DBE**, son congruentes.*

15 Observa la figura y, luego, demuestra **T**.

T: *Dos rectas distintas, **L** y **M**, de un mismo plano perpendiculares a una tercera recta, **L**, son paralelas.*

En tu demostración y identifica la hipótesis y toma como lema la proposición:

T': *Desde un punto exterior a una recta solo puede trazarse una perpendicular y solo una.*

18

©Santillana, S. A.

2 COMPETENCIAS FUNDAMENTALES

Pensamiento lógico, creativo y crítico. Resolución de problemas.

1

16 Observa los dos primeros pasos de la demostración de **P**(**n**) por inducción matemática y, luego, escribe el tercer paso.

$$\mathbf{P}(\mathbf{n}): 1 + 3 + 5 + \ldots + (2\mathbf{n} - 1) = \mathbf{n}^2$$

Primer paso:

P(1) es una proposición verdadera:

$$\mathbf{P}(1) = 1 = (1)2$$

Segundo paso:

$\mathbf{P}(\mathbf{k}) = 1 + 3 + \ldots + (2\mathbf{k} - 1) = \mathbf{k}^2$, es verdadera.

17 Comprueba, dando valores enteros y positivos a **n**, la proposición siguiente.

$$\mathbf{P}(\mathbf{n}): 1 + 2 + 3 + \ldots + \mathbf{n} = \frac{\mathbf{n}(\mathbf{n}+1)}{2}$$

- Prueba mediante inducción matemática que la proposición anterior, **P**(**n**), es verdadera para cualquier valor de **n**, que sea un número natural y, luego, explica la diferencia entre comprobar y probar una afirmación.

18 Identifica las figuras semejantes. Para hacerlo, mide sus lados con una regla.

19 Observa las figuras y demuestra la afirmación siguiente.

T: *Si dos figuras son semejantes, la razón de dos lados de una de ellas es igual a la razón de los lados homólogos de la otra*:

$$\mathbf{a}/\mathbf{b} = \mathbf{a}'/\mathbf{b}'$$

20 Obtén el valor que debe tener **x** para que las piezas siguientes sean semejantes.

- Explica en el aula qué hiciste para obtener el valor de **x** en cada caso.

21 Resuelve el problema.

La figura siguiente muestra un jardín en forma de polígono cóncavo. Si sus bordes exterior e interior son polígonos semejantes, determina las medidas **x** e **y**.

©Santillana, S. A.

19

2 **Página de actividades asociadas a competencias fundamentales**.

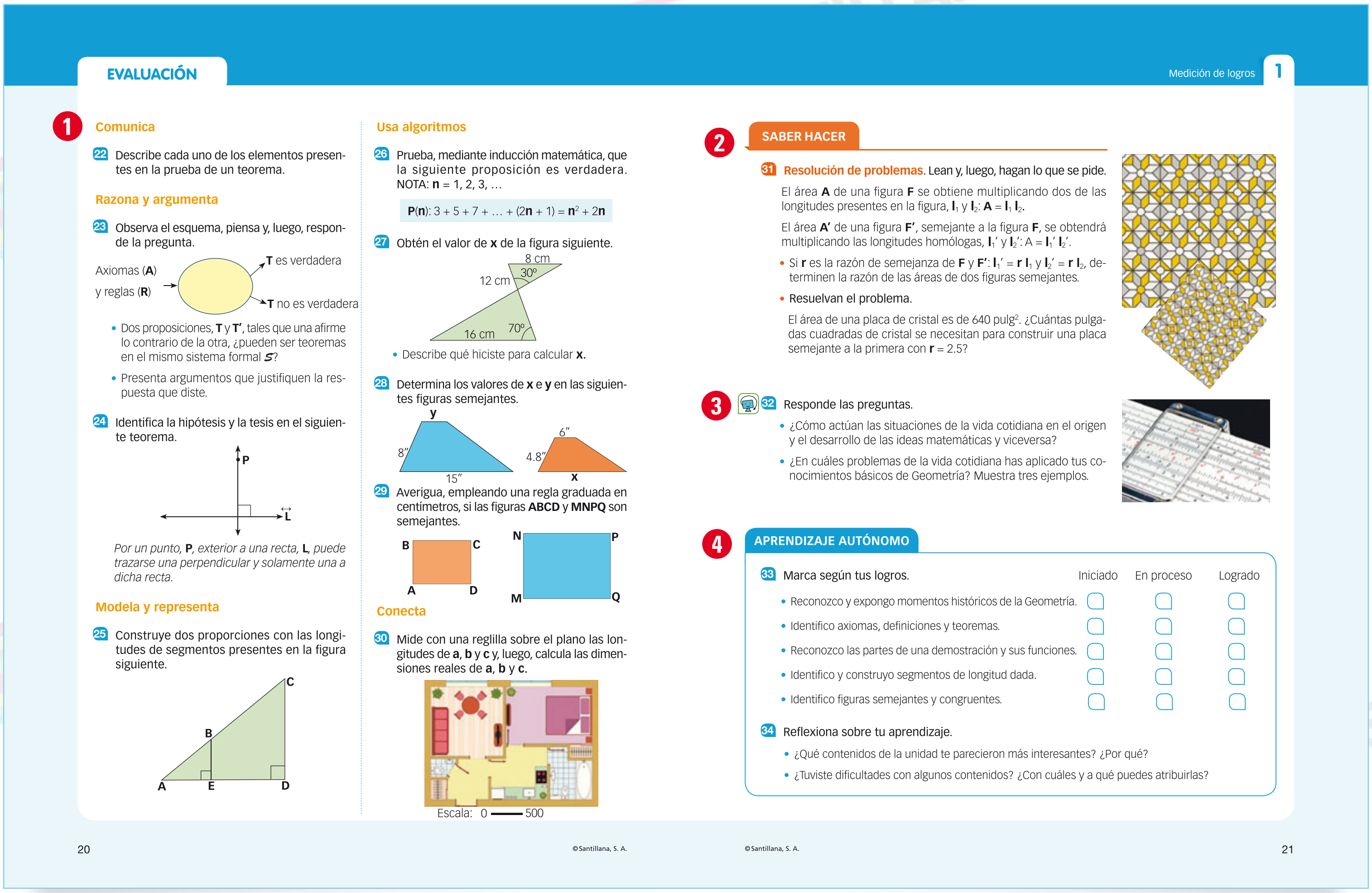
Propuesta de actividades de aplicación de lo aprendido en contextos de la vida cotidiana y asociadas a una competencia fundamental del currículo.

Páginas de evaluación

1 **Actividades** para evaluar el nivel de dominio de las competencias que se ha procurado desarrollar mediante el trabajo con la unidad. Las actividades están estrechamente relacionadas con los indicadores de logro planteados en la programación o planificación curricular de la unidad.

La evaluación puede ser aplicada en cualquiera de sus modalidades:

- Autoevaluación
- Coevaluación
- Heteroevaluación



EVALUACIÓN

Medición de logros 1

1 **Comunica**

22 Describe cada uno de los elementos presentes en la prueba de un teorema.

Razona y argumenta

23 Observa el esquema, piensa y, luego, responde la pregunta.

- Dos proposiciones, **T** y **T'**, tales que una afirme lo contrario de la otra, ¿pueden ser teoremas en el mismo sistema formal *S*?
- Presenta argumentos que justifiquen la respuesta que diste.

24 Identifica la hipótesis y la tesis en el siguiente teorema.

*Por un punto, **P**, exterior a una recta, **L**, puede trazarse una perpendicular y solamente una a dicha recta.*

Modela y representa

25 Construye dos proporciones con las longitudes de segmentos presentes en la figura siguiente.

Usa algoritmos

26 Prueba, mediante inducción matemática, que la siguiente proposición es verdadera. NOTA: $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$P(n): 3 + 5 + 7 + \ldots + (2n + 1) = n^2 + 2n$$

27 Obtén el valor de **x** de la figura siguiente.

- Describe qué hiciste para calcular **x**.

28 Determina los valores de **x** e **y** en las siguientes figuras semejantes.

29 Averigua, empleando una regla graduada en centímetros, si las figuras **ABCD** y **MNPQ** son semejantes.

Conecta

30 Mide con una reglilla sobre el plano las longitudes de **a**, **b** y **c** y, luego, calcula las dimensiones reales de **a**, **b** y **c**.

2 SABER HACER

31 **Resolución de problemas.** Lean y, luego, hagan lo que se pide.

El área **A** de una figura **F** se obtiene multiplicando dos de las longitudes presentes en la figura, l_1 y l_2: $A = l_1\,l_2$.

El área **A'** de una figura **F'**, semejante a la figura **F**, se obtendrá multiplicando las longitudes homólogas, l_1' y l_2': $A = l_1'\,l_2'$.

- Si **r** es la razón de semejanza de **F** y **F'**: $l_1' = r\,l_1$ y $l_2' = r\,l_2$, determinen la razón de las áreas de dos figuras semejantes.
- Resuelvan el problema.

El área de una placa de cristal es de 640 pulg². ¿Cuántas pulgadas cuadradas de cristal se necesitan para construir una placa semejante a la primera con $r = 2.5$?

3 **32** Responde las preguntas.

- ¿Cómo actúan las situaciones de la vida cotidiana en el origen y el desarrollo de las ideas matemáticas y viceversa?
- ¿En cuáles problemas de la vida cotidiana has aplicado tus conocimientos básicos de Geometría? Muestra tres ejemplos.

4 APRENDIZAJE AUTÓNOMO

33 Marca según tus logros.

	Iniciado	En proceso	Logrado
Reconozco y expongo momentos históricos de la Geometría.	☐	☐	☐
Identifico axiomas, definiciones y teoremas.	☐	☐	☐
Reconozco las partes de una demostración y sus funciones.	☐	☐	☐
Identifico y construyo segmentos de longitud dada.	☐	☐	☐
Identifico figuras semejantes y congruentes.	☐	☐	☐

34 Reflexiona sobre tu aprendizaje.

- ¿Qué contenidos de la unidad te parecieron más interesantes? ¿Por qué?
- ¿Tuviste dificultades con algunos contenidos? ¿Con cuáles y a qué puedes atribuirlas?

20 ©Santillana, S. A. ©Santillana, S. A. 21

2 **Actividad asociada a una de las estrategia de evaluación.** Actividades en la que los estudiantes trabajarán con algunas de las estrategias de evaluación del currículo.

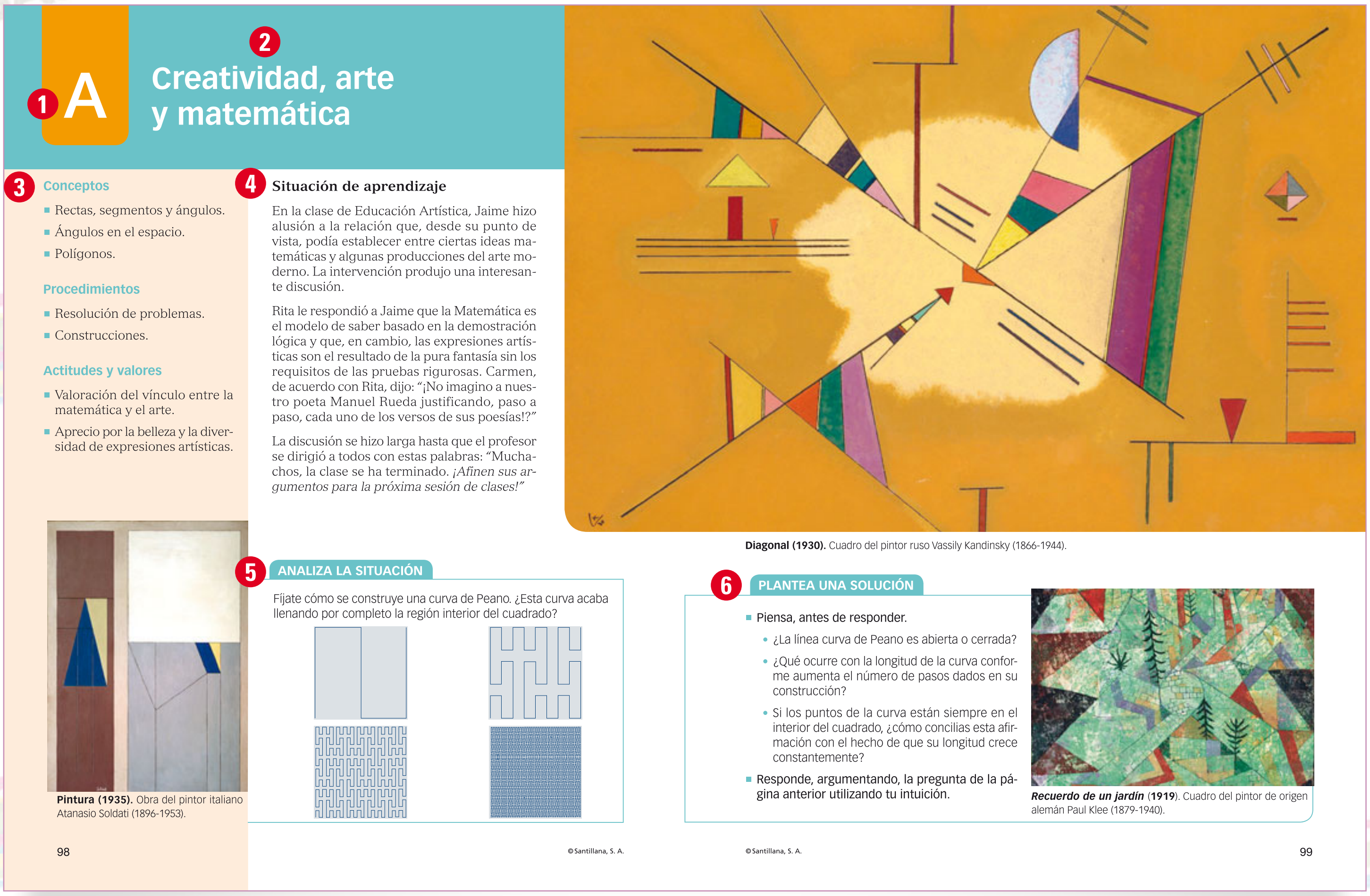
3 **Valores.** Sección de preguntas relacionadas con algún valor trabajado en la unidad.

4 **Aprendizaje autónomo.** Los estudiantes evaluarán por sí mismos sus logros y reflexionarán acerca de su aprendizaje. Además, incluye preguntas de metacognición.

El **libro** de texto de los estudiantes de 4.º a 6 .º

Las **unidades de aprendizaje** son propuestas que favorecen la articulación de las diferentes áreas del conocimiento.

Unidad de aprendizaje: páginas de apertura



1 A

2 Creatividad, arte y matemática

3 Conceptos

- Rectas, segmentos y ángulos.
- Ángulos en el espacio.
- Polígonos.

Procedimientos

- Resolución de problemas.
- Construcciones.

Actitudes y valores

- Valoración del vínculo entre la matemática y el arte.
- Aprecio por la belleza y la diversidad de expresiones artísticas.

4 **Situación de aprendizaje**

En la clase de Educación Artística, Jaime hizo alusión a la relación que, desde su punto de vista, podía establecer entre ciertas ideas matemáticas y algunas producciones del arte moderno. La intervención produjo una interesante discusión.

Rita le respondió a Jaime que la Matemática es el modelo de saber basado en la demostración lógica y que, en cambio, las expresiones artísticas son el resultado de la pura fantasía sin los requisitos de las pruebas rigurosas. Carmen, de acuerdo con Rita, dijo: "¡No imagino a nuestro poeta Manuel Rueda justificando, paso a paso, cada uno de los versos de sus poesías!?"

La discusión se hizo larga hasta que el profesor se dirigió a todos con estas palabras: "Muchachos, la clase se ha terminado. *¡Afinen sus argumentos para la próxima sesión de clases!"*

Diagonal (1930). Cuadro del pintor ruso Vassily Kandinsky (1866-1944).

Pintura (1935). Obra del pintor italiano Atanasio Soldati (1896-1953).

5 ANALIZA LA SITUACIÓN

Fíjate cómo se construye una curva de Peano. ¿Esta curva acaba llenando por completo la región interior del cuadrado?

6 PLANTEA UNA SOLUCIÓN

- Piensa, antes de responder.
  - ¿La línea curva de Peano es abierta o cerrada?
  - ¿Qué ocurre con la longitud de la curva conforme aumenta el número de pasos dados en su construcción?
  - Si los puntos de la curva están siempre en el interior del cuadrado, ¿cómo concilias esta afirmación con el hecho de que su longitud crece constantemente?
- Responde, argumentando, la pregunta de la página anterior utilizando tu intuición.

Recuerdo de un jardín **(1919)**. Cuadro del pintor de origen alemán Paul Klee (1879-1940).

98 ©Santillana, S. A. ©Santillana, S. A. 99

1. Letra correspondiente a la unidad: las unidades de aprendizaje se identifican con color azul.

2. Título de la unidad.

3. **Conceptos, procedimientos y actitudes y valores**. Se destacan los principales contenidos a estudiar en la unidad, junto a sus procedimientos, actitudes y valores morales trajados en cada unidad.

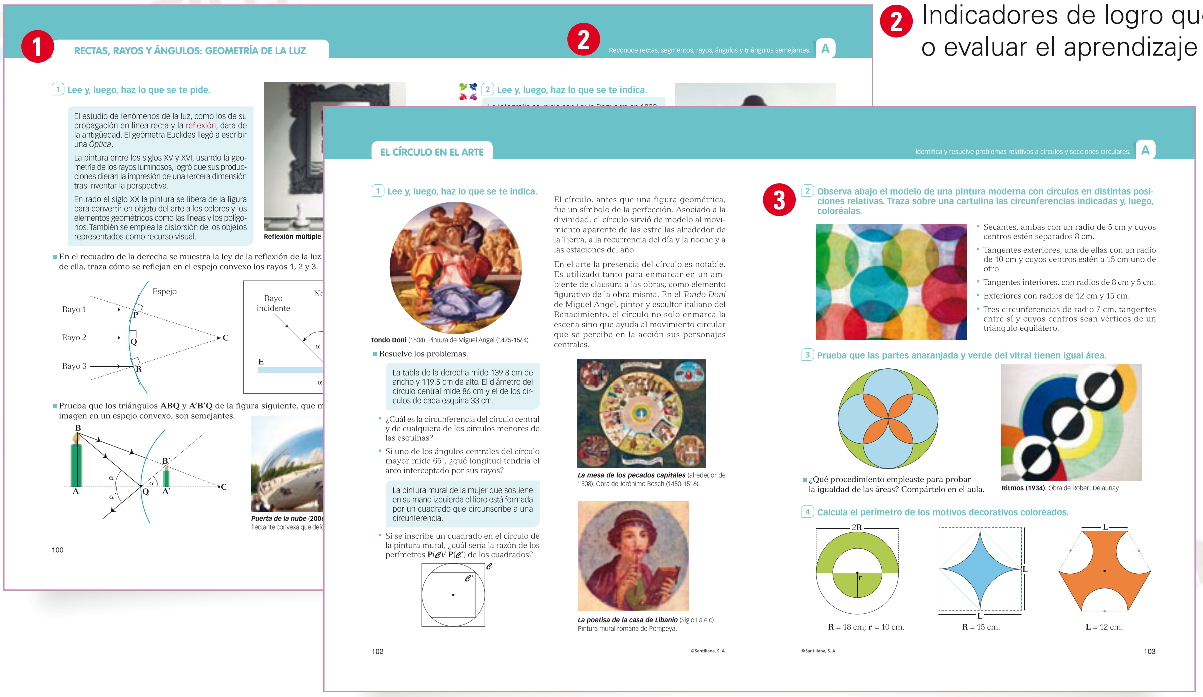
4. **Situación de aprendizaje**. Texto que plantea situaciones reales o simuladas de la vida cotidiana, que llevarán a reflexionar, tomar decisiones y actuar, promoviendo así el desarrollo de competencias que servirán de base en la construcción de aprendizajes significativos y en la resolución de problemas.

5. **Analiza la situación**. Se presenta un problema con el fin de que los estudiantes, en base a conocimientos y experiencias previas, lo realicen.

6. **Plantea una solución**. En esta sección los estudiantes plantearán una solución al problema planteado en la página anterior.

Páginas de información y actividades

1 El tema que se va a tratar

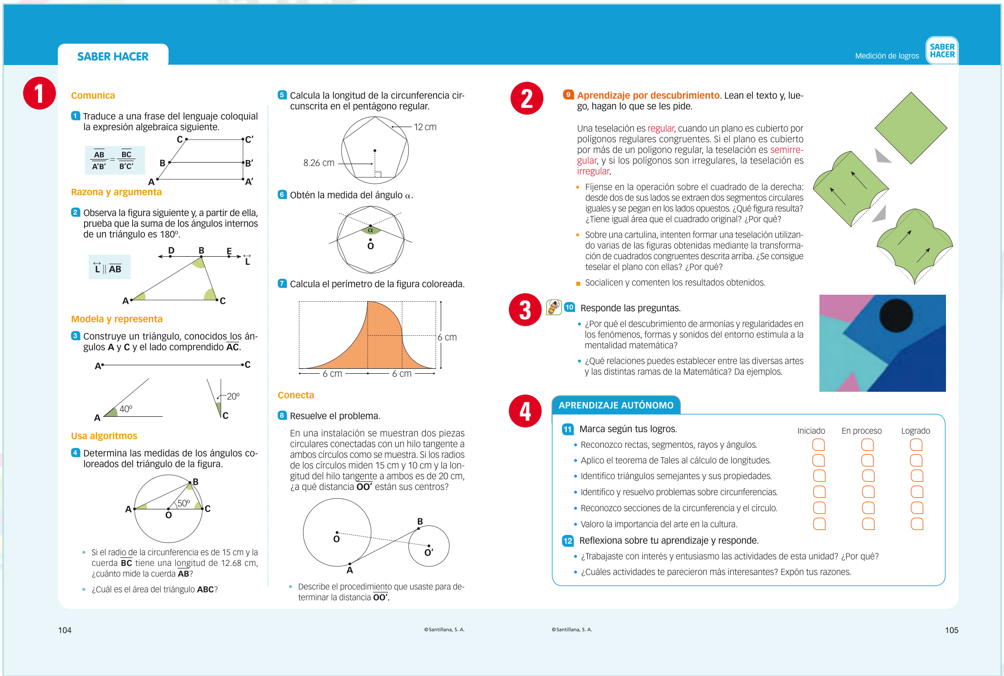


2 Indicadores de logro que permiten medir o evaluar el aprendizaje logrado.

3 Lecturas e imágenes que sirven como base conceptual a las actividades que se proponen.

Páginas de evaluación

Actividades para que descubras lo que aprendiste



1 Actividades para poner a prueba un dominio de los conceptos y procedimientos aprendidos.

2 Actividades para poner en práctica las estrategias de evaluación, promover aprendizajes en función de las competencias fundamentales e identificar los logros alcanzados.

3 **Valores**. Sección de preguntas relacionadas con algún valor trabajado en la unidad.

4 **Aprendizaje autónomo**. Espacio para medir cuánto han aprendido basándose en los indicadores de logro correspondientes, con preguntas sobre metacognición.

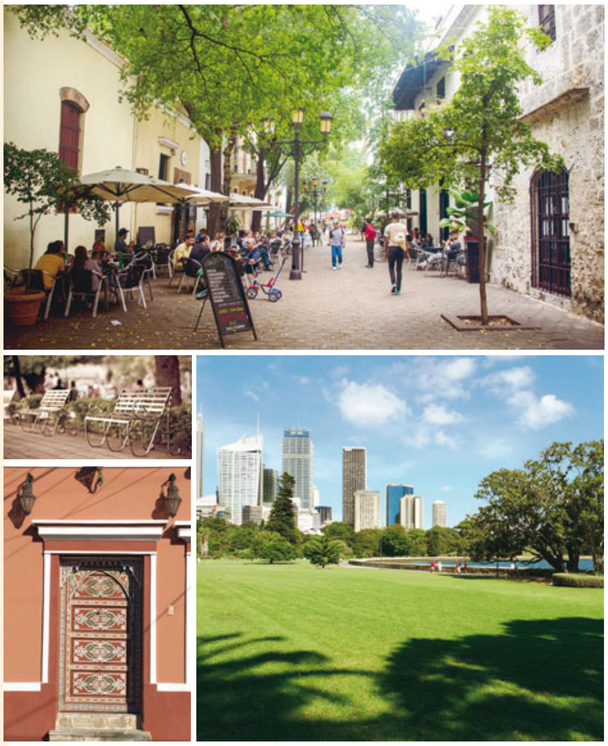
El Proyecto Participativo de Aula

Los proyectos son herramientas de aprendizaje que tienen la ventaja de motivar el entusiasmo de los estudiantes por la investigación. Este tipo de propuestas permite solucionar situaciones dentro y fuera del aula y al mismo tiempo desarrollar competencias fundamentales y articular conocimientos desde un enfoque multidisciplinar o interdisciplinar.

PROYECTO PARTICIPATIVO DE AULA

SABER HACER

La ciudad que soñamos



¿A qué ciudad aspiramos?

Introducción

La ciudad es el lugar de establecimiento permanente de una gran población y la sede de organizaciones con funciones diversas, en el ámbito de la política y la administración, la producción y distribución de bienes, los servicios y las actividades financieras, el recreo y esparcimiento y las prácticas religiosas.

En tanto que espacio donde grupos humanos se desplazan y realizan sus actividades cotidianas, la ciudad debe reunir y promover un conjunto de condiciones para el desenvolvimiento favorable de la vida. Se debe aspirar a construir una ciudad con facilidades para desplazarnos por ella, ambientalmente sana, segura, organizada y debidamente equipada.

Intención del proyecto

Las ciudades donde vivimos no carecen de problemas. Su rapidez de expansión territorial y su crecimiento poblacional superan, en muchos casos, la capacidad de respuesta de los organismos oficiales y privados encargados del planeamiento, la oferta eficiente de servicios y el ornato.

En el presente proyecto los estudiantes tendrán oportunidad, junto a profesores, familiares y vecinos, de concebir y ofrecer ideas para mejorar la ciudad en que viven; ideas para una ciudad agradable, segura y que garantice la movilidad de sus pobladores. Es un proyecto en el que confluyen las Ciencias Sociales, la Matemática y el arte.

Las ideas para una mejor ciudad serán plasmadas en el diseño y la construcción de la maqueta de algún espacio comunitario o área de la ciudad que consideren.

¿Cómo iniciar nuestro proyecto?

- Recogiendo información acerca de qué es una ciudad habitable y cuáles soluciones se han dado a problemas similares a los nuestros.
- Consultando a compañeros, familiares, vecinos y urbanistas sobre aspectos de su ciudad que desearían cambiar para mejorarla.
- Haciendo un listado de los aspectos identificados, ordenándolos según su prioridad y evaluando sus posibilidades de solución.
- Discutiendo ideas y llegando a conclusiones abiertas y flexibles que actuarán como guías para la construcción de la maqueta, que será el elemento tangible del modelo de ciudad a que aspiramos.

92

 93

Los proyectos en los libros para el Segundo Ciclo de la Secundaria tienen un enfoque de investigación-acción.

Ventajas de los proyectos:

- Se integran los contenidos programados.
- Son una herramienta de apoyo en el desarrollo de las habilidades prácticas.
- Se desarrollan los contenidos de acuerdo con la temática escogida para el proyecto.
- Los estudiantes construyen textos a partir del conocimiento adquirido.
- Los proyectos funcionan como acción integradora de la comunidad escolar.

Competencias laborales y profesionales

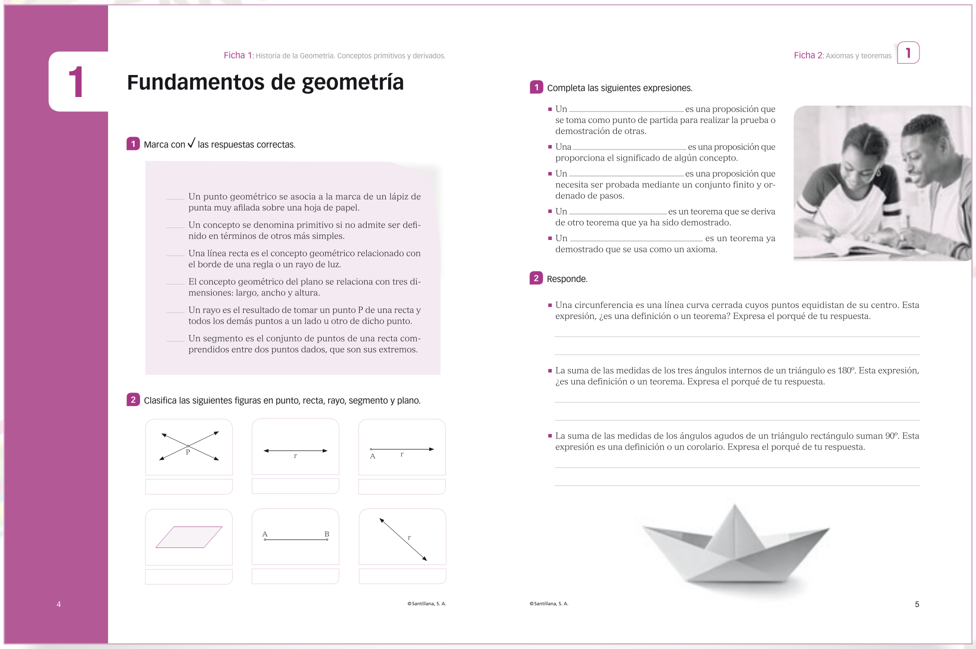
Las profesiones. Se presentan y describen profesiones que hacen uso de los contenidos estudiados en la unidad.

Texto

El Cuaderno de actividades

El *Cuaderno de actividades* se compone de fichas con actividades de refuerzo, de ampliación y de experiencias que enriquecen el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Páginas de actividades de refuerzo



Más actividades para reforzar los conceptos y conocimientos estudiados.

Esquemas y organizadores gráficos para que los estudiantes los rotulen con conceptos clave y clasifiquen información.

Actividades para ampliar los conocimientos estudiados.

La Guía de recursos didácticos

Valioso instrumento de apoyo al trabajo pedagógico con una gran cantidad de recursos y sugerencias.

Páginas de programación de la unidad didáctica

1 **Propuesta de programación**. Malla curricular de las competencias, contenidos e indicadores de logro que se trabajarán en la unidad.

2 **Competencias específicas** del área, que se desarrollarán a través de los contenidos.

3 **Competencias fundamentales** que se desarrollarán en la unidad.

4 **Contenidos:**

- Conceptos.
- Procedimientos.
- Actitudes y valores.

5 **Tiempo** estimado de trabajo con la unidad.

6 **Indicadores de logro**

Aspectos observables y medibles que se espera que los estudiantes alcancen en relación con el nivel de dominio de las competencias específicas y fundamentales, como resultado de las estrategias y actividades que se lleven a cabo durante el trabajo con la unidad.

7 Valor transversal

1 Fundamentos de Geometría

1 Propuesta de programación

COMPETENCIAS	CONTENIDOS 4
2 **Específicas** • **Razona y argumenta**: **Identifica** las posibles razones de un problema de la comunidad y **busca** justificaciones al mismo, apoyándose en los elementos básicos de la Geometría. • **Comunica**: **Lee** e **interpreta** gráficos y figuras geométricas planas en las que intervienen el punto, la recta, el segmento, rayo o semirrecta. • **Modela y representa**: **Representa** una situación determinada de la vida diaria a través de los elementos básicos de la Geometría plana. • **Usa algoritmos**: **Sigue** las reglas que le permiten obtener un resultado al resolver problemas en los que intervienen elementos básicos de la Geometría. • **Conecta**: **Emplea** los elementos básicos de la Geometría plana y **los relaciona** con una situación o problema de su contexto. • **Resuelve problemas**: **Resuelve** problemas del contexto de la vida cotidiana en que se desenvuelve, utilizando los elementos básicos de la Geometría. • **Utiliza herramientas tecnológicas**: **Utiliza** soportes tecnológicos como la Internet, la calculadora científica y otros dispositivos. 3 **Fundamentales** **Resolución de problemas**: **Identifica** y **utiliza** estrategias, y **genera** alternativas de solución.	**Conceptos** • Historia de la Geometría. • Axiomas y teoremas. • El razonamiento deductivo en Geometría. • Segmentos proporcionales. • Semejanza y congruencia de figuras. **Procedimientos** • Identificación de momentos importantes del desarrollo histórico de la Geometría. • Reconocimiento del papel de los axiomas, las definiciones y los teoremas de la Geometría. • Identificación de las partes de un teorema, su significado y la función que desempeña cada una. • Identificación y construcción de segmentos de longitud dada. • Identificación y construcción de figuras semejantes y de figuras congruentes. **Actitudes y valores** • Valoración del uso de la Geometría en el conocimiento del entorno. • Apreciación del papel de la Geometría en el desarrollo de la tecnología.

5 **Tiempo estimado de trabajo:** 2 semanas

6 A

6 INDICADORES DE LOGRO

- **Identifica** y **expone** momentos importantes del desarrollo histórico de la Geometría.
- **Reconoce** conceptos primitivos y derivados de la Geometría.
- **Reconoce** los conceptos de *punto*, *recta*, *plano*, *rayo* y *segmento*.
- **Reconoce** los conceptos de axioma o postulado, definición y teorema.
- **Reconoce** y **distingue** el papel de los axiomas, las definiciones y los teoremas en la Geometría.
- **Identifica** las partes de un teorema, su significado y la función que desempeña cada una de sus partes.
- **Identifica** y **construye** segmentos de longitud dada.
- **Reconoce** la congruencia de dos segmentos.
- **Identifica** y **construye** figuras semejantes y congruentes.
- **Resuelve** problemas del contexto que involucran elementos básicos de la Geometría.
- **Utiliza** recursos virtuales y electrónicos: computadora, programas educativos, juegos interactivos y otros, en la búsqueda de información.

Valor transversal: Ciencia y tecnología 7

Recursos digitales 8

Plataforma digital CD

BIBLIOTECA DEL DOCENTE
- DOCUMENTOS PARA LA PLANIFICACIÓN
- EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA
- GUÍA DE RECURSOS TIC

CUADERNO DE ACTIVIDADES

UNIDAD 1	Fundamentos de Geometría

RECURSOS DE REFUERZO Y AMPLIACIÓN

LibroMedia

ACTIVIDADES INTERACTIVAS

PÁGINA 7	Figuras semejantes
PÁGINA 8	Rectas y planos en el espacio
PÁGINA 16	Homotecia y semejanza

CD DE RECURSOS DIGITALES: PLAN REGULAR

Pleno PRUEBA DE EVALUACIÓN FORMATIVA DE LA UNIDAD

Estrategias pedagógicas 9

- Recuperación de experiencias previas.
- Trabajo en equipo.
- Aprendizaje basado en problemas (ABP).

6 B

8 **Recursos digitales**. Referencia de los diferentes materiales que complementan cada unidad.

e-stela

Plataforma digital del proyecto Santillana Compartir.

Lugar virtual donde se colocan todos los contenidos que se incluyen en dicho proyecto.

Biblioteca del docente. Carpeta presente, tanto en la plataforma digital como en el CD, con recursos para el docente: documentos de ayuda para la planificación de las clases, pruebas y otros documentos.

Cuaderno de actividades que refuerzan y amplían los temas del libro.

Recursos de refuerzo y ampliación. Carpeta colocada en la plataforma, con recursos digitales adicionales a los que están vinculados al Libromedia, y que dan apoyo a diferentes temas.

LibroMedia. Aplicación que consiste en una versión digital del libro con recursos TIC vinculados. Se accede a dicho recurso desde la plataforma digital Santillana Compartir.

Pleno Ambiente digital de evaluación como aprendizaje.

CD de recursos digitales que apoyan la oferta del plan regular de Santillana.

9 Estrategias de enseñanza-aprendizaje y de evaluación de la aplicación más destacada en la unidad.

La Guía de recursos didácticos

Páginas de apertura

1 **Competencias**. Las cuales se desarrollarán a través del trabajo con la unidad y que evidencian la intención pedagógica de la misma.

2 **Apertura de la unidad**. Justificación y planteamiento de objetivos de la unidad. Descripción de la situación que sirve como punto de partida al tema de la unidad.

3 **Trabajo colectivo de la apertura**. Sugerencias didácticas para el desarrollo de las actividades de motivación y exploración, y para la revisión conjunta de los elementos de la apertura de la unidad.

1 Unidad 1

Competencias de la unidad

- **Lee** y **comenta** las informaciones expuestas en el apartado *Punto de partida.*
- **Responde** preguntas relacionadas con las informaciones expuestas en el apartado *Punto de partida.*
- **Recupera** experiencias vividas mediante la observación de las imágenes de la ilustración.
- **Analiza** un problema de la vida cotidiana vinculado a los conceptos y procedimientos que desarrollarán en la unidad en el apartado *Analiza el problema.*
- **Plantea** soluciones al problema leído y analizado anteriormente, en el apartado *Plantea una solución.*

2 Apertura de la unidad

Dentro de los objetivos principales de la apertura de esta unidad se encuentran, en primer lugar, conocer los conceptos, los procedimientos y las actitudes y valores desarrollados en la misma y, en segundo lugar, el plantear una situación de aprendizaje, una problemática o un texto que sirve para contextualizar el tema de la unidad. Todo esto con la finalidad de motivar y despertar la curiosidad de los estudiantes.

A partir de la situación o texto planteado, el problema a analizar y las imágenes de la ilustración se conecta al estudiante con el tema a tratar, a la vez que vincula con la realidad o cotidianidad los temas que se van a desarrollar.

Todos los elementos que conforman la portada promueven la recuperación de experiencias o conocimientos previos y la motivación o el interés por los conocimientos que adquirirán en la unidad.

6

1 Fundamentos de Geometría

Conceptos

- Historia de la Geometría.
- Axiomas y teoremas.
- El razonamiento deductivo en Geometría.
- Segmentos proporcionales.
- Semejanza y congruencia de figuras.

Procedimientos

- Investigación de los orígenes históricos de la Geometría.
- Construcción de elementos básicos de la Geometría.

Actitudes y valores

- Valoración del uso de la Geometría en el conocimiento del entorno.
- Aprecio por el papel de la geometría en el desarrollo de la tecnología.

Punto de partida

El resultado de dividir la longitud de la diagonal de un cuadrado por la longitud de sus lados proporciona un valor fijo. La suma de las longitudes de dos lados de un triángulo siempre es mayor que la longitud del tercer lado. El día y la noche se suceden con regularidad. Las estrellas se mueven siguiendo trayectorias que, vistas desde la Tierra, parecen ser circunferencias perfectas.

El mundo que nos rodea está construido de tal modo que entre las cosas y los acontecimientos se establecen relaciones constantes que permiten la obtención de nuevos conocimientos y hacer predicciones exitosas. Esto fue comprendido por quienes se dedicaron a la observación de los fenómenos y a la búsqueda de leyes naturales.

La Geometría se ocupa de estudiar las relaciones fijas entre elementos de una figura o un cuerpo. Si bien los primeros geómetras se limitaron a utilizar con fines prácticos estas relaciones, sus sucesores buscaron procedimientos para probarlas de manera incontrovertible.

- ¿Qué relaciones fijas entre objetos o acontecimientos identificas en tu entorno? **Menciona** tres relaciones.

ANALIZA EL PROBLEMA

Se está diseñando un aparato óptico de alta precisión. Los diseñadores procuran dotarlo de una base con patas que garantice que el aparato no sufra deslizamientos o movimientos de vaivén que pudieran afectar los resultados de las observaciones que se harán con él.

Unos hablan de dotar a la base de cuatro patas fuertes y suficientemente fijas al dispositivo óptico de alta precisión. Otros creen que el número de patas del aparato debe ser tres, ya que con ello se minimizaría el riesgo de que sufra oscilaciones al manejarlo.

6

Trabajo colectivo de apertura 3

- **Punto de partida:** Guíe a sus estudiantes a leer y comentar las informaciones expuestas en el apartado *Punto de partida*, que trata sobre las relaciones constantes entre acontecimientos naturales y cotidianos que permiten obtener nuevos conocimientos y establecer predicciones.
- **Analiza el problema:** Se plantea cuál será la base más conveniente para el diseño de un aparato óptico de gran precisión. Este debe ser diseñado con un número de patas que garanticen su estabilidad y que no afecten los resultados de las observaciones.
- **Plantea una solución:** Responderán cuál de las propuestas al problema planteado sería la más razonable y justificarán geométricamente sus argumentos.

PLANTEA UNA SOLUCIÓN

- Responde las preguntas.
  - Si fueras uno de los diseñadores del aparato, ¿cuál de las propuestas te parecería más razonable?
  - ¿Tienes alguna solución mejor para el problema de los diseñadores del aparato? ¿Cuál es?
  - ¿Por qué consideras que tu solución es la mejor?
  - Si tuvieras que justificar la propuesta de las tres patas, ¿qué argumentos extraídos de la Geometría utilizarías?

4 Esquema conceptual de la unidad

Fundamentos de la Geometría

La Geometría es una disciplina que involucra

- Conceptos primitivos y derivados
  - Axiomas
  - Teoremas
  - Demostraciones
- *Conceptos básicos como*
  - Segmentos y figuras
    - *que presentan*
      - Congruencias
      - Semejanzas

Actividad de motivación 5

Pida a sus estudiantes que lean en la sección: *Conceptos y procedimientos*, los temas que trabajarán en la unidad y las actitudes y valores que estarán presentes en el desarrollo de la misma. Luego, para que interioricen la importancia de conocer los conceptos básicos de la Geometría y sus orígenes históricos, es conveniente preguntar al grupo: *¿Qué papel jugó la Geometría en las construcciones antiguas como las pirámides de Egipto y la Gran Muralla China? ¿Qué presencia tiene la Geometría en las construcciones modernas? ¿Podrían mencionar elementos de la naturaleza en los que se manifiesten expresiones geométricas?*

Actividad interactiva

Figuras semejantes

Actividad interactiva de recuperación de experiencias, en la que seleccionarán, en un conjunto de figuras, las que son semejantes a la figura dada.

Actitudes y valores 6

Ciencia y tecnología

Aproveche la situación planteada en el apartado *Punto de partida* y en las imágenes de la ilustración para conversar con sus estudiantes acerca de la importancia de la Geometría en el desarrollo de la tecnología y el conocimiento del entorno. Haga que el grupo investigue: *¿Qué relación existe entre la sombra que proyecta un poste de luz y los rayos del Sol?* Discuta el resultado de la investigación con el grupo.

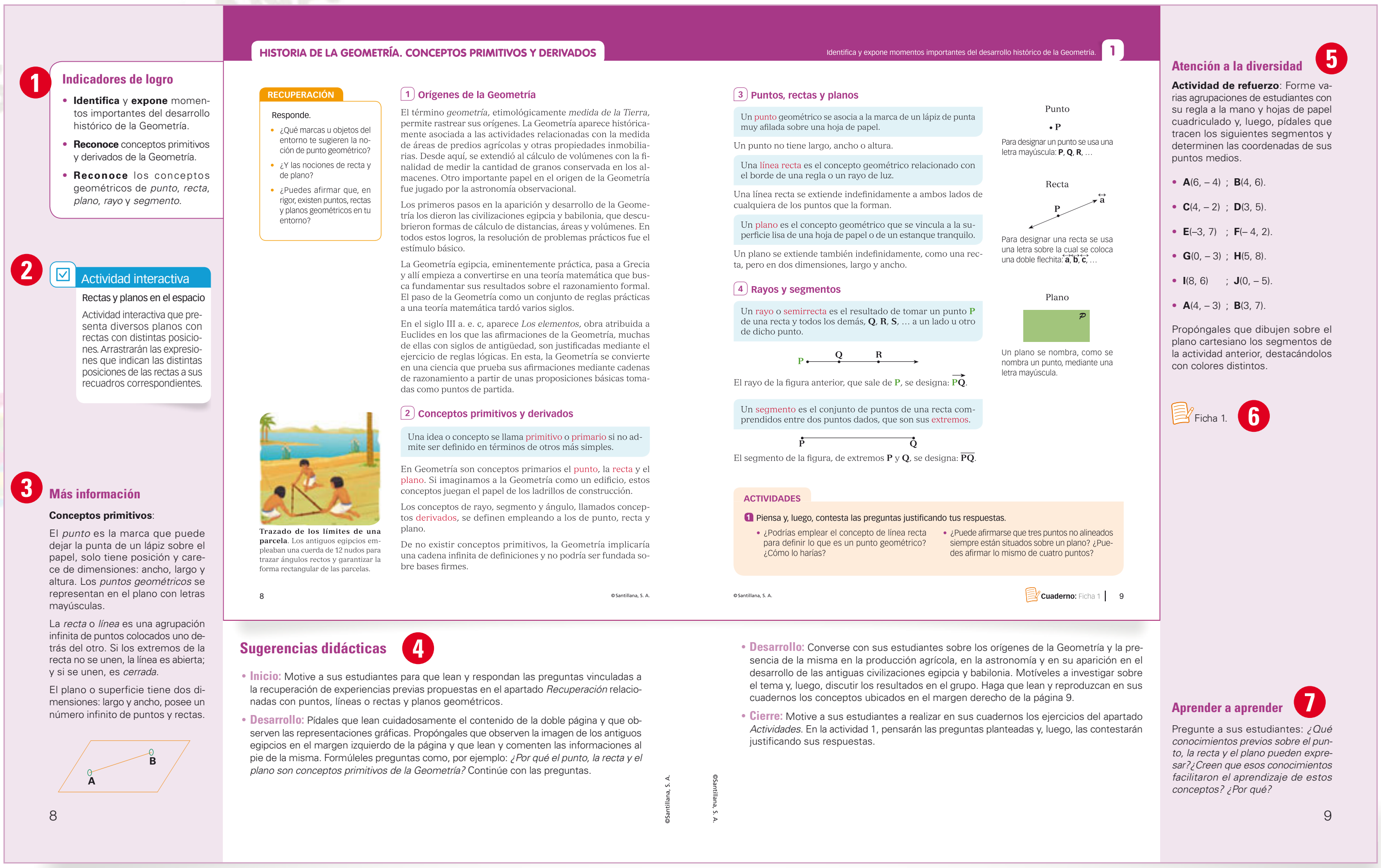
4 Esquema conceptual de la unidad. Mapa conceptual que presenta los conceptos principales que se desarrollarán en la unidad, y la relación que existe entre dichos conceptos.

5 Actividades de motivación. Sugerencias para identificar conocimientos previos y motivar el estudio del tema, despertando el interés de los estudiantes.

6 Actitudes y valores. Propuestas de actividades que promueven el desarrollo de valores y actitudes que aportan al logro de mejores seres humanos para un mundo mejor.

La Guía de recursos didácticos

Páginas de información y actividades



1 Indicadores de logro

- **Identifica** y **expone** momentos importantes del desarrollo histórico de la Geometría.
- **Reconoce** conceptos primitivos y derivados de la Geometría.
- **Reconoce** los conceptos geométricos de *punto*, *recta*, *plano*, *rayo* y *segmento*.

2 Actividad interactiva

Rectas y planos en el espacio

Actividad interactiva que presenta diversos planos con rectas con distintas posiciones. Arrastrarán las expresiones que indican las distintas posiciones de las rectas a sus recuadros correspondientes.

3 Más información

Conceptos primitivos:

El *punto* es la marca que puede dejar la punta de un lápiz sobre el papel, solo tiene posición y carece de dimensiones: ancho, largo y altura. Los *puntos geométricos* se representan en el plano con letras mayúsculas.

La *recta* o *línea* es una agrupación infinita de puntos colocados uno detrás del otro. Si los extremos de la recta no se unen, la línea es abierta; y si se unen, es *cerrada*.

El plano o superficie tiene dos dimensiones: largo y ancho, posee un número infinito de puntos y rectas.

8

HISTORIA DE LA GEOMETRÍA. CONCEPTOS PRIMITIVOS Y DERIVADOS

Identifica y expone momentos importantes del desarrollo histórico de la Geometría. 1

RECUPERACIÓN

Responde.

- ¿Qué marcas u objetos del entorno te sugieren la noción de punto geométrico?
- ¿Y las nociones de recta y de plano?
- ¿Puedes afirmar que, en rigor, existen puntos, rectas y planos geométricos en tu entorno?

1 Orígenes de la Geometría

El término *geometría*, etimológicamente *medida de la Tierra*, permite rastrear sus orígenes. La Geometría aparece históricamente asociada a las actividades relacionadas con la medida de áreas de predios agrícolas y otras propiedades inmobiliarias. Desde aquí, se extendió al cálculo de volúmenes con la finalidad de medir la cantidad de granos conservada en los almacenes. Otro importante papel en el origen de la Geometría fue jugado por la astronomía observacional.

Los primeros pasos en la aparición y desarrollo de la Geometría los dieron las civilizaciones egipcia y babilonia, que descubrieron formas de cálculo de distancias, áreas y volúmenes. En todos estos logros, la resolución de problemas prácticos fue el estímulo básico.

La Geometría egipcia, eminentemente práctica, pasa a Grecia y allí empieza a convertirse en una teoría matemática que busca fundamentar sus resultados sobre el razonamiento formal. El paso de la Geometría como un conjunto de reglas prácticas a una teoría matemática tardó varios siglos.

En el siglo III a. e. c, aparece *Los elementos*, obra atribuida a Euclides en los que las afirmaciones de la Geometría, muchas de ellas con siglos de antigüedad, son justificadas mediante el ejercicio de reglas lógicas. En esta, la Geometría se convierte en una ciencia que prueba sus afirmaciones mediante cadenas de razonamiento a partir de unas proposiciones básicas tomadas como puntos de partida.

Trazado de los límites de una parcela. Los antiguos egipcios empleaban una cuerda de 12 nudos para trazar ángulos rectos y garantizar la forma rectangular de las parcelas.

2 Conceptos primitivos y derivados

Una idea o concepto se llama primitivo o primario si no admite ser definido en términos de otros más simples.

En Geometría son conceptos primarios el punto, la recta y el plano. Si imaginamos a la Geometría como un edificio, estos conceptos juegan el papel de los ladrillos de construcción.

Los conceptos de rayo, segmento y ángulo, llamados conceptos derivados, se definen empleando a los de punto, recta y plano.

De no existir conceptos primitivos, la Geometría implicaría una cadena infinita de definiciones y no podría ser fundada sobre bases firmes.

8 ©Santillana, S. A.

3 Puntos, rectas y planos

Un punto geométrico se asocia a la marca de un lápiz de punta muy afilada sobre una hoja de papel.

Un punto no tiene largo, ancho o altura.

Una línea recta es el concepto geométrico relacionado con el borde de una regla o un rayo de luz.

Una línea recta se extiende indefinidamente a ambos lados de cualquiera de los puntos que la forman.

Un plano es el concepto geométrico que se vincula a la superficie lisa de una hoja de papel o de un estanque tranquilo.

Un plano se extiende también indefinidamente, como una recta, pero en dos dimensiones, largo y ancho.

Punto

• P

Para designar un punto se usa una letra mayúscula: **P**, **Q**, **R**, …

Recta

P $\overleftrightarrow{a}$

Para designar una recta se usa una letra sobre la cual se coloca una doble flechita: $\overleftrightarrow{a}$, $\overleftrightarrow{b}$, $\overleftrightarrow{c}$, …

Plano

P

Un plano se nombra, como se nombra un punto, mediante una letra mayúscula.

4 Rayos y segmentos

Un rayo o semirrecta es el resultado de tomar un punto **P** de una recta y todos los demás, **Q**, **R**, **S**, … a un lado u otro de dicho punto.

P Q R

El rayo de la figura anterior, que sale de **P**, se designa: $\overrightarrow{PQ}$.

Un segmento es el conjunto de puntos de una recta comprendidos entre dos puntos dados, que son sus extremos.

P Q

El segmento de la figura, de extremos **P** y **Q**, se designa: $\overline{PQ}$.

ACTIVIDADES

1 Piensa y, luego, contesta las preguntas justificando tus respuestas.

- ¿Podrías emplear el concepto de línea recta para definir lo que es un punto geométrico? ¿Cómo lo harías?
- ¿Puede afirmarse que tres puntos no alineados siempre están situados sobre un plano? ¿Puedes afirmar lo mismo de cuatro puntos?

©Santillana, S. A. Cuaderno: Ficha 1 | 9

5 Atención a la diversidad

Actividad de refuerzo: Forme varias agrupaciones de estudiantes con su regla a la mano y hojas de papel cuadriculado y, luego, pídales que tracen los siguientes segmentos y determinen las coordenadas de sus puntos medios.

- **A**(6, – 4) ; **B**(4, 6).
- **C**(4, – 2) ; **D**(3, 5).
- **E**(–3, 7) ; **F**(– 4, 2).
- **G**(0, – 3) ; **H**(5, 8).
- **I**(8, 6) ; **J**(0, – 5).
- **A**(4, – 3) ; **B**(3, 7).

Propóngales que dibujen sobre el plano cartesiano los segmentos de la actividad anterior, destacándolos con colores distintos.

Ficha 1. 6

4 Sugerencias didácticas

- **Inicio:** Motive a sus estudiantes para que lean y respondan las preguntas vinculadas a la recuperación de experiencias previas propuestas en el apartado *Recuperación* relacionadas con puntos, líneas o rectas y planos geométricos.
- **Desarrollo:** Pídales que lean cuidadosamente el contenido de la doble página y que observen las representaciones gráficas. Propóngales que observen la imagen de los antiguos egipcios en el margen izquierdo de la página y que lean y comenten las informaciones al pie de la misma. Formúleles preguntas como, por ejemplo: *¿Por qué el punto, la recta y el plano son conceptos primitivos de la Geometría?* Continúe con las preguntas.
- **Desarrollo:** Converse con sus estudiantes sobre los orígenes de la Geometría y la presencia de la misma en la producción agrícola, en la astronomía y en su aparición en el desarrollo de las antiguas civilizaciones egipcia y babilonia. Motíveles a investigar sobre el tema y, luego, discutir los resultados en el grupo. Haga que lean y reproduzcan en sus cuadernos los conceptos ubicados en el margen derecho de la página 9.
- **Cierre:** Motive a sus estudiantes a realizar en sus cuadernos los ejercicios del apartado *Actividades*. En la actividad 1, pensarán las preguntas planteadas y, luego, las contestarán justificando sus respuestas.

©Santillana, S. A. ©Santillana, S. A.

7 Aprender a aprender

Pregunte a sus estudiantes: *¿Qué conocimientos previos sobre el punto, la recta y el plano pueden expresar?¿Creen que esos conocimientos facilitaron el aprendizaje de estos conceptos? ¿Por qué?*

9

1 **Indicadores de logro** que corresponden a cada sesión de aprendizaje o plan de clase.

2 **Referencia al recurso digital.** Descripción y propósito del recurso acompañado de una actividad.

3 **Más información.** Informaciones de importancia que complementan los conceptos desarrollados en la doble página de contenido del libro.

4 **Sugerencias didácticas**

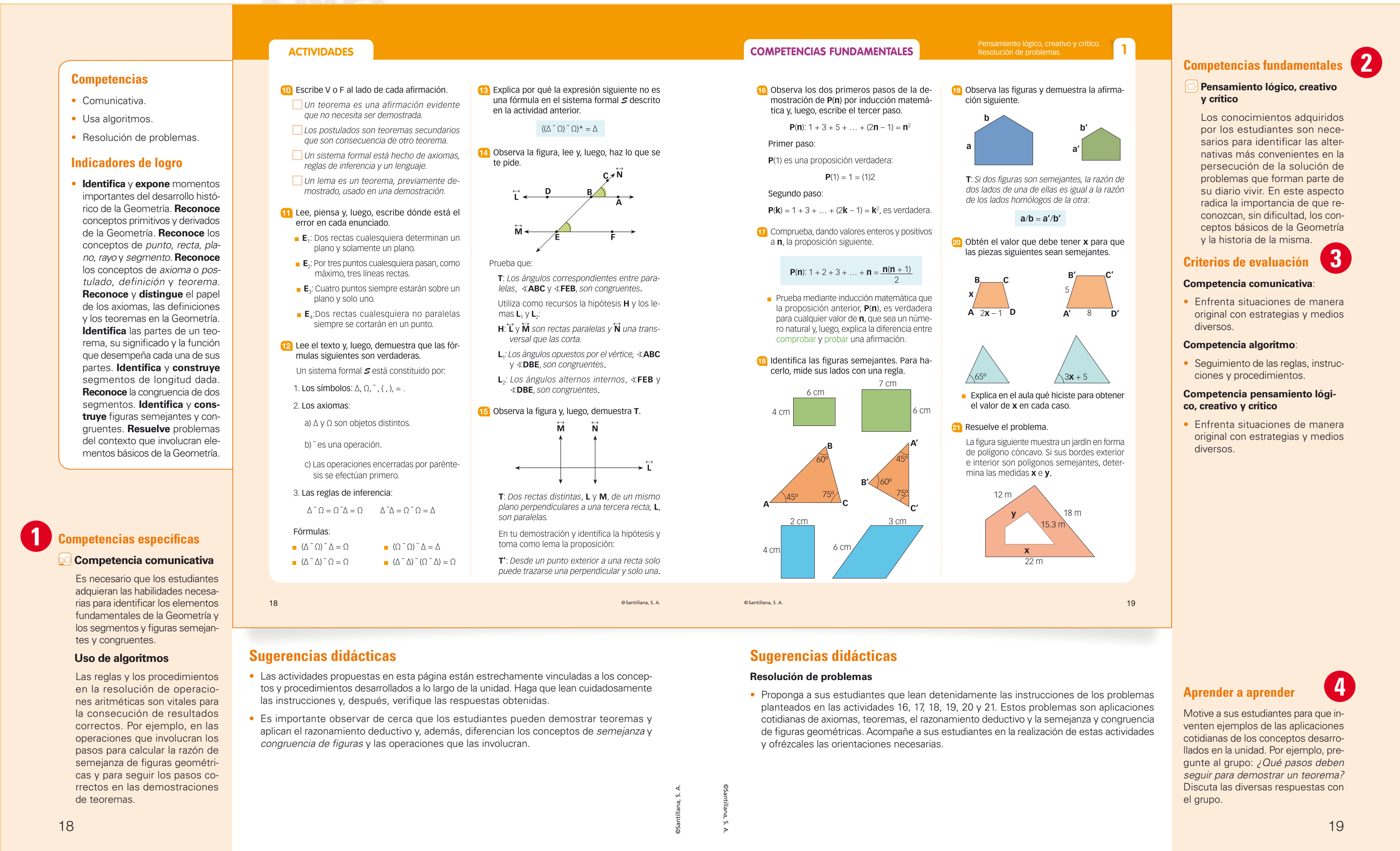
- Para iniciar el tema y activar conocimientos previos.
- Para desarrollar o construir los aprendizajes.
- Para cerrar, evaluar y reforzar el logro de los indicadores.

5 **Atención a la diversidad**. Actividades de refuerzo y ampliación basadas en algunos de los temas más importantes tratados en la unidad, y tomando en cuenta los distintos estilos de aprendizaje o maneras de aprender, que pueden tener los diferentes estudiantes de una clase.

6 **Referencia didáctica al Cuaderno de actividades** para reforzar y ampliar el aprendizaje adquirido.

7 **Aprender a aprender**. Presentación de preguntas de reflexión sobre el aprendizaje y estrategias para el aprendizaje cooperativo y autónomo.

Páginas de desarrollo de competencias fundamentales



Competencias

- Comunicativa.
- Usa algoritmos.
- Resolución de problemas.

Indicadores de logro

- **Identifica** y **expone** momentos importantes del desarrollo histórico de la Geometría. **Reconoce** conceptos primitivos y derivados de la Geometría. **Reconoce** los conceptos de *punto*, *recta*, *plano*, *rayo* y *segmento*. **Reconoce** los conceptos de *axioma* o *postulado*, *definición* y *teorema*. **Reconoce** y **distingue** el papel de los axiomas, las definiciones y los teoremas en la Geometría. **Identifica** las partes de un teorema, su significado y la función que desempeña cada una de sus partes. **Identifica** y **construye** segmentos de longitud dada. **Reconoce** la congruencia de dos segmentos. **Identifica** y **construye** figuras semejantes y congruentes. **Resuelve** problemas del contexto que involucran elementos básicos de la Geometría.

1 **Competencias específicas**

Competencia comunicativa

Es necesario que los estudiantes adquieran las habilidades necesarias para identificar los elementos fundamentales de la Geometría y los segmentos y figuras semejantes y congruentes.

Uso de algoritmos

Las reglas y los procedimientos en la resolución de operaciones aritméticas son vitales para la consecución de resultados correctos. Por ejemplo, en las operaciones que involucran los pasos para calcular la razón de semejanza de figuras geométricas y para seguir los pasos correctos en las demostraciones de teoremas.

18

ACTIVIDADES

10 Escribe V o F al lado de cada afirmación.

- *Un teorema es una afirmación evidente que no necesita ser demostrada.*
- *Los postulados son teoremas secundarios que son consecuencia de otro teorema.*
- *Un sistema formal está hecho de axiomas, reglas de inferencia y un lenguaje.*
- *Un lema es un teorema, previamente demostrado, usado en una demostración.*

11 Lee, piensa y, luego, escribe dónde está el error en cada enunciado.

- E_1: Dos rectas cualesquiera determinan un plano y solamente un plano.
- E_2: Por tres puntos cualesquiera pasan, como máximo, tres líneas rectas.
- E_3: Cuatro puntos siempre estarán sobre un plano y solo uno.
- E_4: Dos rectas cualesquiera no paralelas siempre se cortarán en un punto.

12 Lee el texto y, luego, demuestra que las fórmulas siguientes son verdaderas.

Un sistema formal *S* está constituido por:

1. Los símbolos: Δ, Ω, ˜ , (,), = .
2. Los axiomas:
   a) Δ y Ω son objetos distintos.
   b) ˜ es una operación.
   c) Las operaciones encerradas por paréntesis se efectúan primero.
3. Las reglas de inferencia:

Δ ˜ Ω = Ω ˜ Δ = Ω   Δ ˜ Δ = Ω ˜ Ω = Δ

Fórmulas:

- (Δ ˜ Ω) ˜ Δ = Ω
- (Ω ˜ Ω) ˜ Δ = Δ
- (Δ ˜ Δ) ˜ Ω = Ω
- (Δ ˜ Δ) ˜ (Ω ˜ Δ) = Ω

13 Explica por qué la expresión siguiente no es una fórmula en el sistema formal *S* descrito en la actividad anterior.

((Δ ˜ Ω) ˜ Ω)* = Δ

14 Observa la figura, lee y, luego, haz lo que se te pide.

Prueba que:

T: *Los ángulos correspondientes entre paralelas, ∢**ABC** y ∢**FEB**, son congruentes.*

Utiliza como recursos la hipótesis **H** y los lemas $\mathbf{L}_1$ y $\mathbf{L}_2$:

H: $\overleftrightarrow{L}$ y $\overleftrightarrow{M}$ *son rectas paralelas y* $\overleftrightarrow{N}$ *una transversal que las corta.*

$\mathbf{L}_1$: *Los ángulos opuestos por el vértice, ∢**ABC** y ∢**DBE**, son congruentes.*

$\mathbf{L}_2$: *Los ángulos alternos internos, ∢**FEB** y ∢**DBE**, son congruentes.*

15 Observa la figura y, luego, demuestra **T**.

T: *Dos rectas distintas,* **L** y **M**, *de un mismo plano perpendiculares a una tercera recta,* **L**, *son paralelas.*

En tu demostración y identifica la hipótesis y toma como lema la proposición:

T': *Desde un punto exterior a una recta solo puede trazarse una perpendicular y solo una.*

18 ©Santillana, S. A.

COMPETENCIAS FUNDAMENTALES Pensamiento lógico, creativo y crítico. Resolución de problemas. 1

16 Observa los dos primeros pasos de la demostración de **P**(**n**) por inducción matemática y, luego, escribe el tercer paso.

$P(n): 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$

Primer paso:

P(1) es una proposición verdadera:

$P(1) = 1 = (1)2$

Segundo paso:

$P(k) = 1 + 3 + \dots + (2k - 1) = k^2$, es verdadera.

17 Comprueba, dando valores enteros y positivos a **n**, la proposición siguiente.

$$P(n): 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

- Prueba mediante inducción matemática que la proposición anterior, **P**(**n**), es verdadera para cualquier valor de **n**, que sea un número natural y, luego, explica la diferencia entre comprobar y probar una afirmación.

18 Identifica las figuras semejantes. Para hacerlo, mide sus lados con una regla.

19 Observa las figuras y demuestra la afirmación siguiente.

T: *Si dos figuras son semejantes, la razón de dos lados de una de ellas es igual a la razón de los lados homólogos de la otra*:

$a/b = a'/b'$

20 Obtén el valor que debe tener **x** para que las piezas siguientes sean semejantes.

- Explica en el aula qué hiciste para obtener el valor de **x** en cada caso.

21 Resuelve el problema.

La figura siguiente muestra un jardín en forma de polígono cóncavo. Si sus bordes exterior e interior son polígonos semejantes, determina las medidas **x** e **y**.

©Santillana, S. A. 19

2 **Competencias fundamentales**

Pensamiento lógico, creativo y crítico

Los conocimientos adquiridos por los estudiantes son necesarios para identificar las alternativas más convenientes en la persecución de la solución de problemas que forman parte de su diario vivir. En este aspecto radica la importancia de que reconozcan, sin dificultad, los conceptos básicos de la Geometría y la historia de la misma.

3 **Criterios de evaluación**

Competencia comunicativa:

- Enfrenta situaciones de manera original con estrategias y medios diversos.

Competencia algoritmo:

- Seguimiento de las reglas, instrucciones y procedimientos.

Competencia pensamiento lógico, creativo y crítico

- Enfrenta situaciones de manera original con estrategias y medios diversos.

Sugerencias didácticas

- Las actividades propuestas en esta página están estrechamente vinculadas a los conceptos y procedimientos desarrollados a lo largo de la unidad. Haga que lean cuidadosamente las instrucciones y, después, verifique las respuestas obtenidas.
- Es importante observar de cerca que los estudiantes pueden demostrar teoremas y aplican el razonamiento deductivo y, además, diferencian los conceptos de *semejanza* y *congruencia de figuras* y las operaciones que las involucran.

Sugerencias didácticas

Resolución de problemas

- Proponga a sus estudiantes que lean detenidamente las instrucciones de los problemas planteados en las actividades 16, 17, 18, 19, 20 y 21. Estos problemas son aplicaciones cotidianas de axiomas, teoremas, el razonamiento deductivo y la semejanza y congruencia de figuras geométricas. Acompañe a sus estudiantes en la realización de estas actividades y ofrézcales las orientaciones necesarias.

©Santillana, S. A. ©Santillana, S. A.

4 **Aprender a aprender**

Motive a sus estudiantes para que inventen ejemplos de las aplicaciones cotidianas de los conceptos desarrollados en la unidad. Por ejemplo, pregunte al grupo: *¿Qué pasos deben seguir para demostrar un teorema?* Discuta las diversas respuestas con el grupo.

19

1. **Competencias específicas**. Actividades para desarrollar competencias matemáticas que forman parte de los componentes del nuevo diseño curricular dado por el Ministerio de Educación de la República Dominicana. Estas actividades que promueven la interdisciplanaridad.
2. **Competencias fundamentales**. Actividades donde los estudiantes pondrán de manifiesto su dominio de competencias fundamentales.
3. **Criterios de evaluación**. Orientan el desarrollo de las competencias fundamentales trabajadas, las cuales se basan en las actividades que se proponen en esta doble página.
4. **Aprender a aprender**. Presentación de preguntas de reflexión sobre el aprendizaje y estrategias para el aprendizaje cooperativo y autónomo.

La **Guía** de recursos didácticos

Páginas de evaluación

Vinculación de las actividades de evaluación con los indicadores de la unidad formulados en las páginas de apertura y con los datos del currículo para la materia y el tema.

Indicadores de logro de la evaluación

- **Identifica** y **expone** momentos importantes del desarrollo histórico de la Geometría. **Reconoce** conceptos primitivos y derivados de la Geometría. **Reconoce** los conceptos de *punto, recta, plano, rayo* y *segmento*. **Reconoce** los conceptos de *axioma* o *postulado, definición* y *teorema*. **Reconoce** y **distingue** el papel de los axiomas, las definiciones y los teoremas en la Geometría. **Identifica** las partes de un teorema, su significado y la función que desempeña en cada una de sus partes. **Identifica** y **construye** segmentos de longitud dada. **Reconoce** la congruencia de dos segmentos. **Identifica** y **construye** figuras semejantes y congruentes. **Resuelve** problemas del contexto que involucran elementos básicos de la Geometría. **Utiliza** recursos virtuales y electrónicos: computadora, programas educativos, juegos interactivos y otros, en la búsqueda de información.

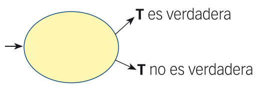
EVALUACIÓN

Comunica

22 Describe cada uno de los elementos presentes en la prueba de un teorema.

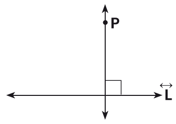
Razona y argumenta

23 Observa el esquema, piensa y, luego, responde la pregunta.



- Dos proposiciones, **T** y **T'**, tales que una afirme lo contrario de la otra, ¿pueden ser teoremas en el mismo sistema formal S?
- Presenta argumentos que justifiquen la respuesta que diste.

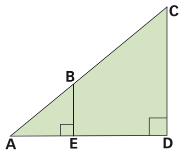
24 Identifica la hipótesis y la tesis en el siguiente teorema.



*Por un punto, **P**, exterior a una recta, **L**, puede trazarse una perpendicular y solamente una a dicha recta.*

Modela y representa

25 Construye dos proporciones con las longitudes de segmentos presentes en la figura siguiente.

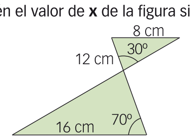


Usa algoritmos

26 Prueba, mediante inducción matemática, que la siguiente proposición es verdadera. NOTA: **n** = 1, 2, 3, …

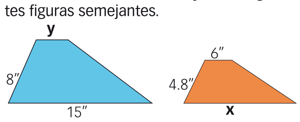
$P(n): 3 + 5 + 7 + \ldots + (2n + 1) = n^2 + 2n$

27 Obtén el valor de **x** de la figura siguiente.

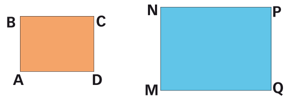


- Describe qué hiciste para calcular **x**.

28 Determina los valores de **x** e **y** en las siguientes figuras semejantes.



29 Averigua, empleando una regla graduada en centímetros, si las figuras **ABCD** y **MNPQ** son semejantes.



Conecta

30 Mide con una reglilla sobre el plano las longitudes de **a**, **b** y **c** y, luego, calcula las dimensiones reales de **a**, **b** y **c**.

20

1 Competencias específicas

- Comunica.
- Razona y argumenta.
- Modela y representa.
- Usa algoritmos.
- Conecta.
- Resuelve problemas.

2 Sugerencias didácticas para la evaluación

- Es importante verificar, antes de dar inicio a las actividades de evaluación, que sus estudiantes conocen los conceptos de *axioma* y *definición* y los pasos para demostrar teoremas. Observe que aplican el razonamiento deductivo y diferencian los conceptos de *congruencia* y *semejanza de figuras.*

Aprender a aprender

Plantear al grupo: *Si tienen que trazar un rectángulo sobre papel cuadriculado para luego trazar otro rectángulo semejante, ¿qué procedimientos deben seguir?*

20

1 **Competencias específicas** desarrolladas en la evaluación.

2 **Sugerencias didácticas** para las actividades de evaluación.

SABER HACER

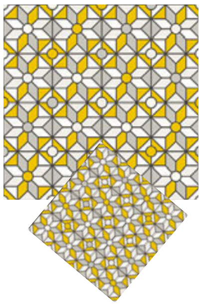
31 Resolución de problemas. Lean y, luego, hagan lo que se pide.

El área **A** de una figura **F** se obtiene multiplicando dos de las longitudes presentes en la figura, $\mathbf{l_1}$ y $\mathbf{l_2}$: $\mathbf{A} = \mathbf{l_1}\,\mathbf{l_2}$.

El área **A'** de una figura **F'**, semejante a la figura **F**, se obtendrá multiplicando las longitudes homólogas, $\mathbf{l_1}'$ y $\mathbf{l_2}'$: $A = \mathbf{l_1}'\,\mathbf{l_2}'$.

- Si **r** es la razón de semejanza de **F** y **F'**: $\mathbf{l_1}' = \mathbf{r}\,\mathbf{l_1}$ y $\mathbf{l_2}' = \mathbf{r}\,\mathbf{l_2}$, determinen la razón de las áreas de dos figuras semejantes.
- Resuelvan el problema.

  El área de una placa de cristal es de 640 $pulg^2$. ¿Cuántas pulgadas cuadradas de cristal se necesitan para construir una placa semejante a la primera con $\mathbf{r} = 2.5$?



32 Responde las preguntas.

- ¿Cómo actúan las situaciones de la vida cotidiana en el origen y el desarrollo de las ideas matemáticas y viceversa?
- ¿En cuáles problemas de la vida cotidiana has aplicado tus conocimientos básicos de Geometría? Muestra tres ejemplos.

APRENDIZAJE AUTÓNOMO

33 Marca según tus logros.

	Iniciado	En proceso	Logrado
Reconozco y expongo momentos históricos de la Geometría.	▢	▢	▢
Identifico axiomas, definiciones y teoremas.	▢	▢	▢
Reconozco las partes de una demostración y sus funciones.	▢	▢	▢
Identifico y construyo segmentos de longitud dada.	▢	▢	▢
Identifico figuras semejantes y congruentes.	▢	▢	▢

34 Reflexiona sobre tu aprendizaje.

- ¿Qué contenidos de la unidad te parecieron más interesantes? ¿Por qué?
- ¿Tuviste dificultades con algunos contenidos? ¿Con cuáles y a qué puedes atribuirlas?

Sugerencias didácticas para la evaluación 7

- Pregunte a sus estudiantes:
  - — *¿Qué estudia la Geometría?*
  - — *¿En cuáles civilizaciones la Geometría dio sus primeros pasos?*
  - — *¿Cuáles son los conceptos primitivos y derivados de la Geometría?*
  - — *¿Qué es un axioma?*
  - — *¿Qué es un teorema?*

Resolución de problemas 3

En la actividad 31, *Saber hacer*, se aplica la estrategia de evaluación *Resolución de problemas*. Leerán cuidadosamente el contenido del texto y, luego, harán lo que se les indica. En este caso, seguirán las instrucciones para obtener el área de las figuras **A** y **A'** para luego obtener la razón de semejanza de las dos figuras. Después, determinarán cuántas pulgadas cuadradas de cristal se necesitan para construir una placa semejante a la primera figura.

Actitudes y valores 4

Ciencia y tecnología

En la sección destinada a *Actitudes y valores*, actividad 32, responderán cómo actúan las situaciones de la vida cotidiana en el origen y desarrollo de las ideas matemáticas, y viceversa. Expresarán en cuáles problemas de la vida cotidiana han aplicado sus conocimientos básicos de Geometría. Mostrarán tres ejemplos.

Aprendizaje autónomo 5

En este apartado, actividad 33, evaluarán por ellos mismos si los conceptos y procedimientos que trabajaron en la unidad se encuentran en estado de iniciación, en proceso o logrado. En la actividad 34, reflexionarán sobre su proceso de aprendizaje.

Aprender a aprender 6

Haga que sus estudiantes apliquen los conceptos aprendidos en la unidad en situaciones de la cotidianidad, por ejemplo, preguntar: *¿Qué pasos deben seguir para construir segmentos y figuras semejantes?*

3 **Casos para resolver, resolución de problemas** Aplicaciones de los temas estudiados en situaciones de la vida cotidiana.

4 **Actitudes y valores**. Aplicados en toda la unidad

5 **Aprendizaje autónomo**. Autoevaluación

6 **Aprender a aprender**. Reflexión sobre las estrategias y técnicas de aprendizaje, aplicadas para el estudio de la unidad y los resultados obtenidos.

7 **Sugerencias didácticas para la evaluación**.

La Guía de recursos didácticos

Páginas de los proyectos

Interdisciplinaridad. Los proyectos favorecen la articulación de las áreas curriculares y el desarrollo de las competencias fundamentales y específicas.

1 **Indicadores de logro** que se derivan de las competencias fundamentales y específicas.

2 **Proyecto participativo**. Características, objetivos y maneras de realización de las actividades del proyecto.

1 Indicadores de logro

- **Conoce** el concepto de *ciudad* y sus características principales.
- **Reconoce** la importancia de concebir y ofrecer ideas para mejor las condiciones de la ciudad en que vive.
- **Identifica** los pasos a seguir para elaborar un proyecto encaminado a alcanzar la ciudad que aspiramos.
- **Identifica** los componentes de una ciudad que facilite el acceso y el diario vivir de sus habitantes.

SABER HACER **Duración**: 2 sesiones de clase.

2 Proyecto

El empleo de proyectos en la enseñanza de las matemáticas favorece el desarrollo de las competencias fundamentales y propias del área del nuevo modelo curricular.

El trabajo con el proyecto podría ser desarrollado individual o grupalmente y discutido tras su realización en el aula.

Sugerencias didácticas

En este proyecto, *La ciudad que soñamos*, los estudiantes pondrán en práctica conocimientos adquiridos hasta ahora, en un contexto distinto vinculado a la vida cotidiana.

Es importante acompañarles durante todo el proceso de trabajo y ofrecerles las explicaciones que requiera cada caso.

92

PROYECTO PARTICIPATIVO DE AULA

92

Sugerencias didácticas 3

- **Inicio:** Es importante que este proyecto se realice formando distintos equipos y, luego, se expongan los resultados en clase. Es importante comunicar a los estudiantes que en este proyecto construirán un modelo o maqueta de una urbanización, un área comercial, una zona industrial, etc, de acuerdo a la que entiendan es una solución satisfactoria a algunos problemas de su ciudad. Los modelos de edificios deberán se cuerpos geométricos como los estudiados por la Geometría.

SABER HACER

¿A qué ciudad aspiramos?

Introducción

La ciudad es el lugar de establecimiento permanente de una gran población y la sede de organizaciones con funciones diversas, en el ámbito de la política y la administración , la producción y distribución de bienes, los servicios y las actividades financieras , el recreo y esparcimiento y las prácticas religiosas.

En tanto que espacio donde grupos humanos se desplazan y realizan sus actividades cotidianas, la ciudad debe reunir y promover un conjunto de condiciones para el desenvolvimiento favorable de la vida. Se debe aspirar a construir una ciudad con facilidades para desplazarnos por ella, ambientalmente sana, segura, organizada y debidamente equipada.

Intención del proyecto

Las ciudades donde vivimos no carecen de problemas. Su rapidez de expansión territorial y su crecimiento poblacional superan, en muchos casos, la capacidad de respuesta de los organismos oficiales y privados encargados del planeamiento, la oferta eficiente de servicios y el ornato.

En el presente proyecto los estudiantes tendrán oportunidad, junto a profesores, familiares y vecinos, de concebir y ofrecer ideas para mejorar la ciudad en que viven. Ideas para una ciudad agradable , segura y que garantice la movilidad de sus pobladores. Es un proyecto en el que confluyen las ciencias sociales, la matemática y el arte.

Las ideas para una mejor ciudad serán plasmadas en el diseño y la construcción de la maqueta de algún espacio comunitario o área de la ciudad que consideren.

¿Cómo iniciar nuestro proyecto?

- Recogiendo información acerca de qué es una ciudad habitable y cuáles soluciones se han dado a problemas similares a los nuestros.
- Consultando a compañeros, familiares , vecinos y urbanistas sobre aspectos de su ciudad que desearían cambiar para mejorarla.
- Haciendo un listado de los aspectos identificados , ordenándolos según su prioridad y evaluando sus posibilidades de solución.
- Discutiendo ideas y llegando a conclusiones abiertas y flexibles que actuarán como guías para la construcción de la maqueta, que será el elemento tangible del modelo de ciudad a que aspiramos.

- **Desarrollo:** Haga que sus estudiantes lean y comenten en el grupo la introducción que trata de los aspectos relacionado con la ciudad que aspiramos. Luego, motíveles para que lean y comenten la intención del proyecto que resume la idea de una mejor ciudad.
- **Cierre:** En esta oportunidad leerán y comentarán los pasos acerca de cómo iniciar un proyecto. Determinarán cómo los grupos formados recopilarán las informaciones, cómo organizarán los datos recopilados y cómo organizar las discusiones y las conclusiones.

4 Otras sugerencias

Es importante explicar a los estudiantes en qué consiste el Proyecto, *La ciudad que soñamos*. Hacer un breve comentario acerca de la presencia de las Matemáticas en la vida cotidiana y en aspectos relacionados con las construcciones y el diseño de las edificaciones.

Oriénteles y organice los grupos que recopilarán las informaciones consultando a los compañeros, familiares, amigos y vecinos.

Al concluir la recopilación de las informaciones, propóngales realizar el listado de los aspectos identificados, ordenándolos por orden de prioridad y evaluando las posibilidades de solución.

El siguiente paso es descurtir las ideas para llegar a conclusiones flexibles que serán las guías para la construcción de la maqueta, que será el elemento tangible del modelo de ciudad al que aspiramos.

Acompáñeles y oriénteles en el proceso de realización de las actividades involucradas en este proyecto.

3 **Sugerencias didácticas**. Sugerencias e indicaciones hechas por etapas para viabilizar y facilitar el trabajo relacionado con las actividades del proyecto.

4 **Otras sugerencias**. Para favorecer y enriquecer el trabajo con los temas y problemas planteados en el proyecto.

La Guía de recursos didácticos

Páginas de competencias laborales y profesionales

Indicadores de logro

- **Conoce** las funciones de un ingeniero.
- **Reconoce** la importancia de la ingeniería en el desarrollo de las sociedades.
- **Identifica** las variantes de la carrera de ingeniería.
- **Identifica** el perfil de un ingeniero.
- **Sabe** cuál debe ser la ética profesional de un ingeniero.
- **Identifica** las fuentes de trabajo o las oportunidades de empleos de un ingeniero.
- **Aprecia** el trabajo del ingeniero en sus distintas vertientes.

COMPETENCIAS LABORALES Y PROFESIONALES

Aprecia e

Ser ingeniero

¿Qué es un ingeniero?

Un ingeniero proyecta, diseña , ejecuta, supervisa y evalúa soluciones técnicas a una variada gama de necesidades sociales relacionadas con la intervención del entorno físico con fines diversos.

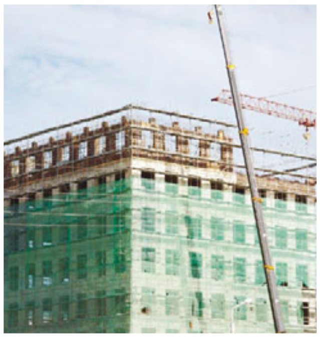
El ingeniero cuenta con obstáculos que limitan sus intervenciones en el medio y asume que, con sus recursos técnicos, deberá hacerles frente para obtener los mejores resultados posibles.

Importancia de la ingeniería

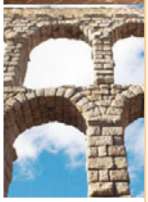
La ingeniería combina conocimientos científicos y tecnológicos, de los que no se disponía en el pasado. La ingeniería es una profesión moderna, sus primeras escuelas datan de finales del siglo XVIII.

La importancia actual de la ingeniería reside en que proporciona un conjunto de instrumentos técnicos de probada eficacia para la resolución de problemas de la vida social. La ingeniería es capaz de evaluar sus resultados y hacer proyecciones para la solución de problemas futuros.

Desempeño profesional



Construcción de un edificio. Obra de ingeniería civil.



Gran Muralla China (arri **(abajo)**. Dos obras impresio

La ingeniería tiene muc de éstas, especializa cuentan:

- La ingeniería civil de construcciones y de cas y sanitarias, del de caminos y carret tural.
- La ingeniería electró puesta en funcionam gramas informáticos .
- La ingeniería agrícola diseño y la construcc la producción agroin to de alimentos del a
- La ingeniería química asociada a los proce micas, de alimentos la primera y a la exp el subsuelo, la segur

Perfil del ingeniero

El perfil profesional o laboral del ingeniero es el con de conocimientos científicos y técnicos necesarios pa

96

Sugerencias didácticas

Comentar a los estudiantes que las competencias laborales y profesionales son las capacidades y destrezas que permiten desempeñar eficientemente una labor determinada.

En la ingeniería, además de la capacidad y la destreza, la responsabilidad es vital, no puede existir ningún margen de error en sus diseños y construcciones, por las consecuencias que representaría, en cualquier caso.

96

Sugerencias didácticas

- **Inicio:** Es importante que los estudiantes lean y discutan en el aul niero, las secciones: *¿Qué es un ingeniero?*, Importancia de la ingen profesional. Motíveles para que observen las ilustraciones y para qu las informaciones al pie de las mismas.
- **Desarrollo:** A continuación, inicie una discusión con sus estudiant leídos y anímeles a externar sus opiniones y si tienen preferencia por de esta carrera. Es conveniente que expresen el porqué de su prefe

Indicadores de logro

- **Conoce** las funciones de un diseñador profesional.
- **Reconoce** la importancia del diseño en el desarrollo de las sociedades.
- **Identifica** las variantes de la carrera de diseño como actividad profesional.
- **Identifica** el perfil del diseñador.
- **Sabe** cuál debe ser la ética profesional de un diseñador profesional.
- **Identifica** las fuentes de trabajo o las oportunidades de empleo de un ingeniero.
- **Aprecia** el trabajo del diseñador profesional en sus diversas vertientes.

COMPETENCIAS LABOR

El diseño como activic

¿Qué es un diseñador?

Un diseñador, en cualquiera es el profesional encargado bozar las características de ser construido para satisfa necesidades.

El esbozo que elabora el dise objeto es inicialmente una i ciendo concreta conforme se lo que ha sido proyectado, s un objeto utilitario de fábrica dín.

Importancia del diseño

El diseño es importante porq guía constante para obtenció calidad, con formas atractivas El diseño actúa como un fact fabricación de los productos ciones del entorno.

Su éxito se consigue en la producto construido se ape borado con antelación y cum terísticas y los requerimient sus destinatarios.

Desempeño profesional

Plano e instrumentos de Geomet de modo permanente mediciones y co

190

Sugerencias didácticas

Comente a los estudiantes que las competencias laborales y profesionales son las capacidades y destrezas que permiten desempeñar eficientemente una labor determinada.

En el diseño, además de la capacidad y la destreza, la creatividad y el arte,no pueden separarse.

190

Sugerencias didácticas

- **Inicio:** Es importante que los *como actividad profesional*, las y *Desempeño profesional.* Mo y comenten las informaciones
- **Desarrollo:** A continuación, i leídos y anímeles a externar su de esta carrera. Es convenien

el trabajo del ingeniero en sus distintas vertientes. SABER HACER

njunto
para el

Más información

Octavio Augusto Acevedo Camarena

Es considerado uno de los primeros

dad profesional

a de sus vertientes,
de proyectar o es-
un objeto que va a
acer determinadas

eñador de cualquier
idea que se va ha-
e pone en ejecución
sea esto un edificio,
a, una joya o un jar-

que constituye una
ón de productos de
as y usos amigables.
tor de control en la
s o en las interven-

medida en que el
egue al esbozo ela-
mpla con las carac-
tos esperados por

Del boceto al objeto real. El diseño proyecta el objeto real a construir.

tría. El diseño emplea
onceptos geométricos.

El profesional del diseño trabaja con una gran variedad de productos y demandas:

- El arquitecto, que interviene el espacio habitable para lograr un entorno humano atractivo, funcional o en armonía con la naturaleza.
- El diseñador de interiores, que modifica los espacios de una vivienda para lograr hacerlos más agradables, confortables y eficientes.
- El diseñador industrial, que obtiene productos industriales más atractivos y fáciles de manejar.
- El diseñador WEB, que crea y desarrolla páginas WEB no solo en lo que respecta a su atractivo sino en lo que tiene que ver con las facilidades para su navegación y la interconectividad de los usuarios.

Perfil del diseñador

El diseñador contará con conocimientos de diversas áreas, dado el carácter multidisciplinar de su profesión. Hará uso de la geometría y los procesos de medición; debe dominar técnicas de dibujo y representaciones a escala; conocimientos sobre materiales de construcción e informática. Deberá tener espíritu de búsqueda, ser sujeto imaginativo y con facilidades para el dibujo. Entre sus actitudes se cuentan la capacidad de trabajo, la facilidad o buena disposición para modificar sus soluciones cuando sea necesario, ser rigurosos en el desarrollo de sus proyectos y veraces al momento de ofrecer sus soluciones a sus clientes.

Ética profesional del diseñador

El profesional del diseño deberá ser honesto consigo mismo y con sus clientes al momento de plantear soluciones; ser veraz cuando algún requerimiento tenga dificultades para su satisfacción; evitar la violación de normativas y derechos de autor y defender el entorno.

Oportunidades laborales

El diseñador puede desempeñarse con éxito:

- En empresas de ingeniería, arquitectura, diseño de interiores y paisajismo.
- En instituciones del Estado que se ocupen del ornato y el planeamiento urbano.
- En joyerías y casas creadoras de moda.
- En departamentos de investigación e innovación de industrias de bienes de consumo cotidiano, para hacerlos más atractivos y de fácil manejo.
- En agencias publicitarias y empresas dedicadas al diseño gráfico.

Escalera de caracol. Esta es una bella estructura arquitectónica.

Diseño de objetos. Con el diseño industrial se producen objetos con características previamente concebidas.

Sala de estar. Trabajo de un interiorista.

VALORACIÓN PERSONAL

1 Responde las preguntas.

- ¿En qué consiste el diseño en cualquiera de sus distintas vertientes?
- ¿Cómo se relacionan el diseñador y el artista? Pon ejemplos que sustenten tu respuesta.
- ¿Qué valor tiene el diseño para los procesos de producción de bienes?
- ¿Por qué un buen diseñador debe ser abierto y flexible al plantear sus soluciones?

Más información

El diseño gráfico

El diseño gráfico es una expresión artística y una práctica que se basa en la planificación y la proyección de ideas y experiencias con contenidos visuales y textuales.

Estas expresiones artísticas se pueden manifestar de manera virtual y escrita, con imágenes o formas gráficas.

Por lo general, tiene un objetivo que puede ser económico, educacional, cultural, político, etc.

Las técnicas y métodos usados en la antigüedad han ido cambiando paulatinamente, es una de las disciplinas que se han adaptado a los nuevos tiempos y han cambiado sus métodos de creación y de transmisión.

s

s estudiantes lean y discutan en el aula el texto: *El diseño*
s secciones: *¿Qué es un diseñador?, Importancia del diseño*
otíveles para que observen las ilustraciones y para que lean
s al pie de las mismas.

inicie una discusión con sus estudiantes sobre los temas
us opiniones y si tienen preferencia por alguna de las ramas
te que expresen el porqué de su preferencia.

Sugerencias didácticas

- **Inicio:** A continuación, pida a sus estudiantes que lean y discutan en el aula el contenido de las secciones: *Perfil del diseñador, Ética profesional del diseñador* y *Oportunidades de empleo*. Motíveles para que observen las ilustraciones y para que lean y comenten las informaciones al pie de las mismas.
- **Desarrollo:** En la sección: Valoración personal, responderán preguntas en el grupo relacionadas con los temas desarrollados en esta doble página. Motíveles, en cada caso, a justificar el porqué de su respuesta y a comentar, si es necesario, las respuestas de sus compañeros.

La Guía de recursos didácticos

Valioso instrumento de apoyo al trabajo pedagógico con una gran cantidad de recursos y sugerencias.

Páginas de programación de la unidad de aprendizaje

A

Creatividad, arte y matemática

1 Propuesta de programación

ÁREAS	COMPETENCIAS ESPECÍFICAS	CONTENIDOS			INDICADORES DE LOGRO
		Concepto	Procedimientos	Actitudes y valores	
Matemática	■ **Razona y argumenta**: **Clasifica** las rectas, los segmentos y los polígonos atendiendo a sus características. ■ **Comunica**: **Interpreta** y **explica** los tipos de ángulos en el espacio. ■ **Modela y representa**: **Construye** y **representa** situaciones de la vida cotidiana a través de los diferentes polígonos. ■ **Usa algoritmos**: **Sigue** las reglas que le permiten obtener un resultado al resolver problemas. ■ **Conecta: Identifica** diferentes tipos de rectas, segmentos, ángulos y polígonos. ■ **Resuelve problemas: Resuelve** y **elabora** problemas relacionados con el círculo y secciones circulares. ■ **Utiliza herramientas tecnológicas: Utiliza** soportes tecnológicos.	■ Rectas, segmentos y ángulos. ■ Ángulos en el espacio. ■ Polígonos.	■ Reconocimiento de rectas, segmentos, rayos, ángulos y triángulos semejantes. ■ Identificación y resolución de problemas relativos a círculos y secciones.	■ Valoración del vínculo entre la matemática y el arte. ■ Apreciación de la belleza y la diversidad de expresiones artísticas.	■ **Traza** la manera en que se reflejan los rayos en espejos convexos. ■ **Prueba** que un objeto y su imagen reflejada en un espejo convexo, son semejantes. ■ **Prueba** que la ley de reflexión implica que la luz toma el camino más corto al reflejarse. ■ **Demuestra** la semejanza de dos triángulos representados en un diseño artístico. ■ **Determina** la longitud de la circunferencia y de cualquiera de los círculos centrales en una obra de arte en la que se representan estas formas. ■ **Determina** la longitud de un arco interceptado al inscribirse un cuadrado en un círculo. ■ **Identifica** y **resuelve** problemas relacionados con el círculo y secciones circulares. ■ **Utiliza** diferentes recursos virtuales y electrónicos: computadora, softwares educativos, juegos interactivos y otros, en la búsqueda de información.
Educación Artística	■ **Plasma** en obras escénicas y visuales, temas y formas que refieren al realismo o la ficción.	■ Transformaciones reales e imaginarias del espacio (plástico-visual y escénico).	■ Exploración en diferentes manifestaciones artísticas, a partir de temas o formas del realismo y la ficción.	■ Valoración de distintas manifestaciones artísticas, realistas o de ficción.	■ **Reconoce** características de obras artísticas realistas y de obras artísticas de ficción.

98 A ©Santillana, S. A. ©Santillana, S. A.

Competencias fundamentales 2

Resolucion de problemas: **Identifica** y **utiliza** estrategias, y **genera** alternativas de solución.

Valor transversal

Creatividad

Recursos digitales

Plataforma digital CD

BIBLIOTECA DEL DOCENTE
- DOCUMENTOS PARA LA PLANIFICACIÓN
- GUÍA DE RECURSOS TIC

RECURSOS DE REFUERZO Y AMPLIACIÓN

LibroMedia

ACTIVIDAD INTERACTIVA

PÁGINA 99 Clasificación de triángulos.

CD DE RECURSOS DIGITALES: PLAN REGULAR

Pleno PRUEBA DE EVALUACIÓN FORMATIVA DE LA UNIDAD

Tiempo estimado de trabajo 3

Dos semanas

Estrategias pedagógicas 4

- Recuperación de experiencias previas.
- Trabajo en equipo.
- Aprendizaje basado en problemas (ABP).

98 B

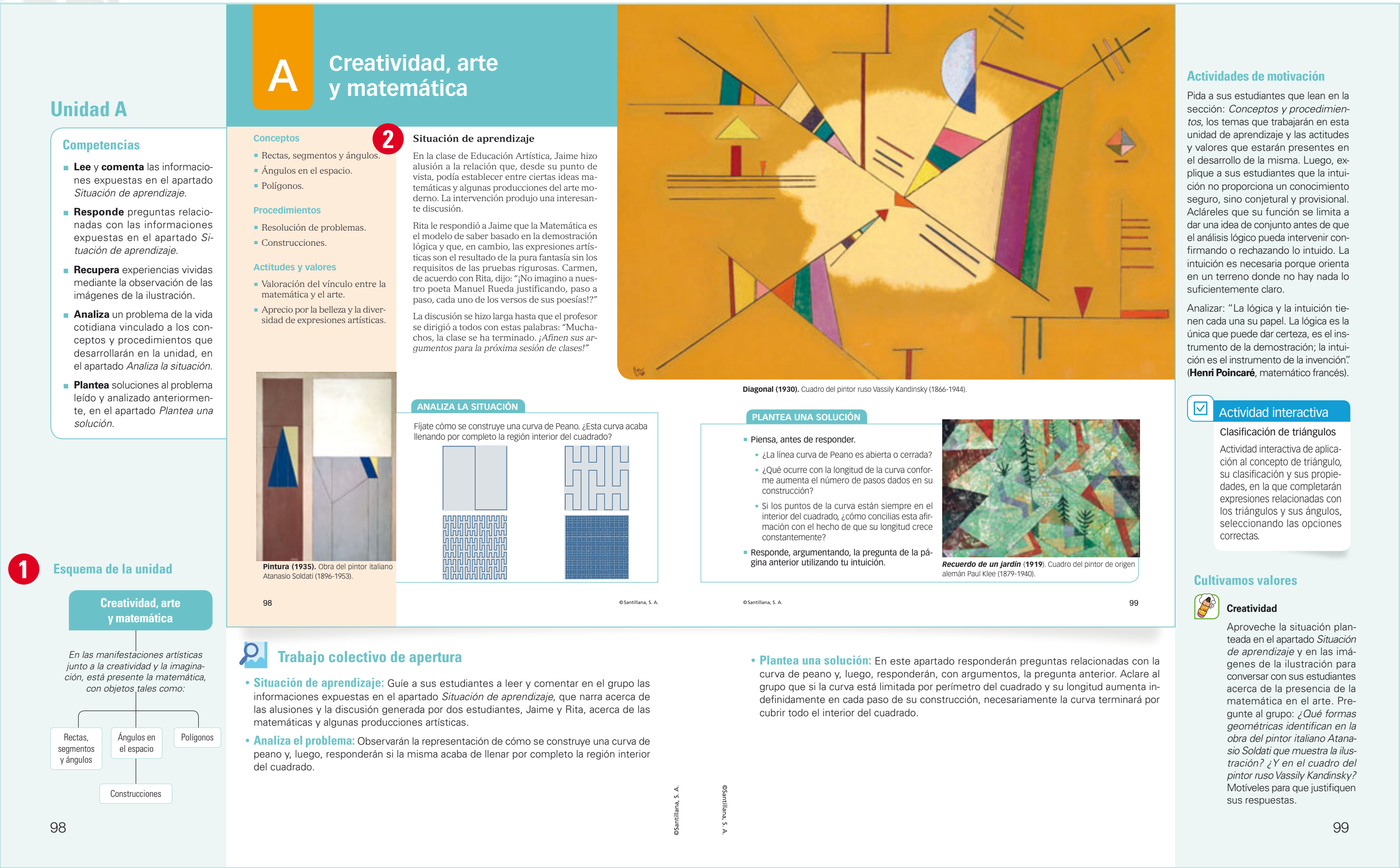
1 **Malla curricular** de competencias específicas, contenidos conceptuales, procedimentales y actitudinales e indicadores de logro de las áreas articuladas en la unidad.

2 **Competencias fundamentales** que se favorecen con el trabajo de la unidad.

3 Tiempo sugerido para desarrollar las actividades propuestas.

4 **Estrategias pedagógicas** de enseñanza-aprendizaje y de evaluación que se aplicarán y desarrollarán al trabajar la unidad.

Páginas de apertura



Unidad A

Competencias

- **Lee** y **comenta** las informaciones expuestas en el apartado *Situación de aprendizaje*.
- **Responde** preguntas relacionadas con las informaciones expuestas en el apartado *Situación de aprendizaje*.
- **Recupera** experiencias vividas mediante la observación de las imágenes de la ilustración.
- **Analiza** un problema de la vida cotidiana vinculado a los conceptos y procedimientos que desarrollarán en la unidad, en el apartado *Analiza la situación*.
- **Plantea** soluciones al problema leído y analizado anteriormente, en el apartado *Plantea una solución*.

1 Esquema de la unidad

Creatividad, arte y matemática

En las manifestaciones artísticas junto a la creatividad y la imaginación, está presente la matemática, con objetos tales como:

Rectas, segmentos y ángulos | Ángulos en el espacio | Polígonos

Construcciones

A Creatividad, arte y matemática

Conceptos
- Rectas, segmentos y ángulos.
- Ángulos en el espacio.
- Polígonos.

Procedimientos
- Resolución de problemas.
- Construcciones.

Actitudes y valores
- Valoración del vínculo entre la matemática y el arte.
- Aprecio por la belleza y la diversidad de expresiones artísticas.

2 **Situación de aprendizaje**

En la clase de Educación Artística, Jaime hizo alusión a la relación que, desde su punto de vista, podía establecer entre ciertas ideas matemáticas y algunas producciones del arte moderno. La intervención produjo una interesante discusión.

Rita le respondió a Jaime que la Matemática es el modelo de saber basado en la demostración lógica y que, en cambio, las expresiones artísticas son el resultado de la pura fantasía sin los requisitos de las pruebas rigurosas. Carmen, de acuerdo con Rita, dijo: "¡No imagino a nuestro poeta Manuel Rueda justificando, paso a paso, cada uno de los versos de sus poesías!?"

La discusión se hizo larga hasta que el profesor se dirigió a todos con estas palabras: "Muchachos, la clase se ha terminado. *¡Afinen sus argumentos para la próxima sesión de clases!"*

Diagonal (1930). Cuadro del pintor ruso Vassily Kandinsky (1866-1944).

Pintura (1935). Obra del pintor italiano Atanasio Soldati (1896-1953).

ANALIZA LA SITUACIÓN

Fíjate cómo se construye una curva de Peano. ¿Esta curva acaba llenando por completo la región interior del cuadrado?

PLANTEA UNA SOLUCIÓN

- Piensa, antes de responder.
  - ¿La línea curva de Peano es abierta o cerrada?
  - ¿Qué ocurre con la longitud de la curva conforme aumenta el número de pasos dados en su construcción?
  - Si los puntos de la curva están siempre en el interior del cuadrado, ¿cómo concilias esta afirmación con el hecho de que su longitud crece constantemente?
- Responde, argumentando, la pregunta de la página anterior utilizando tu intuición.

Recuerdo de un jardín (**1919**). Cuadro del pintor de origen alemán Paul Klee (1879-1940).

98 ©Santillana, S. A. ©Santillana, S. A. 99

Trabajo colectivo de apertura

- **Situación de aprendizaje:** Guíe a sus estudiantes a leer y comentar en el grupo las informaciones expuestas en el apartado *Situación de aprendizaje*, que narra acerca de las alusiones y la discusión generada por dos estudiantes, Jaime y Rita, acerca de las matemáticas y algunas producciones artísticas.
- **Analiza el problema:** Observarán la representación de cómo se construye una curva de peano y, luego, responderán si la misma acaba de llenar por completo la región interior del cuadrado.
- **Plantea una solución:** En este apartado responderán preguntas relacionadas con la curva de peano y, luego, responderán, con argumentos, la pregunta anterior. Aclare al grupo que si la curva está limitada por perímetro del cuadrado y su longitud aumenta indefinidamente en cada paso de su construcción, necesariamente la curva terminará por cubrir todo el interior del cuadrado.

©Santillana, S. A. ©Santillana, S. A.

Actividades de motivación

Pida a sus estudiantes que lean en la sección: *Conceptos y procedimientos*, los temas que trabajarán en esta unidad de aprendizaje y las actitudes y valores que estarán presentes en el desarrollo de la misma. Luego, explique a sus estudiantes que la intuición no proporciona un conocimiento seguro, sino conjetural y provisional. Acláreles que su función se limita a dar una idea de conjunto antes de que el análisis lógico pueda intervenir confirmando o rechazando lo intuido. La intuición es necesaria porque orienta en un terreno donde no hay nada lo suficientemente claro.

Analizar: "La lógica y la intuición tienen cada una su papel. La lógica es la única que puede dar certeza, es el instrumento de la demostración; la intuición es el instrumento de la invención". (**Henri Poincaré**, matemático francés).

Actividad interactiva

Clasificación de triángulos

Actividad interactiva de aplicación al concepto de triángulo, su clasificación y sus propiedades, en la que completarán expresiones relacionadas con los triángulos y sus ángulos, seleccionando las opciones correctas.

Cultivamos valores

Creatividad

Aproveche la situación planteada en el apartado *Situación de aprendizaje* y en las imágenes de la ilustración para conversar con sus estudiantes acerca de la presencia de la matemática en el arte. Pregunte al grupo: *¿Qué formas geométricas identifican en la obra del pintor italiano Atanasio Soldati que muestra la ilustración? ¿Y en el cuadro del pintor ruso Vassily Kandinsky?* Motíveles para que justifiquen sus respuestas.

98 99

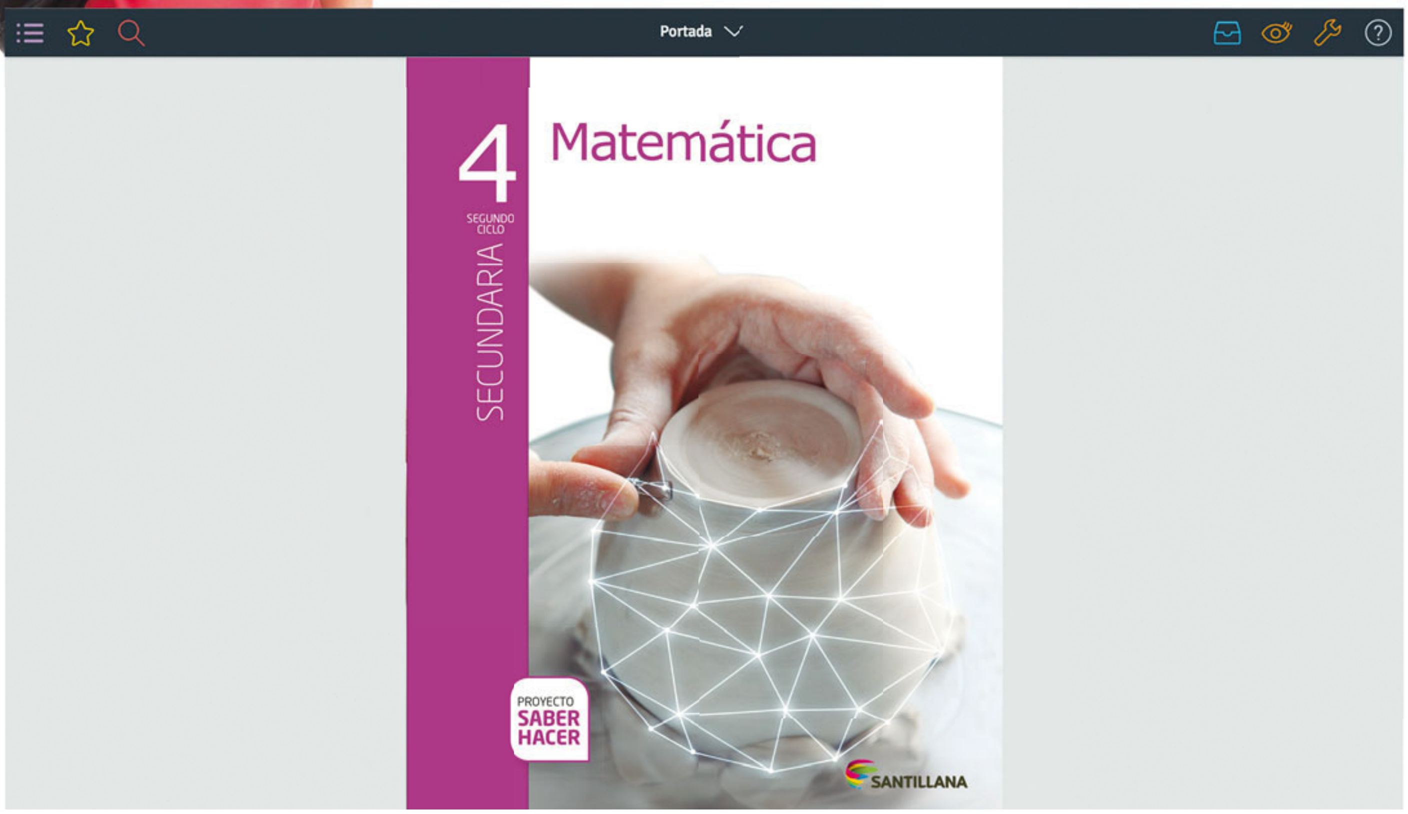
1 Esquema conceptual de la unidad, que relaciona conceptos e ideas fundamentales entre las áreas de articulación.

2 Situación de aprendizaje. Orientaciones que permiten movilizar y articular los conocimientos previos a partir de la situación de aprendizaje y generar interés para resolver o responder las preguntas y problemas planteados.

El Libromedia

Libro en versión digital que integra las tecnologías de la información y la comunicación, en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

El Libromedia es una aplicación que **reproduce las páginas del texto del estudiante** y permite acceder a recursos multimedia y herramientas para multiplicar las posibilidades de uso.



¿Cómo está organizado?

Está organizado por cuatro elementos principales: botones de navegación, botones de contenido y edición, botón de ayuda y botones de acción.

Botones de navegación

Índice de miniaturas

Favoritos

Búsqueda

Botón de ayuda

Botones de contenido y edición

Página sencilla
Página doble

Ir a página

Ampliar / Reducir visualización

Botones de acción

Encajar en pantalla

El Libromedia

Libro en versión digital que integra las tecnologías de la información y la comunicación en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

¿Qué recursos contiene?

Contiene una variedad de recursos multimedia para apoyar, reforzar, consolidar y ampliar el aprendizaje.

Algunos de los recursos son:

Recursos multimedia:

- Animaciones
- Presentaciones
- Videos
- Audios
- Galerías de imágenes

Actividades interactivas

Documentos

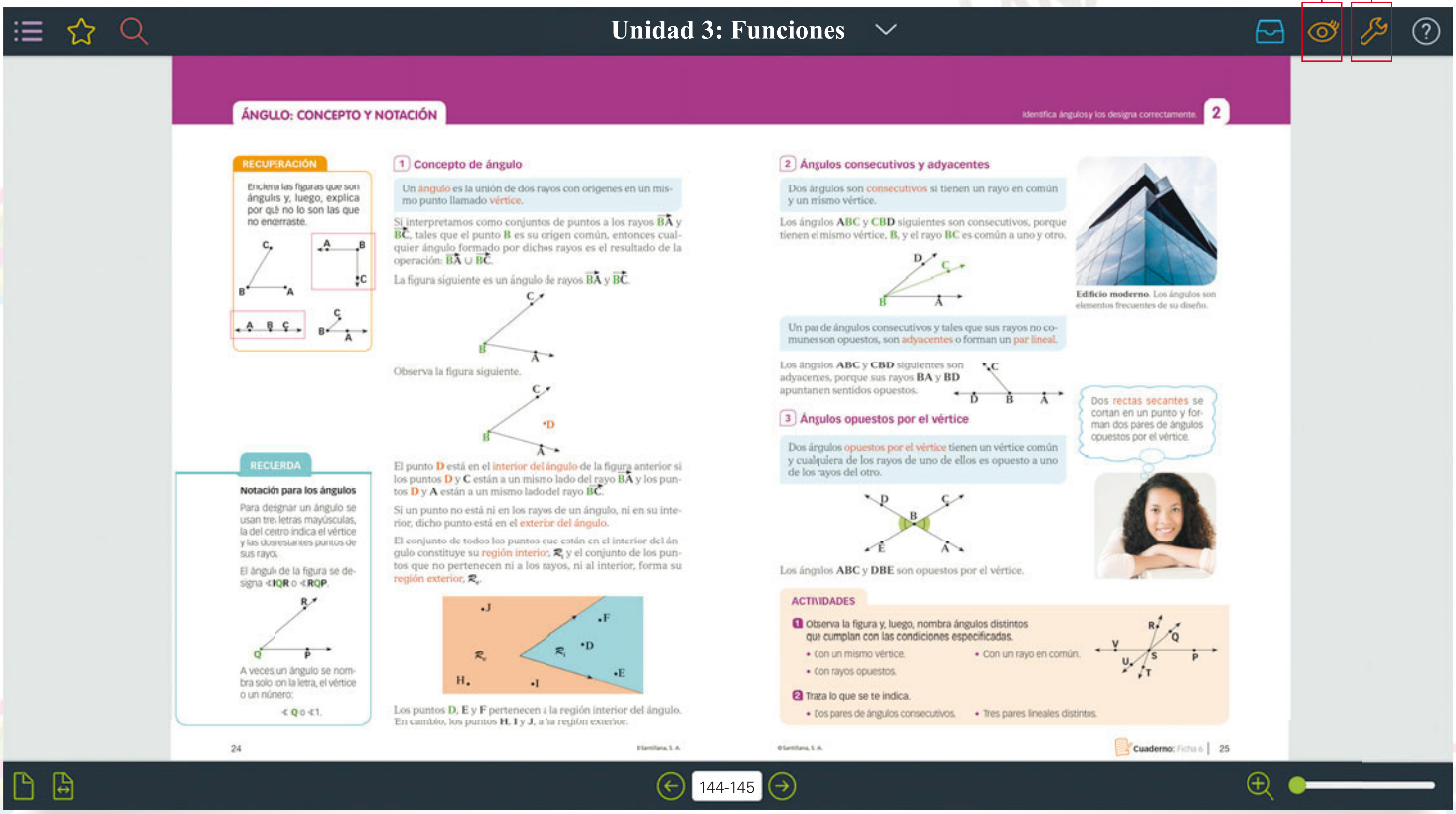
Enlaces webs | Webquests

¿Cómo se personaliza el Libromedia?

Los botones de herramientas de edición y de personalización permiten adaptar el contenido de acuerdo con las necesidades personales y de la clase. Estas herramientas permiten también desarrollar y mejorar las estrategias de estudio o aprendizaje.

Botón de herramientas de edición

Botón de personalización



Presenta una serie de **herramientas** que permiten al estudiante **aprender a aprender**:

- Seleccionar
- Dibujar
- Escribir
- Subrayar/resaltar
- Vincular
- Ocultar/destacar
- Deshacer/rehacer
- Guardar/abrir
- Cerrar

Mapa de contenidos

UNIDADES DIDÁCTICAS	CONTENIDOS		
1 Fundamentos de Geometría 6	■ Historiade la geometría. Conceptos primitivos y derivados.	■ Axiomas y teoremas.	■ El razonamiento deductivo en geometría.
2 Ángulos 22	■ Ángulos: concepto y notación.	■ Postulados de la medida y de la construcción.	■ Ángulos congruentes.
3 Rectas paralelas y perpendiculares 38	■ Rectas paralelas y perpendiculares.	■ Construcciones con regla y compás, I.	■ Construcciones con regla y compás, II.
4 Triángulos 52	■ Triángulo: concepto y clasificación.	■ Segmentos y puntos notables en el triángulo.	■ Semejanza y congruencia de triángulos. ■ Construcciones de triángulos semejantes y congruentes.
5 La circunferencia 72	■ Circunferencia. ■ Líneas y segmentos en una circunferencia.	■ Ángulos en una circunferencia.	■ Posiciones relativas de dos circunferencias.
PROYECTO PARTICIPATIVO 92	**La ciudad que soñamos**		
COMPETENCIAS LABORALES 96	**Ser ingeniero**		
UNIDAD DE APRENDIZAJE A 98	**Imaginación, arte y matemática**		
UNIDADES DIDÁCTICAS			
6 Áreas del círculo y de secciones circulares 106	■ Área de un círculo.	■ Áreas de un sector y un segmento circular.	■ Áreas de una corona y un trapecio circulares.
7 Polígonos 120	■ Polígonos. ■ Diagonales de un polígono.	■ Ángulos en un polígono.	■ Perímetro y área de un polígono simple. ■ Construcciones geométricas.
8 Geometría del espacio 142	■ El espacio.	■ Ángulos en el espacio.	■ Cuerpos poliedros. ■ Proyecciones sobre el plano.
9 Poliedros: área y volumen 160	■ El prisma.	■ La pirámide.	■ Sección transversal de una pirámide.
10 Cuerpos redondos: área y volumen 172	■ El cilindro. ■ El cono.	■ La esfera.	■ Secciones de la esfera.
COMPETENCIAS LABORALES 190	**El diseño como actividad profesional**		
UNIDAD DE APRENDIZAJE B 192	**Geometría y sociedad**		

CONTENIDOS			COMPETENCIAS FUNDAMENTALES	EVALUACIÓN
■ Segmentos. Proporcionalidad.	■ Semejanza y congruencia de figuras	■ Actividades.	■ Pensamiento lógico, creativo y crítico. Resolución de problemas.	■ Resolución de problemas.
■ Operaciones con ángulos	■ Sistema circular de medida angular.	■ Actividades.	■ Pensamiento lógico, creativo y crítico. Resolución de problemas.	■ Debate.
■ Rectas paralelas y una recta transversal.		■ Actividades.	■ Pensamiento lógico, creativo y crítico. Resolución de problemas.	■ Aprendizaje basado en proyectos.
■ Teorema de Thales. ■ Propiedades del triángulo rectángulo.	■ Construcciones de triángulos.	■ Actividades.	■ Pensamiento lógico, creativo y crítico. Resolución de problemas.	■ Resolución de problemas.
■ Teoremas relativos a la circunferencia.	■ Polígonos inscritos y circunscritos.	■ Construcciones geométricas. ■ Actividades	■ Pensamiento lógico, creativo y crítico. Resolución de problemas.	■ Portafolios.
				■ Aprendizaje por descubrimiento.
■ Circunferencia y círculo en el plano cartesiano.		■ Actividades.	■ Pensamiento lógico, creativo y crítico. Resolución de problemas.	■ Resolución de problemas.
■ Transformaciones geométricas.	■ Reflexión de una figura en el plano.	■ Homotecia. ■ Actividades.	■ Pensamiento lógico, creativo y crítico. Resolución de problemas.	■ Juego.
■ Simetrías en el espacio.	■ Distancia en el espacio.	■ Actividades.	■ Pensamiento lógico, creativo y crítico. Resolución de problemas.	■ Resolución de problemas.
		■ Actividades.	■ Pensamiento lógico, creativo y crítico. Resolución de problemas.	■ Resolución de problemas.
■ Posiciones relativas de dos esferas.	■ Cuerpos compuestos.	■ Actividades.	■ Pensamiento lógico, creativo y crítico. Resolución de problemas.	■ Aprendizaje por descubrimiento.
				■ Ensayo

1 Fundamentos de Geometría

Propuesta de programación

COMPETENCIAS	CONTENIDOS
Específicas • **Razona y argumenta**: **Identifica** las posibles razones de un problema de la comunidad y **busca** justificaciones al mismo, apoyándose en los elementos básicos de la Geometría. • **Comunica**: **Lee** e **interpreta** gráficos y figuras geométricas planas en las que intervienen el punto, la recta, el segmento, rayo o semirrecta. • **Modela y representa**: **Representa** una situación determinada de la vida diaria a través de los elementos básicos de la Geometría plana. • **Usa algoritmos**: **Sigue** las reglas que le permiten obtener un resultado al resolver problemas en los que intervienen elementos básicos de la Geometría. • **Conecta**: **Emplea** los elementos básicos de la Geometría plana y **los relaciona** con una situación o problema de su contexto. • **Resuelve problemas**: **Resuelve** problemas del contexto de la vida cotidiana en que se desenvuelve, utilizando los elementos básicos de la Geometría. • **Utiliza herramientas tecnológicas**: **Utiliza** soportes tecnológicos como la Internet, la calculadora científica y otros dispositivos. **Fundamentales** **Resolución de problemas**: **Identifica** y **utiliza** estrategias, y **genera** alternativas de solución.	**Conceptos** • Historia de la Geometría. • Axiomas y teoremas. • El razonamiento deductivo en Geometría. • Segmentos proporcionales. • Semejanza y congruencia de figuras. **Procedimientos** • Identificación de momentos importantes del desarrollo histórico de la Geometría. • Reconocimiento del papel de los axiomas, las definiciones y los teoremas de la Geometría. • Identificación de las partes de un teorema, su significado y la función que desempeña cada una. • Identificación y construcción de segmentos de longitud dada. • Identificación y construcción de figuras semejantes y de figuras congruentes. **Actitudes y valores** • Valoración del uso de la Geometría en el conocimiento del entorno. • Apreciación del papel de la Geometría en el desarrollo de la tecnología.

Tiempo estimado de trabajo: 2 semanas

INDICADORES DE LOGRO

- **Identifica** y **expone** momentos importantes del desarrollo histórico de la Geometría.
- **Reconoce** conceptos primitivos y derivados de la Geometría.
- **Reconoce** los conceptos de *punto*, *recta*, *plano*, *rayo* y *segmento*.
- **Reconoce** los conceptos de axioma o postulado, definición y teorema.
- **Reconoce** y **distingue** el papel de los axiomas, las definiciones y los teoremas en la Geometría.
- **Identifica** las partes de un teorema, su significado y la función que desempeña cada una de sus partes.
- **Identifica** y **construye** segmentos de longitud dada.
- **Reconoce** la congruencia de dos segmentos.
- **Identifica** y **construye** figuras semejantes y congruentes.
- **Resuelve** problemas del contexto que involucran elementos básicos de la Geometría.
- **Utiliza** recursos virtuales y electrónicos: computadora, programas educativos, juegos interactivos y otros, en la búsqueda de información.

Valor transversal: Ciencia y tecnología

Recursos digitales

Plataforma digital

CD

BIBLIOTECA DEL DOCENTE

- DOCUMENTOS PARA LA PLANIFICACIÓN
- EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA
- GUÍA DE RECURSOS TIC

CUADERNO DE ACTIVIDADES

UNIDAD 1	Fundamentos de Geometría

RECURSOS DE REFUERZO Y AMPLIACIÓN

LibroMedia

ACTIVIDADES INTERACTIVAS

PÁGINA 7	Figuras semejantes
PÁGINA 8	Rectas y planos en el espacio
PÁGINA 16	Homotecia y semejanza

CD DE RECURSOS DIGITALES: PLAN REGULAR

Pleno: PRUEBA DE EVALUACIÓN FORMATIVA DE LA UNIDAD

Estrategias pedagógicas

- Recuperación de experiencias previas.
- Trabajo en equipo.
- Aprendizaje basado en problemas (ABP).

Unidad 1

Competencias de la unidad

- **Lee** y **comenta** las informaciones expuestas en el apartado *Punto de partida*.
- **Responde** preguntas relacionadas con las informaciones expuestas en el apartado *Punto de partida*.
- **Recupera** experiencias vividas mediante la observación de las imágenes de la ilustración.
- **Analiza** un problema de la vida cotidiana vinculado a los conceptos y procedimientos que desarrollarán en la unidad en el apartado *Analiza el problema*.
- **Plantea** soluciones al problema leído y analizado anteriormente, en el apartado *Plantea una solución*.

Apertura de la unidad

Dentro de los objetivos principales de la apertura de esta unidad se encuentran, en primer lugar, conocer los conceptos, los procedimientos y las actitudes y valores desarrollados en la misma y, en segundo lugar, el plantear una situación de aprendizaje, una problemática o un texto que sirve para contextualizar el tema de la unidad. Todo esto con la finalidad de motivar y despertar la curiosidad de los estudiantes.

A partir de la situación o texto planteado, el problema a analizar y las imágenes de la ilustración se conecta al estudiante con el tema a tratar, a la vez que vincula con la realidad o cotidianidad los temas que se van a desarrollar.

Todos los elementos que conforman la portada promueven la recuperación de experiencias o conocimientos previos y la motivación o el interés por los conocimientos que adquirirán en la unidad.

1 Fundamentos de Geometría

Conceptos

- Historia de la Geometría.
- Axiomas y teoremas.
- El razonamiento deductivo en Geometría.
- Segmentos proporcionales.
- Semejanza y congruencia de figuras.

Procedimientos

- Investigación de los orígenes históricos de la Geometría.
- Construcción de elementos básicos de la Geometría.

Actitudes y valores

- Valoración del uso de la Geometría en el conocimiento del entorno.
- Aprecio por el papel de la geometría en el desarrollo de la tecnología.

Punto de partida

El resultado de dividir la longitud de la diagonal de un cuadrado por la longitud de sus lados proporciona un valor fijo. La suma de las longitudes de dos lados de un triángulo siempre es mayor que la longitud del tercer lado. El día y la noche se suceden con regularidad. Las estrellas se mueven siguiendo trayectorias que, vistas desde la Tierra, parecen ser circunferencias perfectas.

El mundo que nos rodea está construido de tal modo que entre las cosas y los acontecimientos se establecen relaciones constantes que permiten la obtención de nuevos conocimientos y hacer predicciones exitosas. Esto fue comprendido por quienes se dedicaron a la observación de los fenómenos y a la búsqueda de leyes naturales.

La Geometría se ocupa de estudiar las relaciones fijas entre elementos de una figura o un cuerpo. Si bien los primeros geómetras se limitaron a utilizar con fines prácticos estas relaciones, sus sucesores buscaron procedimientos para probarlas de manera incontrovertible.

- Menciona tres relaciones fijas entre objetos o acontecimientos en tu entorno.

ANALIZA EL PROBLEMA

Se está diseñando un aparato óptico de alta precisión. Los diseñadores procuran dotarlo de una base con patas que garantice que el aparato no sufra deslizamientos o movimientos de vaivén que pudieran afectar los resultados de las observaciones que se harán con él.

Unos hablan de dotar a la base de cuatro patas fuertes y suficientemente fijas al dispositivo óptico de alta precisión. Otros creen que el número de patas del aparato debe ser tres, ya que con ello se minimizaría el riesgo de que sufra oscilaciones al manejarlo.

6

Trabajo colectivo de apertura

- **Punto de partida**: Guíe a sus estudiantes a leer y comentar las informaciones expuestas en el apartado *Punto de partida*, que trata sobre las relaciones constantes entre acontecimientos naturales y cotidianos que permiten obtener nuevos conocimientos y establecer predicciones.
- **Analiza el problema**: Se plantea cuál será la base más conveniente para el diseño de un aparato óptico de gran precisión. Este debe ser diseñado con un número de patas que garanticen su estabilidad y que no afecten los resultados de las observaciones.
- **Plantea una solución:** Responderán cuál de las propuestas al problema planteado sería la más razonable y justificarán geométricamente sus argumentos.

PLANTEA UNA SOLUCIÓN

- Responde las preguntas.
  - Si fueras uno de los diseñadores del aparato, ¿cuál de las propuestas te parecería más razonable?
  - ¿Tienes alguna solución mejor para el problema de los diseñadores del aparato? ¿Cuál es?
  - ¿Por qué consideras que tu solución es la mejor?
  - Si tuvieras que justificar la propuesta de las tres patas, ¿qué argumentos extraídos de la Geometría utilizarías?

Esquema conceptual de la unidad

Fundamentos de la Geometría

La Geometría es una disciplina que involucra

- Conceptos primitivos y derivados
  - Axiomas
  - Teoremas
  - Demostraciones
- *Conceptos básicos como*
  - Segmentos y figuras
    - *que presentan*
      - Congruencias
      - Semejanzas

Actividad de motivación

Pida a sus estudiantes que lean en la sección: *Conceptos y procedimientos*, los temas que trabajarán en la unidad y las actitudes y valores que estarán presentes en el desarrollo de la misma. Luego, para que interioricen la importancia de conocer los conceptos básicos de la Geometría y sus orígenes históricos, es conveniente preguntar al grupo: *¿Qué papel jugó la Geometría en las construcciones antiguas como las pirámides de Egipto y la Gran Muralla China? ¿Qué presencia tiene la Geometría en las construcciones modernas? ¿Podrían mencionar elementos de la naturaleza en los que se manifiesten expresiones geométricas?*

Actividad interactiva

Figuras semejantes

Actividad interactiva de recuperación de experiencias, en la que seleccionarán, en un conjunto de figuras, las que son semejantes a la figura dada.

Actitudes y valores

Ciencia y tecnología

Aproveche la situación planteada en el apartado *Punto de partida* y en las imágenes de la ilustración para conversar con sus estudiantes acerca de la importancia de la Geometría en el desarrollo de la tecnología y el conocimiento del entorno. Haga que el grupo investigue: *¿Qué relación existe entre la sombra que proyecta un poste de luz y los rayos del Sol?* Discuta el resultado de la investigación con el grupo.

Indicadores de logro

- **Identifica** y **expone** momentos importantes del desarrollo histórico de la Geometría.
- **Reconoce** conceptos primitivos y derivados de la Geometría.
- **Reconoce** los conceptos geométricos de *punto*, *recta*, *plano*, *rayo* y *segmento*.

Actividad interactiva

Rectas y planos en el espacio

Actividad interactiva que presenta diversos planos con rectas con distintas posiciones. Arrastrarán las expresiones que indican las distintas posiciones de las rectas a sus recuadros correspondientes.

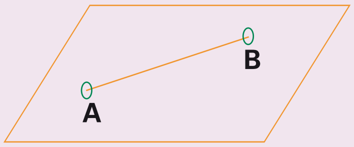
Más información

Conceptos primitivos:

El *punto* es la marca que puede dejar la punta de un lápiz sobre el papel, solo tiene posición y carece de dimensiones: ancho, largo y altura. Los *puntos geométricos* se representan en el plano con letras mayúsculas.

La *recta* o *línea* es una agrupación infinita de puntos colocados uno detrás del otro. Si los extremos de la recta no se unen, la línea es abierta; y si se unen, es *cerrada*.

El plano o superficie tiene dos dimensiones: largo y ancho, posee un número infinito de puntos y rectas.



RECUPERACIÓN

Responde.

- ¿Qué marcas u objetos del entorno te sugieren la noción de punto geométrico?
- ¿Y las nociones de recta y de plano?
- ¿Puedes afirmar que, en rigor, existen puntos, rectas y planos geométricos en tu entorno?

1 Orígenes de la Geometría

El término *geometría*, etimológicamente *medida de la Tierra*, permite rastrear sus orígenes. La Geometría aparece históricamente asociada a las actividades relacionadas con la medida de áreas de predios agrícolas y otras propiedades inmobiliarias. Desde aquí, se extendió al cálculo de volúmenes con la finalidad de medir la cantidad de granos conservada en los almacenes. Otro importante papel en el origen de la Geometría fue jugado por la astronomía observacional.

Los primeros pasos en la aparición y desarrollo de la Geometría los dieron las civilizaciones egipcia y babilonia, que descubrieron formas de cálculo de distancias, áreas y volúmenes. En todos estos logros, la resolución de problemas prácticos fue el estímulo básico.

La Geometría egipcia, eminentemente práctica, pasa a Grecia y allí empieza a convertirse en una teoría matemática que busca fundamentar sus resultados sobre el razonamiento formal. El paso de la Geometría como un conjunto de reglas prácticas a una teoría matemática tardó varios siglos.

En el siglo III a. e. c, aparece *Los elementos*, obra atribuida a Euclides en los que las afirmaciones de la Geometría, muchas de ellas con siglos de antigüedad, son justificadas mediante el ejercicio de reglas lógicas. En esta, la Geometría se convierte en una ciencia que prueba sus afirmaciones mediante cadenas de razonamiento a partir de unas proposiciones básicas tomadas como puntos de partida.

Trazado de los límites de una parcela. Los antiguos egipcios empleaban una cuerda de 12 nudos para trazar ángulos rectos y garantizar la forma rectangular de las parcelas.

2 Conceptos primitivos y derivados

Una idea o concepto se llama primitivo o primario si no admite ser definido en términos de otros más simples.

En Geometría son conceptos primarios el punto, la recta y el plano. Si imaginamos a la Geometría como un edificio, estos conceptos juegan el papel de los ladrillos de construcción.

Los conceptos de rayo, segmento y ángulo, llamados conceptos derivados, se definen empleando a los de punto, recta y plano.

De no existir conceptos primitivos, la Geometría implicaría una cadena infinita de definiciones y no podría ser fundada sobre bases firmes.

Sugerencias didácticas

- **Inicio:** Motive a sus estudiantes para que lean y respondan las preguntas vinculadas a la recuperación de experiencias previas propuestas en el apartado *Recuperación* relacionadas con puntos, líneas o rectas y planos geométricos.
- **Desarrollo:** Pídales que lean cuidadosamente el contenido de la doble página y que observen las representaciones gráficas. Propóngales que observen la imagen de los antiguos egipcios en el margen izquierdo de la página y que lean y comenten las informaciones al pie de la misma. Formúleles preguntas como, por ejemplo: *¿Por qué el punto, la recta y el plano son conceptos primitivos de la Geometría?* Continúe con las preguntas.

3 Puntos, rectas y planos

Un punto geométrico se asocia a la marca de un lápiz de punta muy afilada sobre una hoja de papel.

Un punto no tiene largo, ancho o altura.

Una línea recta es el concepto geométrico relacionado con el borde de una regla o un rayo de luz.

Una línea recta se extiende indefinidamente a ambos lados de cualquiera de los puntos que la forman.

Un plano es el concepto geométrico que se vincula a la superficie lisa de una hoja de papel o de un estanque tranquilo.

Un plano se extiende también indefinidamente, como una recta, pero en dos dimensiones, largo y ancho.

4 Rayos y segmentos

Un rayo o semirrecta es el resultado de tomar un punto **P** de una recta y todos los demás, **Q**, **R**, **S**, … a un lado u otro de dicho punto.

El rayo de la figura anterior, que sale de **P**, se designa: $\overrightarrow{\mathbf{PQ}}$.

Un segmento es el conjunto de puntos de una recta comprendidos entre dos puntos dados, que son sus extremos.

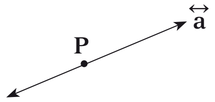
El segmento de la figura, de extremos **P** y **Q**, se designa: $\overline{\mathbf{PQ}}$.

Punto

• P

Para designar un punto se usa una letra mayúscula: **P**, **Q**, **R**, …

Recta



Para designar una recta se usa una letra sobre la cual se coloca una doble flechita: $\overleftrightarrow{a}$, $\overleftrightarrow{b}$, $\overleftrightarrow{c}$, …

Plano

Un plano se nombra, como se nombra un punto, mediante una letra mayúscula.

ACTIVIDADES

1 Piensa y, luego, contesta las preguntas justificando tus respuestas.

- ¿Podrías emplear el concepto de línea recta para definir lo que es un punto geométrico? ¿Cómo lo harías?
  Sí. Un punto es el resultado de intersecar dos rectas.
- ¿Puede afirmarse que tres puntos no alineados siempre están situados sobre un plano? ¿Puedes afirmar lo mismo de cuatro puntos?
  Tres puntos siempre están en plano; cuatro puntos no.

- **Desarrollo:** Converse con sus estudiantes sobre los orígenes de la Geometría y la presencia de la misma en la producción agrícola, en la astronomía y en su aparición en el desarrollo de las antiguas civilizaciones egipcia y babilonia. Motíveles a investigar sobre el tema y, luego, discutir los resultados en el grupo. Haga que lean y reproduzcan en sus cuadernos los conceptos ubicados en el margen derecho de la página 9.
- **Cierre:** Motive a sus estudiantes a realizar en sus cuadernos los ejercicios del apartado *Actividades*. En la actividad 1, pensarán las preguntas planteadas y, luego, las contestarán justificando sus respuestas.

Atención a la diversidad

Actividad de refuerzo: Forme varias agrupaciones de estudiantes con su regla a la mano y hojas de papel cuadriculado y, luego, pídales que tracen los siguientes segmentos y determinen las coordenadas de sus puntos medios.

- **A**(6, – 4) ; **B**(4, 6).
- **C**(4, – 2) ; **D**(3, 5).
- **E**(–3, 7) ; **F**(– 4, 2).
- **G**(0, – 3) ; **H**(5, 8).
- **I**(8, 6) ; **J**(0, – 5).
- **A**(4, – 3) ; **B**(3, 7).

Propóngales que dibujen sobre el plano cartesiano los segmentos de la actividad anterior, destacándolos con colores distintos.

Ficha 1.

Aprender a aprender

Pregunte a sus estudiantes: *¿Qué conocimientos previos sobre el punto, la recta y el plano pueden expresar?¿Creen que esos conocimientos facilitaron el aprendizaje de estos conceptos? ¿Por qué?*

Indicadores de logro

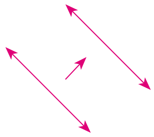
- **Reconoce** los conceptos de *axioma* o *postulado*, *definición* y *teorema*.
- **Reconoce** y **distingue** el papel de los axiomas, las definiciones y los teoremas en la Geometría.

RECUPERACIÓN

Piensa y responde.

- ¿Cómo se puede producir un plano a partir de una línea recta?

Desplazando la recta en una misma dirección.



1 Axiomas o postulados

Un axioma o postulado es una proposición que se toma como punto de partida para realizar la prueba o demostración de otras proposiciones.

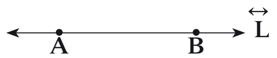
Los axiomas se admiten sin que tengan que ser probados. Esta característica de los axiomas evita la regresión infinita de las pruebas o demostraciones: si los axiomas tuvieran que ser probados, sus pruebas necesitarán a su vez de otros axiomas y estos, a su vez, de otros y así sucesivamente, sin término.

Tradicionalmente, se llegó a afirmar de los axiomas que eran verdades evidentes. En la actualidad se conciben como un simple punto de partida, asumidos sin que sean verdades evidentes.

EJEMPLOS:

- La proposición: *Por un punto* **P** *exterior a una recta* $\overleftrightarrow{L}$ *pasa una y solo una recta paralela* es el axioma de las paralelas.

- La proposición: *Por dos puntos distintos,* **A** y **B**, *pasa una y solo una recta,* $\overleftrightarrow{L}$, también es un axioma.



2 Definiciones

Una definición es una proposición que proporciona el significado de algún concepto.

El concepto definido no puede aparecer en la propia definición. En estos casos se afirma que la definición es circular y se considera defectuosa o no válida.

EJEMPLOS:

- La afirmación: *Tres puntos,* **A**, **B** y **C**, *son coplanares si pertenecen a un único plano* **P**, es una definición expresada en términos de un concepto primario como lo es el de plano.
- La proposición: *Un ángulo es la región del plano entre dos rayos con un origen común* también es una definición.

Más información

Postulados de la existencia de los puntos:

- El espacio contiene, por lo menos, cuatro puntos no coplanares.
- Una recta contiene, por lo menos, dos puntos colineales.
- Un plano contiene, por lo menos, tres puntos no colineales.
- Por dos puntos pasa una recta y solo una.
- El camino más corto entre dos puntos es la recta que los une.
- Dos rectas no pueden cortarse en más de un punto.
- Tres puntos no colineales determinan un plano.
- Una recta contenida en un plano divide al mismo en dos partes llamadas semiplano.
- Cualquier figura geométrica puede trasladarse sin modificar su forma ni su tamaño.

Sugerencias didácticas

- **Inicio:** Motive a sus estudiantes para que lean y respondan en el aula la pregunta vinculada a recuperación de experiencias previas propuesta en el apartado *Recuperación*, la cual está relacionada con la línea recta y el plano.
- **Desarrollo:** Haga que sus estudiantes lean cuidadosamente el contenido de la doble página y que observen, con detenimiento, las representaciones gráficas y los ejemplos propuestos. Después, pregunte al grupo: *¿Qué es un axioma o postulado? ¿Qué es un teorema?*

3 Teoremas

Un **teorema** es una proposición que necesita ser probada mediante un conjunto finito y ordenado de pasos.

El conjunto finito de pasos necesarios para probar la validez de un teorema forma parte de su **demostración**.

Los teoremas muestran propiedades de números, figuras y cualquier otra clase de objeto matemático, no inmediatamente evidentes.

EJEMPLO:

- La proposición: *La suma de las medidas de los tres ángulos internos de un triángulo es 180º* es el teorema fundamental del triángulo.

Esta afirmación solo se admite como verdadera después de ser probada o demostrada.

4 Corolarios

Un **corolario** es un teorema que se deriva de otro teorema que ya ha sido demostrado.

EJEMPLO:

- La afirmación: *La suma de las medidas de los ángulos agudos en un triángulo rectángulo es 90º* es un corolario del teorema fundamental del triángulo.

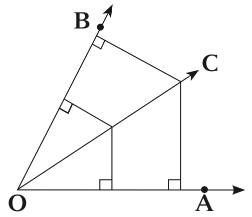
SABER MÁS

Lema

Un **lema** es un teorema ya demostrado que se usa como un axioma.

Ejemplo:

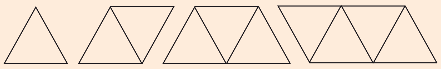
- Para probar que: *El conjunto de puntos a igual distancia de dos rectas que se cortan es la bisectriz de los ángulos formados por dichas rectas,* se debe haber probado que: *Dos triángulos rectángulos son congruentes si tienen iguales la hipotenusa y un ángulo adyacente* (Lema).



ACTIVIDADES

2 Haz lo que se te pide.

- **Observa** la secuencia de figuras y **encuentra** la regla para determinar el número de segmentos, conocido el número de triángulos que las forman.



Número de segmentos = 2 (número de triángulos) + 1.

3 Responde la pregunta. Luego, expón tu respuesta y comenta las de tus compañeros.

- ¿Hay límites para el número de pasos en que un teorema puede ser demostrado? ¿Por qué respondiste del modo en que lo hiciste?

Siempre un teorema se demostrará en un número finito de pasos.

4 Construye un corolario para el teorema dado, asociado a la figura de un cuadrado.

La suma de los ángulos internos de un cuadrado es 360˚ y estos ángulos son rectos.

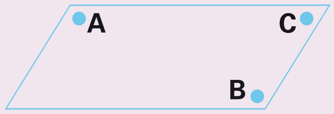
T: *La suma de los ángulos internos de un polígono de **n** lados es 180º (**n** – 2).*

- **Desarrollo:** Muestre a sus estudiantes los ejemplos de postulados y teoremas desarrollados en la doble página y adicione otros más, en la medida de lo posible. Motíveles para que lean y reproduzcan el contenido del apartado *Saber más*, que muestra el concepto de *lema* y desarrolla un ejemplo. Pídales que reproduzcan este ejemplo en sus cuadernos.
- **Cierre:** Motive a sus estudiantes a realizar los ejercicios del apartado *Actividades*. En la actividad 2, observarán la secuencia de figuras y, luego, encontrarán la regla para determinar el número de segmentos, conocido el número de triángulos que la forman. En la actividad 3, construirán un corolario para el teorema dado, asociado a la figura de un cuadrado. Acompáñeles en el proceso de realización de estos ejercicios.

Atención a la diversidad

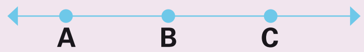
Actividades de refuerzo: Pida a sus estudiantes que observen las representaciones gráficas y, luego, respondan las preguntas.

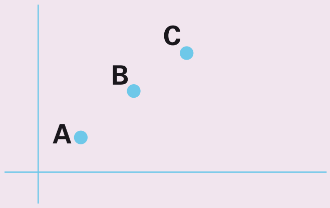
- ¿Qué postulado se muestra en esta figura?



Resp.: El postulado del plano: Tres puntos que no pertenecen a una línea recta determinan un plano.

- ¿Cómo son los puntos representados en estas figuras?





Resp.: Son puntos colineales.

Ficha 2.

Aprender a aprender

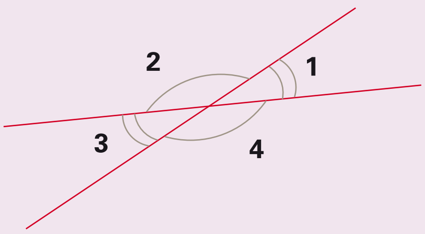
Pregunte a sus estudiantes: *¿Tuvieron alguna dificultad para comprender los temas desarrollados en esta doble página? ¿En qué consistió el problema? ¿Qué hicieron para resolverlo?*

Indicador de logro

- **Identifica** las partes de un teorema, su significado y la función que desempeña cada una de sus partes.

Más información

Teorema: Si dos ángulos son opuestos por el vértice, 1 y 2, entonces dichos ángulos son congruentes.



Hipótesis: Ángulos 1 y 3 son opuestos por el vértice.

Tesis: Ángulos 1 y 3 son congruentes.

Demostración:

- Ángulos 1 más 2 = 180°, porque son suplementarios.
- Ángulos 3 más 4 = 180°, porque son suplementarios.
- Ángulos 1 más 2 = ángulos 3 más 4.
- Entonces ángulo 3 es igual al ángulo 1, por lo tanto, son congruentes.

Debemos dar razones válidas que la justifiquen.

RECUPERACIÓN

Piensa y, luego, responde.

- ¿Qué hace falta cuando queremos probar alguna afirmación acerca de hechos de la vida cotidiana?
- ¿Qué diferencia ves entre una prueba que se pide en caso de hechos cotidianos y una prueba matemática?

1 Demostración de un teorema

Un sistema formal, $\mathcal{S}$, es una estructura formada por un lenguaje, **L**, y sus reglas para formar expresiones correctas; reglas de inferencia para alcanzar conclusiones, **R**, y un conjunto de axiomas, **A**.

Los sistemas formales tienen los medios, necesarios y suficientes, para probar o demostrar cualquier teorema asociado al mismo.

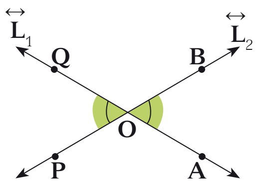
En la prueba de cualquier teorema, **T**, se presentan los elementos siguientes:

- Las hipótesis, proposiciones que se suponen verdaderas.
- La tesis, que es la proposición que se va a demostrar.
- La demostración, que es el proceso organizado que conduce, en un número finito de pasos, al establecimiento de la verdad de la tesis.

EJEMPLO:

- Probar la siguiente afirmación: *Dos ángulos opuestos por el vértice tienen igual medida, **m***.

Rectas que se cortan



Hipótesis:

Las rectas $\overleftrightarrow{L_1}$ y $\overleftrightarrow{L_2}$ al cortarse en **O**, forman un par de ángulos opuestos por el vértice.

Tesis: $m\sphericalangle AOB = m\sphericalangle POQ$.

Demostración:

El axioma: *La suma de las medidas de los ángulos adyacentes formados por la intersección de dos rectas es 180º,* (1), permite escribir:

$m\sphericalangle AOB + m\sphericalangle BOQ = 180°$ $\qquad m\sphericalangle BOQ + m\sphericalangle POQ = 180°$.

Del axioma: *Dos magnitudes iguales a una tercera son iguales entre sí,* (2), se tiene:

$$m\sphericalangle AOB + m\sphericalangle BOQ = m\sphericalangle BOQ + m\sphericalangle POQ.$$

El axioma: *Si a dos magnitudes iguales se suma o resta una misma cantidad, la igualdad no se altera si,* (3), permite escribir:

$$m\sphericalangle AOB = m\sphericalangle POQ.$$

El teorema queda demostrado.

Sugerencias didácticas

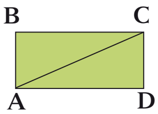
- **Inicio:** Oriente a sus estudiantes para que respondan en el aula la actividad de recuperación de experiencias previas propuesta en el apartado *Recuperación*, relacionada con pruebas vinculadas a la cotidianidad y a las matemáticas.
- **Desarrollo:** Haga que lean cuidadosamente el contenido de la doble página, que observen los pasos para demostrar teoremas en Geometría y la demostración por inducción matemática. Motíveles para que observen la gráfica de la demostración de las rectas que se cortan en el margen izquierdo de la página 12.

2 Otro ejemplo de demostración en Geometría

- Probar la siguiente proposición: *Los lados opuestos de un paralelogramo tienen la misma longitud.*

Hipótesis:

La figura **ABCD** es un paralelogramo y $\overline{\mathbf{AC}}$ es la diagonal que une los vértices **A** y **C**.



Tesis: $\overline{\mathbf{AB}} = \overline{\mathbf{CD}}$; $\overline{\mathbf{AD}} = \overline{\mathbf{BC}}$

Demostración:

El axioma: *Toda magnitud es igual a sí misma* (1) permite escribir que el lado **AC** es el mismo para los triángulos **ABC** y **ACD** en que la diagonal divide al paralelogramo.

El teorema: *Si una línea recta corta a un par de líneas paralelas, los pares de ángulos alternos internos formados tienen igual medida*, (2), tomado aquí como un lema, conduce:

$$m\sphericalangle DAC = m\sphericalangle BCA \qquad m\sphericalangle BAC = m\sphericalangle DCA$$

El teorema: *Dos triángulos son congruentes si tienen iguales uno de sus lados y de igual medida los ángulos adyacentes a ese lado, (3), que también funciona como un lema*, permite escribir que los lados opuestos del paralelogramo **ABCD** cumplen con: $\overline{\mathbf{AB}} = \overline{\mathbf{CD}}$; $\overline{\mathbf{AD}} = \overline{\mathbf{BC}}$.

Con lo que se demuestra la tesis.

3 Inducción matemática

Una demostración por inducción matemática se basa en el principio de inducción completa: si la propiedad **P** es verdadera para un número natural, **k**, también lo será para el sucesor de ese número, **k** + 1, y, por extensión, para todos los números naturales.

Demostración por inducción

- Probar que la propiedad **P**(**n**) es verdadera para cualquier natural, **n**:

$$(x/y)^n = x^n/y^n$$

1.º Si **n** = 1:

$(x/y)^1 = x^1/y^1 = x/y$

P(1) es verdadera.

2.º Si **n** = **k**, se asume que **P**(**k**) es cierta (Hipótesis de inducción):

$(x/y)^k = x^k/y^k$.

3.º Si **P**(**k**) es verdadera, **P**(**k** + 1) también lo es:

$(x/y)^{k+1} = x^{k+1}/y^{k+1}$

$(x/y)^{k+1} = (x/y)^k\,(x/y)$

Como nuestra hipótesis $(x/y)^k = x^k/y^k$ se asume verdadera:

$(x/y)^{k+1} = (x/y)^k\,(x/y)$

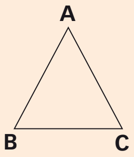
$= (x/y)^{k+1}$.

La identidad que resulta muestra que **P**(**n**) queda probada.

ACTIVIDADES

5 Identifica la hipótesis y la tesis en el teorema siguiente.

- *La suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo cualquiera,* ***ABC****, es 180º.*



6 Piensa y, luego, responde.

- ¿Por qué del teorema anterior puede inferirse la siguiente afirmación: *Todo triángulo del plano tiene, a lo sumo, o un ángulo recto, o un ángulo obtuso*?

Porque si tiene más de un ángulo recto u obtuso, la suma de sus ángulos internos sería mayor que 180º.

Actividad grupal

Forme varias agrupaciones de estudiantes y motíveles para que demuestren en sus cuadernos los siguientes teoremas matemáticos.

- Todo número elevado a un número impar más la unidad es siempre divisible por 8.
- La suma de los primeros números naturales (**n**) es igual **n**(**n** + 1) ÷ 2.
- El producto de tres números impares consecutivos es siempre divisible por 6.
- La suma de tres números enteros consecutivos es siempre divisible por 6.

Haga que comparen los resultados en el grupo y, luego, envíe un representante de cada grupo a la pizarra.

Ficha 3.

- **Desarrollo:** Muestre a sus estudiantes los ejemplos de la demostración de teoremas en Geometría desarrollados en la doble página. Motíveles para que lean y reproduzcan el contenido del apartado *Demostración por inducción.*
- **Cierre:** Motive a sus estudiantes a realizar los ejercicios del apartado *Actividades*. En la actividad 5, identificarán la hipótesis y la tesis en el teorema expresado. En la actividad 6, pensarán y, luego, expresarán por qué del teorema anterior puede inferirse la afirmación que se les indica. Acompáñeles en el proceso y compare los resultados en el grupo.

Aprender a aprender

Pregunte al grupo: *¿Les parecieron importantes los conceptos estudiados en esta oportunidad? ¿Qué utilidad para la cotidianidad tienen estos conceptos?*

Indicadores de logro

- **Identifica** y **construye** segmentos de longitud dada.
- **Reconoce** la congruencia de dos segmentos.

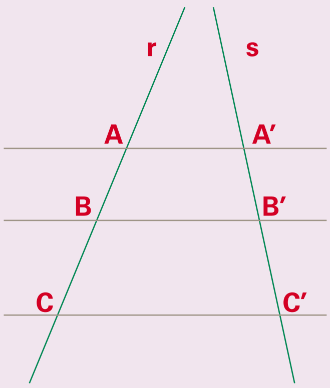
Más información

A modo de repaso, indique a sus estudiantes que un segmento es la porción de recta limitada por dos puntos, llamados extremos.

Se nombra por los puntos que lo limitan: **AB**.

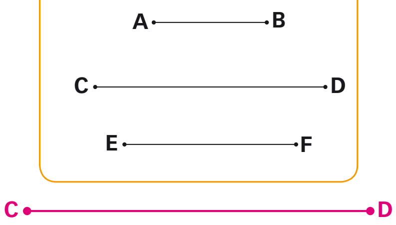
Dos rectas se cortan por varias rectas paralelas, los segmentos determinados en una de las rectas son proporcionales a los segmentos correspondientes en la otra.

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}$$



RECUPERACIÓN

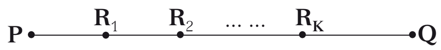
Mide las longitudes de los siguientes segmentos y traza un cuarto segmento que sea proporcional a los tres primeros.



1 Segmentos

Por dos puntos cualesquiera, **P** y **Q**, pasa una recta y solamente una recta, **L** (Postulado de la recta).

El conjunto de puntos al que pertenecen **P** y **Q** y los puntos comprendidos entre **P** y **Q** es un segmento, $\overline{\mathbf{PQ}}$, de la recta $\overleftrightarrow{\mathbf{L}}$.



A los puntos **P** y **Q** se les llama extremos del segmento.

El segmento $\overline{\mathbf{PQ}}$ es la unión de sus extremos {**P**, **Q**} y el conjunto de los puntos $\mathbf{R}_1$, $\mathbf{R}_2$, … …, $\mathbf{R}_k$, … … comprendidos entre los extremos:

$$\overline{\mathbf{PQ}} = \{\mathbf{P}, \mathbf{Q}\} \cup \{\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \ldots \ldots, \mathbf{R}_k, \ldots \ldots\}$$

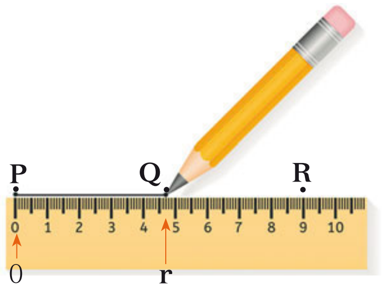
A todo segmento $\overline{\mathbf{PQ}}$ le corresponde un número real, $\mathbf{r} > 0$, llamado su longitud, ℓ.

La longitud puede interpretarse como una función ℓ que envía cualquier segmento $\overline{\mathbf{PQ}}$ a un número real positivo, **r**:

$$\ell: \overline{\mathbf{PQ}} \longrightarrow \mathbf{r}$$

2 Construcción de segmentos

Un segmento $\overline{\mathbf{PQ}}$ de longitud **r** se construye con una regla, como se observa en la figura siguiente:



Euclides (325–265 a.e.c). Considerado el iniciador de la Geometría como disciplina deductiva. Sobre su vida se conoce muy poco, llegando algunos a afirmar que Euclides es el nombre de un equipo o escuela de geómetras.

La longitud de un segmento ℓ cumple con:

- $\ell(\overline{\mathbf{PQ}}) = \ell(\overline{\mathbf{QP}})$
- $\ell(\overline{\mathbf{PR}}) = \ell(\overline{\mathbf{PQ}}) + \ell(\overline{\mathbf{QR}})$

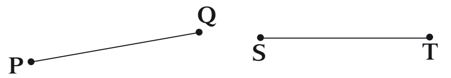
Si los puntos **P** y **Q** fueran coincidentes, no formarían un segmento y se cumpliría: $\ell(\overline{\mathbf{PP}}) = 0$.

Sugerencias didácticas

- **Inicio:** Oriente a sus estudiantes para que lean y realicen en el aula la actividad vinculada a la recuperación de experiencias previas propuesta en el apartado *Recuperación*, en la que medirán las longitudes de los segmentos representados y, luego, trazarán un tercer segmento que sea proporcional a los segmentos dados.
- **Desarrollo:** Pídales que lean el contenido de la doble página, que observen las representaciones gráficas y el desarrollo de los conceptos y los ejemplos resueltos. Pídales que se fijen en la imagen de Euclides y que lean y comenten en el grupo la información al pie de la misma.

3 Congruencia y proporcionalidad de segmentos

Dos segmentos son congruentes si tienen la misma longitud.



$\measuredangle(\overline{PQ}) = \measuredangle(\overline{ST})$

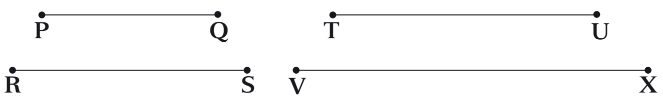
La congruencia de $\overline{PQ}$ y $\overline{ST}$ se designa con: $\overline{PQ} \cong \overline{ST}$.

La congruencia de segmentos cumple con:

- $\overline{PQ} \cong \overline{PQ}$
- $\overline{PQ} \cong \overline{ST} \rightarrow \overline{ST} \cong \overline{PQ}$
- $[(\overline{PQ} \cong \overline{ST}) \wedge (\overline{ST} \cong \overline{UV})] \rightarrow \overline{PQ} \cong \overline{UV}$

Cuatro segmentos son proporcionales si con sus longitudes se puede construir una proporción.

Los segmentos $\overline{PQ}$, $\overline{RS}$, $\overline{TU}$ y $\overline{VX}$ son proporcionales si:

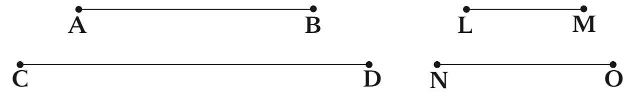


$\measuredangle(\overline{PQ})/\measuredangle(\overline{RS}) = \measuredangle(\overline{TU})/\measuredangle(\overline{VX}) = \text{constante}.$

En forma más simple: $\overline{PQ} / \overline{RS} = \overline{TU} / \overline{VX}$

EJEMPLO RESUELTO:

- Comprobar la proporcionalidad de los segmentos.



$\overline{AB}/\overline{CD} = 4\text{ cm}/6\text{ cm} = \overline{LM}/\overline{NO} = 2\text{ cm}/3\text{ cm} = 0.666\ldots$

SABER MÁS

Mediatriz de un segmento

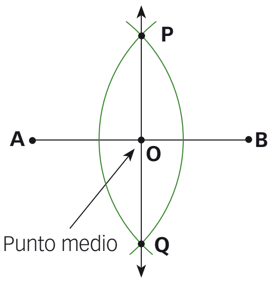
La mediatriz de un segmento es la recta perpendicular que divide al segmento en dos partes iguales (segmentos congruentes).

Para trazar una mediatriz se procede como sigue:

1.º Se toma un compás con una abertura mayor que la mitad del segmento.

2.º Apoyando el compás en los extremos, **A** y **B**, del segmento se trazan, con la misma abertura, dos arcos que se cortarán en **P** y **Q**.

3.º Finalmente, se traza la recta que pasa por los puntos **P** y **Q**. Esta recta es la mediatriz.



ACTIVIDADES

7 Construye.

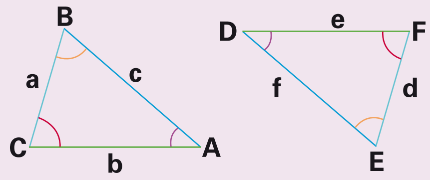
- Un segmento de 9 cm.
- Un segmento de 10.5 cm.
- Un segmento de 12.6 cm.

8 Traza dos segmentos que formen una proporción con los segmentos AB y MN.

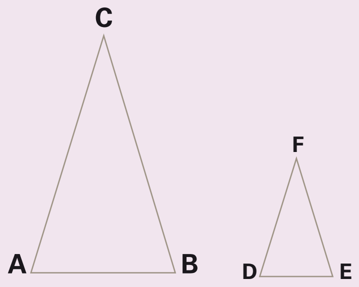
- **Desarrollo:** Muestre a sus estudiantes los ejemplos de congruencia y proporcionalidad de segmentos mostrados en la doble página y diseñe otros ejemplos adicionales. Propóngales que lean y reproduzcan en sus cuadernos el contenido del apartado *Saber más*, que muestra los pasos para trazar la mediatriz de un segmento. En este caso se requiere que tengan a la mano su regla y su compás.
- **Cierre:** Motive a sus estudiantes a realizar los ejercicios propuestos en el apartado *Actividades*. En la actividad 7, construirán segmentos de medidas acordes con las especificaciones. En la actividad 8, trazarán los segmentos que formen una proporción con los segmentos **AB** y **MN**.

Atención a la diversidad

Actividades de refuerzo: Solicíteles que identifiquen los lados congruentes de los siguientes triángulos.



Pida que identifiquen los lados semejantes de los siguientes triángulos.



Ficha 4.

Aprender a aprender

Pregunte al grupo: *¿Podrían explicar a un compañero o a una compañera de aula los pasos para trazar la mediatriz de un segmento?*

Indicadores de logro

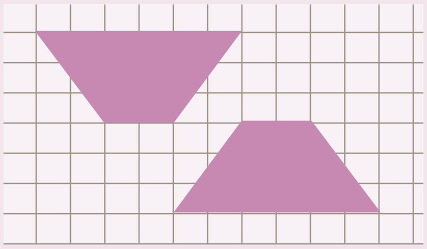
- **Identifica** y **construye** figuras semejantes y congruentes.

Actividad interactiva

Homotecia y semejanza

Actividad interactiva que muestra cómo se produce la homotecia de una figura geométrica en el plano. Los estudiantes podrán aumentar o disminuir las dimensiones de la figura reproducida con el ratón.

Competencia comunicativa en Matemática



Dos figuras son congruentes si tienen los lados iguales y el mismo tamaño o, también, si están relacionadas por algún movimiento isométrico que las relaciona en una transformación en la que se combinen traslaciones, rotaciones y reflexiones. Dos figuras son congruentes si tienen la misma forma y tamaño, aunque su posición u orientación no sean las mismas. Las partes que coinciden en las figuras congruentes se llaman homólogas o correspondientes.

Dos figuras son semejantes cuando tienen igual forma, pero distintos tamaños. Una semejanza puede producirse por la rotación y una posible reflexión o simetría axial.

RECUPERACIÓN

Responde las preguntas y justifica tus respuestas.

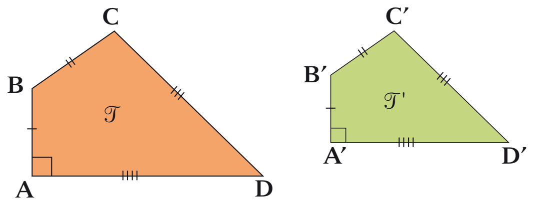
- ¿Dos cuadrados cualesquieras, **C** y **C′**, son siempre semejantes?
  Sí, porque sus lados son iguales.
- ¿Y dos rectángulos siempre lo son?
  No, porque tienen lados desiguales.

Arte y Geometría. Motivo formado por triángulos en el que se observan figuras congruentes y semejantes.

1 Figuras semejantes

Dos o más figuras son semejantes si tienen la misma forma y tamaños distintos.

Los lados y los ángulos que ocupan la misma posición en dos figuras semejantes, $\mathcal{T}$ y $\mathcal{T}'$, se llaman lados y ángulos homólogos.



AB y **A′B′**; **BC** y **B′C′**; **CD** y **C′D′**; **AD** y **A′D′** son pares de lados homólogos de las figuras $\mathcal{T}$ y $\mathcal{T}'$.

En las figuras, $\measuredangle$**A** y $\measuredangle$**A′**; $\measuredangle$**B** y $\measuredangle$**B′**; $\measuredangle$**C** y $\measuredangle$**C′**; $\measuredangle$**D** y $\measuredangle$**D′** son pares de ángulos homólogos.

Los ángulos homólogos tienen igual medida o son congruentes:

$$\measuredangle A \cong \measuredangle A';\ \measuredangle B \cong \measuredangle B';\ \measuredangle C \cong \measuredangle C';\ \measuredangle D \cong \measuredangle D'.$$

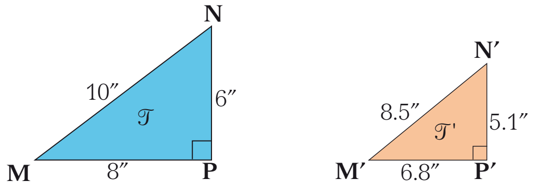
Para simbolizar que $\mathcal{T}$ y $\mathcal{T}'$ son semejantes se usa: $\mathcal{T} \sim \mathcal{T}'$.

La razón de los lados homólogos o razón de semejanza, **r**, es una constante:

$$\overline{AB}/\overline{A'B'} = \overline{BC}/\overline{B'C'} = \overline{CD}/\overline{C'D'} = \overline{AD}/\overline{A'D'} = \text{constante.}$$

EJEMPLO RESUELTO:

- Comprobar que los triángulos siguientes, **MNP** y **M′N′P′**, son semejantes.



$$MN/M'N' = NP/N'P' = MP/M'P' = 1.1764706$$

La semejanza de dos figuras cumple con:

- $\mathcal{T} \sim \mathcal{T}'$
- $\mathcal{T} \sim \mathcal{T}' \longrightarrow \mathcal{T}' \sim \mathcal{T}$
- $[(\mathcal{T} \sim \mathcal{T}') \land (\mathcal{T}' \sim \mathcal{T}'')] \longrightarrow \mathcal{T} \sim \mathcal{T}''$

Sugerencias didácticas

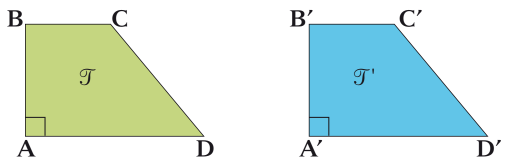
- **Inicio:** Oriente a sus estudiantes para que lean y realicen en el aula la actividad vinculada a la recuperación de experiencias previas propuesta en el apartado *Recuperación*, en la que responderán preguntas relacionadas con la semejanza de cuadrados y rectángulos.
- **Desarrollo:** Pídales que lean el contenido de la doble página, que observen las representaciones gráficas y los procedimientos aplicados en el desarrollo de los ejemplos resueltos. Pídales que se fijen y lean el pie de la imagen de la figura de arte y Geometría en el margen izquierdo de esta página.

2 Figuras congruentes

Dos o más figuras son congruentes si tienen la misma forma y el mismo tamaño.

La congruencia de dos figuras, $\mathcal{T}$ y $\mathcal{T}'$, se escribe: $\mathcal{T} \cong \mathcal{T}'$.

Los lados y los ángulos homólogos en dos figuras congruentes son también congruentes.



$\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$; $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$; $\overline{CD} \cong \overline{C'D'}$; $\overline{AD} \cong \overline{A'D'}$.

$\measuredangle A \cong \measuredangle A'$; $\measuredangle B \cong \measuredangle B'$; $\measuredangle C \cong \measuredangle C'$; $\measuredangle D \cong \measuredangle D'$.

La razón de los lados homólogos de $\mathcal{T}$ y $\mathcal{T}'$ es la unidad:

$$AB/A'B' = BC/B'C' = CD/C'D' = AD/A'D' = 1.$$

Puesto que es un caso particular de semejanza en el que la razón es la unidad, **r** = 1, la congruencia cumple con las mismas propiedades de aquella.

EJEMPLO RESUELTO:

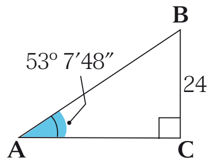
- Determinar los valores de **x** e **y** en los triángulos congruentes **ABC** y **PQR** de la derecha.

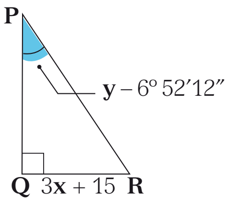
  Puesto que **ABC** ≅ **PQR**:

  $3x + 15 = 24 \longrightarrow 3x = 24 - 15$

  Entonces: $x = 9$

  $y - 6° 52' 12'' = 53° 7' 48''$. Luego: $y = 60°$.





INTELIGENCIA COLABORATIVA

Construcción de figuras semejantes sobre una cuadrícula

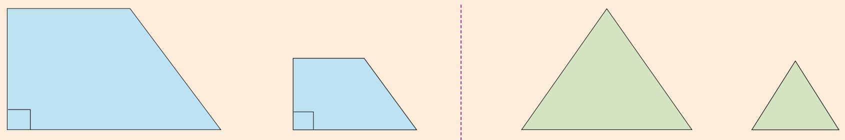
Elijan un punto de referencia como origen **O** y marquen los puntos siguientes de coordenadas dadas:

A(1, 2); **B**(1, 7); **C**(5, 5)

Luego, construyan, con un compás como transportador de medidas de longitud, figuras semejantes a **ABC**, que tengan las razones de semejanza **r** = 2 y **r** = 3.

ACTIVIDADES

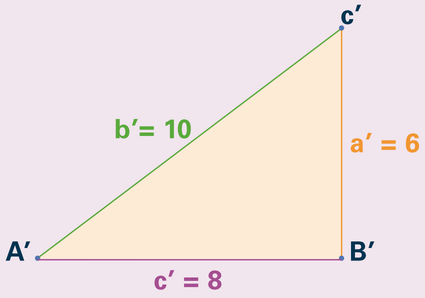
9 Descubre, midiendo con una regla las longitudes de los lados, los pares de figuras semejantes.

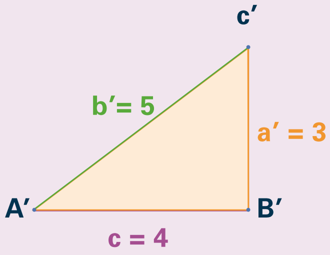


- **Desarrollo:** Muestre a sus estudiantes el proceso de solución de los ejemplos resueltos de la doble página y diseñe otros más. Haga que determinen la semejanza y congruencia de figuras diversas enviándoles a la pizarra. Propóngales que lean y realicen, en grupos, la actividad propuesta en el apartado *Inteligencia colaborativa*, en la que construirán figuras semejantes sobre una cuadrícula. Haga que construyan figuras similares adicionales a las de esta actividad.
- **Cierre:** Motive a sus estudiantes a realizar los ejercicios propuestos en el apartado *Actividades*. En la actividad 9, descubrirán, midiendo con una regla las longitudes de los lados, los pares de figuras semejantes.

Atención a la diversidad

Actividades de refuerzo: Solicíteles que comprueben, aplicando las operaciones correspondientes, que los siguientes triángulos son semejantes.





Resp.: **A′C′/AC** = 2.

C′B′/CB = 2.

A′B′/AB = 2.

Ficha 5.

Aprender a aprender

Pregunte al grupo: *¿Cuál es la diferencia entre dos figuras congruentes y dos figuras semejantes?*

Competencias

- Comunicativa.
- Usa algoritmos.
- Resolución de problemas.

Indicadores de logro

- **Identifica** y **expone** momentos importantes del desarrollo histórico de la Geometría. **Reconoce** conceptos primitivos y derivados de la Geometría. **Reconoce** los conceptos de *punto*, *recta*, *plano*, *rayo* y *segmento*. **Reconoce** los conceptos de *axioma* o *postulado*, *definición* y *teorema*. **Reconoce** y **distingue** el papel de los axiomas, las definiciones y los teoremas en la Geometría. **Identifica** las partes de un teorema, su significado y la función que desempeña cada una de sus partes. **Identifica** y **construye** segmentos de longitud dada. **Reconoce** la congruencia de dos segmentos. **Identifica** y **construye** figuras semejantes y congruentes. **Resuelve** problemas del contexto que involucran elementos básicos de la Geometría.

ACTIVIDADES

10 Escribe V o F al lado de cada afirmación.

F *Un teorema es una afirmación evidente que no necesita ser demostrada.*

F *Los postulados son teoremas secundarios que son consecuencia de otro teorema.*

V *Un sistema formal está hecho de axiomas, reglas de inferencia y un lenguaje.*

V *Un lema es un teorema, previamente demostrado, usado en una demostración.*

11 Lee, piensa y, luego, escribe dónde está el error en cada enunciado.

- E_1: Dos rectas cualesquiera determinan un plano y solamente un plano.
  Las rectas pueden ser coincidentes.
- E_2: Por tres puntos cualesquiera pasan, como máximo, tres líneas rectas.
  Sí los puntos son colineales no determinan tres rectas.
- E_3: Cuatro puntos siempre estarán sobre un plano y solo uno.
  Pueden estar tres en un plano y uno fuera de él.
- E_4: Dos rectas cualesquiera no paralelas siempre se cortarán en un punto.
  Pueden estar en el espacio y no cortarse.

12 Lee el texto y, luego, demuestra que las fórmulas siguientes son verdaderas.

Un sistema formal *S* está constituido por:

1. Los símbolos: Δ, Ω, $\tilde{}$, (,), = .
2. Los axiomas:
   a) Δ y Ω son objetos distintos.
   b) $\tilde{}$ es una operación.
   c) Las operaciones encerradas por paréntesis se efectúan primero.
3. Las reglas de inferencia:

$\Delta\,\tilde{}\,\Omega = \Omega\,\tilde{}\,\Delta = \Omega$ $\quad$ $\Delta\,\tilde{}\,\Delta = \Omega\,\tilde{}\,\Omega = \Delta$

Fórmulas:

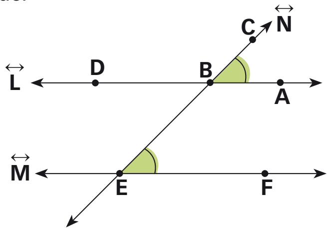
- $(\Delta\,\tilde{}\,\Omega)\,\tilde{}\,\Delta = \Omega$
- $(\Omega\,\tilde{}\,\Omega)\,\tilde{}\,\Delta = \Delta$
- $(\Delta\,\tilde{}\,\Delta)\,\tilde{}\,\Omega = \Omega$
- $(\Delta\,\tilde{}\,\Delta)\,\tilde{}\,(\Omega\,\tilde{}\,\Delta) = \Omega$

13 Explica por qué la expresión siguiente no es una fórmula en el sistema formal *S* descrito en la actividad anterior.

$$((\Delta\,\tilde{}\,\Omega)\,\tilde{}\,\Omega)^* = \Delta$$

*La operación * no pertenece a S.*

14 Observa la figura, lee y, luego, haz lo que se te pide.



Prueba que:

T: *Los ángulos correspondientes entre paralelas, ∢**ABC** y ∢**FEB**, son congruentes.*

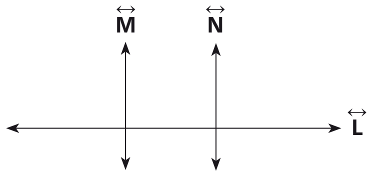
Utiliza como recursos la hipótesis **H** y los lemas L_1 y L_2:

H: $\overleftrightarrow{L}$ y $\overleftrightarrow{M}$ *son rectas paralelas y* $\overleftrightarrow{N}$ *una transversal que las corta.*

L_1: *Los ángulos opuestos por el vértice, ∢**ABC** y ∢**DBE**, son congruentes.*

L_2: *Los ángulos alternos internos, ∢**FEB** y ∢**DBE**, son congruentes.*

15 Observa la figura y, luego, demuestra **T**.



T: *Dos rectas distintas,* **L** *y* **M**, *de un mismo plano perpendiculares a una tercera recta,* **L**, *son paralelas.*

En tu demostración y identifica la hipótesis y toma como lema la proposición:

T': *Desde un punto exterior a una recta solo puede trazarse una perpendicular y solo una.*

Competencias específicas

Competencia comunicativa

Es necesario que los estudiantes adquieran las habilidades necesarias para identificar los elementos fundamentales de la Geometría y los segmentos y figuras semejantes y congruentes.

Uso de algoritmos

Las reglas y los procedimientos en la resolución de operaciones aritméticas son vitales para la consecución de resultados correctos. Por ejemplo, en las operaciones que involucran los pasos para calcular la razón de semejanza de figuras geométricas y para seguir los pasos correctos en las demostraciones de teoremas.

Sugerencias didácticas

- Las actividades propuestas en esta página están estrechamente vinculadas a los conceptos y procedimientos desarrollados a lo largo de la unidad. Haga que lean cuidadosamente las instrucciones y, después, verifique las respuestas obtenidas.
- Es importante observar de cerca que los estudiantes pueden demostrar teoremas y aplican el razonamiento deductivo y, además, diferencian los conceptos de *semejanza* y *congruencia de figuras* y las operaciones que las involucran.

16 Observa los dos primeros pasos de la demostración de **P**(**n**) por inducción matemática y, luego, escribe el tercer paso.

$\mathbf{P}(\mathbf{n})$: $1 + 3 + 5 + \ldots + (2\mathbf{n} - 1) = \mathbf{n}^2$

Primer paso:

P(1) es una proposición verdadera:

$\mathbf{P}(1) = 1 = (1)2$

Segundo paso:

$\mathbf{P}(\mathbf{k}) = 1 + 3 + \ldots + (2\mathbf{k} - 1) = \mathbf{k}^2$, es verdadera.

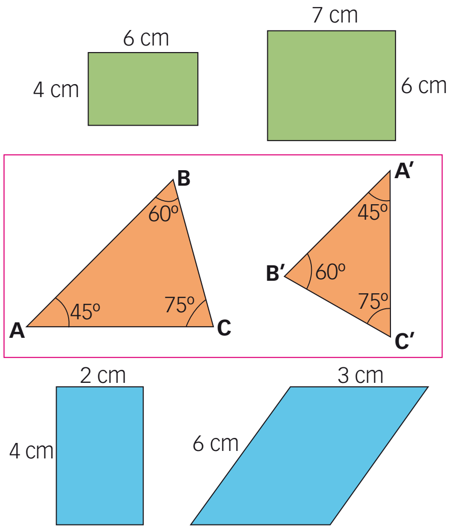
$\mathbf{P}(\mathbf{k}+1) = 1 + 3 + \ldots + [2(\mathbf{k}+1) - 1] = (\mathbf{k}+1)^2$.

17 Comprueba, dando valores enteros y positivos a **n**, la proposición siguiente.

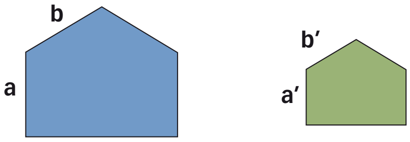
$$\mathbf{P}(\mathbf{n}): 1 + 2 + 3 + \ldots + \mathbf{n} = \frac{\mathbf{n}(\mathbf{n}+1)}{2}$$

- Prueba mediante inducción matemática que la proposición anterior, **P**(**n**), es verdadera para cualquier valor de **n**, que sea un número natural y, luego, explica la diferencia entre comprobar y probar una afirmación.

18 Identifica las figuras semejantes. Para hacerlo, mide sus lados con una regla.



19 Observa las figuras y demuestra la afirmación siguiente.



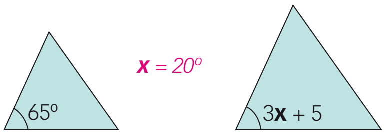
T: *Si dos figuras son semejantes, la razón de dos lados de una de ellas es igual a la razón de los lados homólogos de la otra*:

$$\mathbf{a}/\mathbf{b} = \mathbf{a}'/\mathbf{b}'$$

$\mathbf{a}/\mathbf{a}' = \mathbf{b}/\mathbf{b}' \longrightarrow \mathbf{ab}' = \mathbf{a}'\mathbf{b} \longrightarrow \mathbf{a}/\mathbf{b} = \mathbf{a}'/\mathbf{b}'$

20 Obtén el valor que debe tener **x** para que las piezas siguientes sean semejantes.

$\mathbf{x} = 2.5$

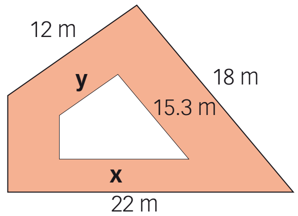


$\mathbf{x} = 20^\circ$

- Explica en el aula qué hiciste para obtener el valor de **x** en cada caso.

21 Resuelve el problema.

La figura siguiente muestra un jardín en forma de polígono cóncavo. Si sus bordes exterior e interior son polígonos semejantes, determina las medidas **x** e **y**.



$\mathbf{x} = 18.7$ m ; $\mathbf{y} = 10.2$ m

Competencias fundamentales

Pensamiento lógico, creativo y crítico

Los conocimientos adquiridos por los estudiantes son necesarios para identificar las alternativas más convenientes en la persecución de la solución de problemas que forman parte de su diario vivir. En este aspecto radica la importancia de que reconozcan, sin dificultad, los conceptos básicos de la Geometría y la historia de la misma.

Criterios de evaluación

Competencia comunicativa:

- Enfrenta situaciones de manera original con estrategias y medios diversos.

Competencia algoritmo:

- Seguimiento de las reglas, instrucciones y procedimientos.

Competencia pensamiento lógico, creativo y crítico

- Enfrenta situaciones de manera original con estrategias y medios diversos.

Sugerencias didácticas

Resolución de problemas

- Proponga a sus estudiantes que lean detenidamente las instrucciones de los problemas planteados en las actividades 16, 17, 18, 19, 20 y 21. Estos problemas son aplicaciones cotidianas de axiomas, teoremas, el razonamiento deductivo y la semejanza y congruencia de figuras geométricas. Acompañe a sus estudiantes en la realización de estas actividades y ofrézcales las orientaciones necesarias.

Aprender a aprender

Motive a sus estudiantes para que inventen ejemplos de las aplicaciones cotidianas de los conceptos desarrollados en la unidad. Por ejemplo, pregunte al grupo: *¿Qué pasos deben seguir para demostrar un teorema?* Discuta las diversas respuestas con el grupo.

Indicadores de logro de la evaluación

- **Identifica** y **expone** momentos importantes del desarrollo histórico de la Geometría. **Reconoce** conceptos primitivos y derivados de la Geometría. **Reconoce** los conceptos de *punto, recta, plano, rayo* y *segmento*. **Reconoce** los conceptos de *axioma* o *postulado, definición* y *teorema*. **Reconoce** y **distingue** el papel de los axiomas, las definiciones y los teoremas en la Geometría. **Identifica** las partes de un teorema, su significado y la función que desempeña en cada una de sus partes. **Identifica** y **construye** segmentos de longitud dada. **Reconoce** la congruencia de dos segmentos. **Identifica** y **construye** figuras semejantes y congruentes. **Resuelve** problemas del contexto que involucran elementos básicos de la Geometría. **Utiliza** recursos virtuales y electrónicos: computadora, programas educativos, juegos interactivos y otros, en la búsqueda de información.

Competencias específicas

- Comunica.
- Razona y argumenta.
- Modela y representa.
- Usa algoritmos.
- Conecta.
- Resuelve problemas.

Aprender a aprender

Plantear al grupo: *Si tienen que trazar un rectángulo sobre papel cuadriculado para luego trazar otro rectángulo semejante, ¿qué procedimientos deben seguir?*

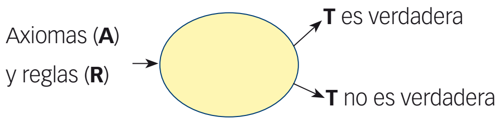
EVALUACIÓN

Comunica

22 Describe cada uno de los elementos presentes en la prueba de un teorema.

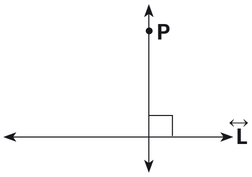
Razona y argumenta

23 Observa el esquema, piensa y, luego, responde la pregunta.



- Dos proposiciones, **T** y **T'**, tales que una afirme lo contrario de la otra, ¿pueden ser teoremas en el mismo sistema formal $\mathcal{S}$?
- Presenta argumentos que justifiquen la respuesta que diste.

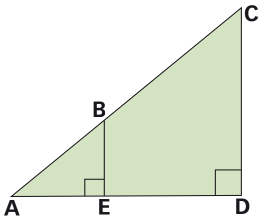
24 Identifica la hipótesis y la tesis en el siguiente teorema.



Por un punto, **P**, *exterior a una recta,* **L**, *puede trazarse una perpendicular y solamente una a dicha recta.*

Modela y representa

25 Construye dos proporciones con las longitudes de segmentos presentes en la figura siguiente.



Ejemplos: $\overline{AB}/\overline{AE} = \overline{AC}/\overline{AD}$; $\overline{BE}/\overline{AE} = \overline{CD}/\overline{AD}$

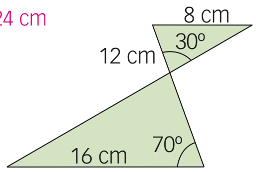
Usa algoritmos

26 Prueba, mediante inducción matemática, que la siguiente proposición es verdadera. NOTA: $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$P(n): 3 + 5 + 7 + \ldots + (2n + 1) = n^2 + 2n$$

27 Obtén el valor de **x** de la figura siguiente.

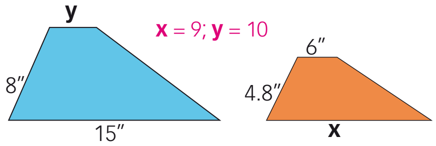
$x = 24$ cm



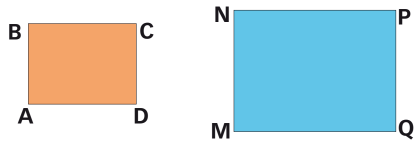
- Describe qué hiciste para calcular **x**.

28 Determina los valores de **x** e **y** en las siguientes figuras semejantes.

$x = 9$; $y = 10$



29 Averigua, empleando una regla graduada en centímetros, si las figuras **ABCD** y **MNPQ** son semejantes.



Conecta

30 Mide con una reglilla sobre el plano las longitudes de **a**, **b** y **c** y, luego, calcula las dimensiones reales de **a**, **b** y **c**.

Escala: 0 —— 500

Sugerencias didácticas para la evaluación

- Es importante verificar, antes de dar inicio a las actividades de evaluación, que sus estudiantes conocen los conceptos de *axioma* y *definición* y los pasos para demostrar teoremas. Observe que aplican el razonamiento deductivo y diferencian los conceptos de *congruencia* y *semejanza de figuras*.

SABER HACER

31 **Resolución de problemas.** Lean y, luego, hagan lo que se pide.

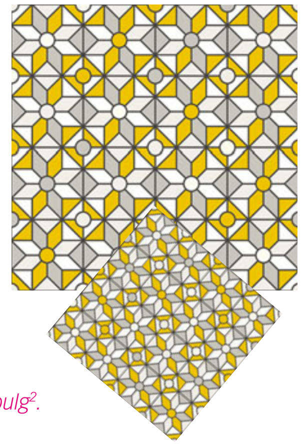
El área **A** de una figura **F** se obtiene multiplicando dos de las longitudes presentes en la figura, $\mathbf{l}_1$ y $\mathbf{l}_2$: $\mathbf{A} = \mathbf{l}_1\ \mathbf{l}_2$.

El área **A'** de una figura **F'**, semejante a la figura **F**, se obtendrá multiplicando las longitudes homólogas, $\mathbf{l}_1'$ y $\mathbf{l}_2'$: $A = \mathbf{l}_1'\ \mathbf{l}_2'$.

- Si **r** es la razón de semejanza de **F** y **F'**: $\mathbf{l}_1' = \mathbf{r}\ \mathbf{l}_1$ y $\mathbf{l}_2' = \mathbf{r}\ \mathbf{l}_2$, determinen la razón de las áreas de dos figuras semejantes.
  $A'/A = l_1'\ l_2' / l_1\ l_2 = r\ l_1\ r\ l_2 / l_1\ l_2 = r^2$
- Resuelvan el problema.

  El área de una placa de cristal es de 640 pulg². ¿Cuántas pulgadas cuadradas de cristal se necesitan para construir una placa semejante a la primera con **r** = 2.5? $A'/A = r^2 = 2.5^2 = 6.25$

  $A' = 6.25 \times 640$ pulg² $= 4\,000$ pulg².



32 Responde las preguntas.

- ¿Cómo actúan las situaciones de la vida cotidiana en el origen y el desarrollo de las ideas matemáticas y viceversa?
- ¿En cuáles problemas de la vida cotidiana has aplicado tus conocimientos básicos de Geometría? Muestra tres ejemplos.

APRENDIZAJE AUTÓNOMO

33 Marca según tus logros.

	Iniciado	En proceso	Logrado
• Reconozco y expongo momentos históricos de la Geometría.	▢	▢	▢
• Identifico axiomas, definiciones y teoremas.	▢	▢	▢
• Reconozco las partes de una demostración y sus funciones.	▢	▢	▢
• Identifico y construyo segmentos de longitud dada.	▢	▢	▢
• Identifico figuras semejantes y congruentes.	▢	▢	▢

34 Reflexiona sobre tu aprendizaje.

- ¿Qué contenidos de la unidad te parecieron más interesantes? ¿Por qué?
- ¿Tuviste dificultades con algunos contenidos? ¿Con cuáles y a qué puedes atribuirlas?

Sugerencias didácticas para la evaluación

- Pregunte a sus estudiantes:
  — *¿Qué estudia la Geometría?*
  — *¿En cuáles civilizaciones la Geometría dio sus primeros pasos?*
  — *¿Cuáles son los conceptos primitivos y derivados de la Geometría?*
  — *¿Qué es un axioma?*
  — *¿Qué es un teorema?*

Resolución de problemas

En la actividad 31, *Saber hacer*, se aplica la estrategia de evaluación *Resolución de problemas*. Leerán cuidadosamente el contenido del texto y, luego, harán lo que se les indica. En este caso, seguirán las instrucciones para obtener el área de las figuras **A** y **A'** para luego obtener la razón de semejanza de las dos figuras. Después, determinarán cuántas pulgadas cuadradas de cristal se necesitan para construir una placa semejante a la primera figura.

Actitudes y valores

Ciencia y tecnología

En la sección destinada a *Actitudes y valores*, actividad 32, responderán cómo actúan las situaciones de la vida cotidiana en el origen y desarrollo de las ideas matemáticas, y viceversa. Expresarán en cuáles problemas de la vida cotidiana han aplicado sus conocimientos básicos de Geometría. Mostrarán tres ejemplos.

Aprendizaje autónomo

En este apartado, actividad 33, evaluarán por ellos mismos si los conceptos y procedimientos que trabajaron en la unidad se encuentran en estado de iniciación, en proceso o logrado. En la actividad 34, reflexionarán sobre su proceso de aprendizaje.

Aprender a aprender

Haga que sus estudiantes apliquen los conceptos aprendidos en la unidad en situaciones de la cotidianidad, por ejemplo, preguntar: *¿Qué pasos deben seguir para construir segmentos y figuras semejantes?*

2 Ángulos

Propuesta de programación

COMPETENCIAS	CONTENIDOS
Específicas • **Razona y argumenta**: **Propone** y **justifica** los procedimientos que se deben aplicar para interpretar y resolver situaciones del entorno que involucren los ángulos. • **Comunica**: **Explica**, **construye** e **interpreta** gráficas y situaciones del mundo que le rodea relacionadas con ángulos, que son presentadas en lámina, libros y páginas Webs. • **Modela y representa**: **Expresa** situaciones de la vida cotidiana que involucran ángulos y teoremas relacionados, mediante gráficas y ecuaciones. • **Usa algoritmos**: **Sigue** las reglas que le permiten obtener un resultado al resolver problemas en los que intervienen ángulos. • **Conecta**: **Aplica** los conocimientos sobre ángulos para comprender, explicar y construir nuevas situaciones matemáticas y de otras ciencias. • **Resuelve problemas**: **Resuelve** y **construye** problemas haciendo uso de los ángulos y sus propiedades en situaciones del entorno. • **Utiliza herramientas tecnológicas**: **Utiliza** soportes tecnológicos como la Internet, la calculadora científica y otros dispositivos. **Fundamentales** **Resolución de problemas**: **Identifica** y **utiliza** estrategias, y **genera** alternativas de solución**.**	**Conceptos** • Ángulo: concepto y notación. • Postulados de la medida y de la construcción. • Ángulos congruentes. • Operaciones con ángulos. • Sistema circular de medida angular: el radián. **Procedimientos** • Identificación de ángulos y su correcta designación. • Clasificación, construcción y medición de ángulos diversos. • Identificación y construcción de distintos ángulos congruentes y bisectrices. • Resolución de operaciones con medidas angulares. • Identificación de distintos sistemas de medida angular y realización de transformaciones. **Actitudes y valores** • Valoración de las aplicaciones de la Geometría en la vida. • Apreciación de una ciudad inclusiva.

Tiempo estimado de trabajo: 2 semanas

INDICADORES DE LOGRO

- **Conoce** el concepto de *ángulo* y su notación.
- **Identifica** ángulos y **los designa** correctamente.
- **Identifica** ángulos consecutivos, adyacentes y opuestos por el vértice.
- **Clasifica**, **construye** y **mide** ángulos diversos.
- **Conoce** las unidades de medida angular del sistema sexagesimal.
- **Identifica** y **construye** ángulos congruentes y bisectrices.
- **Efectúa** operaciones de adición y sustracción de medidas angulares.
- **Determina** el complemento y el suplemento de medidas angulares.
- **Identifica** distintos sistemas de medida angular.
- **Realiza** transformaciones de una medida angular.
- **Resuelve** problemas del contexto que involucran medidas angulares.
- **Utiliza** recursos virtuales y electrónicos: computadora, programas educativos, juegos interactivos y otros, en la búsqueda de información.

Valor transversal: Convivencia

Recursos digitales

Plataforma digital CD

BIBLIOTECA DEL DOCENTE

- DOCUMENTOS PARA LA PLANIFICACIÓN
- GUÍA DE RECURSOS TIC

CUADERNO DE ACTIVIDADES

UNIDAD 2	Ángulos

RECURSOS DE REFUERZO Y AMPLIACIÓN

LibroMedia

ACTIVIDADES INTERACTIVAS

PÁGINA 23	Medida de ángulo
PÁGINA 26	Sistema Sexagesimal. Ángulos
PÁGINA 30	Operaciones con ángulos

CD DE RECURSOS DIGITALES: PLAN REGULAR

Pleno — PRUEBA DE EVALUACIÓN FORMATIVA DE LA UNIDAD

Estrategias pedagógicas

- Recuperación de experiencias previas.
- Trabajo en equipo.
- Aprendizaje basado en problemas (ABP).

Unidad 1

Competencias de la unidad

- **Lee** y **comenta** las informaciones expuestas en el apartado *Punto de partida*.
- **Responde** preguntas relacionadas con las informaciones expuestas en el apartado *Punto de partida*.
- **Recupera** experiencias vividas mediante la observación de las imágenes de la ilustración.
- **Analiza** un problema de la vida cotidiana vinculado a los conceptos y procedimientos que desarrollarán en la unidad en el apartado *Analiza el problema*.
- **Plantea** soluciones al problema leído y analizado anteriormente, en el apartado *Plantea una solución*.

Apertura de la unidad

Dentro de los objetivos principales de la apertura de esta unidad se encuentran, en primer lugar, conocer los conceptos, los procedimientos y las actitudes y valores desarrollados en la misma y, en segundo lugar, el plantear una situación de aprendizaje, una problemática o un texto que sirve para contextualizar el tema de la unidad. Todo esto con la finalidad de motivar y despertar la curiosidad de los estudiantes.

A partir de la situación o texto planteado, el problema a analizar y las imágenes de la ilustración se conecta al estudiante con el tema a tratar, a la vez que vincula con la realidad o cotidianidad los temas que se van a desarrollar.

Todos los elementos que conforman la portada promueven la recuperación de experiencias o conocimientos previos y la motivación o el interés por los conocimientos que adquirirán en la unidad.

2 Ángulos

Conceptos

- Ángulo: concepto y notación.
- Postulados de la medida y de la construcción.
- Ángulos congruentes.
- Operaciones con ángulos.
- Sistema circular de medida angular: el radián.

Procedimientos

- Resolución de problemas.
- Construcción de diversas figuras geométricas.

Actitudes y valores

- Valoración de las aplicaciones de la Geometría en la vida.
- Aprecio una ciudad inclusiva.

Punto de partida

El espacio público (las calles y aceras, las señales, dispositivos de seguridad o equipamientos) y sus edificios reflejan la manera en que sus planificadores urbanos y constructores asumen la idea de ciudadanía con plenos derechos. Una ciudad debería garantizar a sus habitantes el ejercicio pleno de la ciudadanía: garantizar la seguridad, velar por la salud ambiental y favorecer el tránsito y la movilidad con sus diseños y trazados.

La preocupación por los derechos de todos los ciudadanos sin exclusión ha llevado a concebir modelos de ciudades accesibles, no discriminatorias, que permitan el desenvolvimiento, acceso a los servicios y movilidad a personas con discapacidades motora, visual, auditiva, etc.

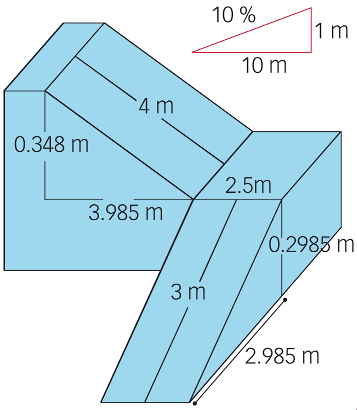
- ¿Qué equipamientos y facilidades hacen falta en tu ciudad para que los discapacitados puedan desenvolverse como ciudadanos?

ANALIZA EL PROBLEMA

El acceso a un edificio necesita de una rampa accesible de 3 y 4 metros de tramo y de pendientes no mayores de un 10 %. Se requieren rampas en **L** adecuadas para salvar la altura con el menor espacio horizontal posible.

Una propuesta de diseño para la rampa se muestra a la derecha.

Se quiere saber si la propuesta es correcta.



Trabajo colectivo de apertura

- **Punto de partida:** Guíe a sus estudiantes a leer y comentar en el grupo las informaciones expuestas en el apartado *Punto de partida*, que trata sobre la seguridad que deberían ofrecer a los ciudadanos los espacios públicos y la preocupación por lograr ciudades accesibles y no discriminatorias para las personas con discapacidades.
- **Analiza el problema:** En este apartado se plantea que se requiere una rampa para el acceso a un edificio con las dimensiones indicadas. Entre las propuestas, se escoge el diseño que se les muestra y, luego, decidir si la propuesta de la figura es correcta.
- **Plantea una solución:** En este apartado responderán, con relación a la figura de la rampa en L, qué datos deberían conocer para calcular una pendiente, cómo la determinarían, y escribirán el procedimiento que seguirían paso por paso.

PLANTEA UNA SOLUCIÓN

- Responde las preguntas.
  - ¿Qué datos deberías conocer para calcular una pendiente?
  - ¿Cómo determinarías las pendientes de las dos rampas dispuestas en **L** de la figura de la página anterior?
  - Si tuvieras que inspeccionar las rampas en **L** de la figura, para determinar si las mismas cumplen con los requisitos, ¿cómo lo harías?
- Escribe, paso a paso, el procedimiento que seguirías y, luego, compártelo con tus compañeros.

Esquema conceptual de la unidad

Ángulos

La Geometría estudia

- Postulados de la medida y de la construcción
  - Ángulos congruentes
- Concepto de ángulo y su notación
- Sistemas de medida angular
  - Operaciones con ángulos

Actividad de motivación

Pida a sus estudiantes que lean en la sección *Conceptos y procedimientos*, los temas que trabajarán en la unidad y las actitudes y valores que estarán presentes en el desarrollo de la misma. Luego, para que interioricen la importancia de conocer los ángulos y sus medidas, es recomendable preguntar al grupo: *¿Qué relación tienen las medidas angulares con la inclinación de una carretera? ¿Por qué es importante el drenaje pluvial de las calles? ¿Podrían mencionar situaciones de la cotidianidad en las que se hace necesario el uso de medidas angulares? ¿Qué puede ocurrir si el desagüe de un techo no tiene la inclinación correcta?*

Actividad interactiva

Medida de ángulos

Actividad interactiva de recuperación de experiencias, en la que calcularán el valor de los ángulos desconocidos en un triángulo rectángulo.

Actitudes y valores

Convivencia

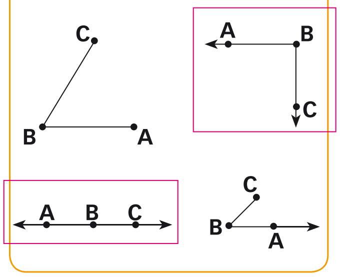
Aproveche la situación planteada en el apartado *Punto de partida* y en las imágenes de la ilustración para conversar con sus estudiantes acerca de la necesidad de que no se excluyan las personas discapacitadas en las actividades del diario vivir en las que puedan participar sin ser afectadas. Luego, pregúnteles: *¿Cuál debe ser nuestra actitud ante un ciego o un inválido que quiera cruzar la calle?* Continúe con las preguntas y discuta las diversas respuestas con el grupo.

Indicadores de logro

- **Conoce** el concepto de *ángulo* y su notación.
- **Identifica** ángulos y **los designa** correctamente.
- **Identifica** ángulos consecutivos, adyacentes y opuestos por el vértice.

RECUPERACIÓN

Encierra las figuras que son ángulos y, luego, explica por qué no lo son las que no encerraste.

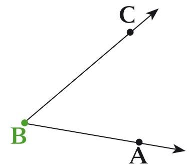


1 Concepto de ángulo

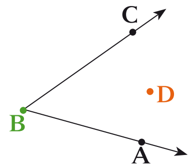
Un ángulo es la unión de dos rayos con orígenes en un mismo punto llamado vértice.

Si interpretamos como conjuntos de puntos a los rayos $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$, tales que el punto **B** es su origen común, entonces cualquier ángulo formado por dichos rayos es el resultado de la operación: $\overrightarrow{BA} \cup \overrightarrow{BC}$.

La figura siguiente es un ángulo de rayos $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$.



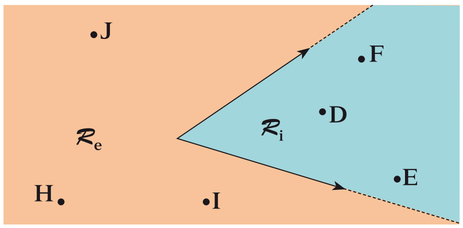
Observa la figura siguiente.



El punto **D** está en el interior del ángulo de la figura anterior si los puntos **D** y **C** están a un mismo lado del rayo $\overrightarrow{BA}$ y los puntos **D** y **A** están a un mismo lado del rayo $\overrightarrow{BC}$.

Si un punto no está ni en los rayos de un ángulo, ni en su interior, dicho punto está en el exterior del ángulo.

El conjunto de todos los puntos que están en el interior del ángulo constituye su región interior, $\mathcal{R}_i$ y el conjunto de los puntos que no pertenecen ni a los rayos, ni al interior, forma su región exterior, $\mathcal{R}_e$.



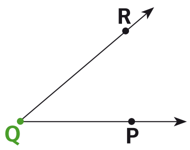
Los puntos **D**, **E** y **F** pertenecen a la región interior del ángulo. En cambio, los puntos **H**, **I** y **J**, a la región exterior.

RECUERDA

Notación para los ángulos

Para designar un ángulo se usan tres letras mayúsculas, la del centro indica el vértice y las dos restantes puntos de sus rayos.

El ángulo de la figura se designa ∢**PQR** o ∢**RQP**.

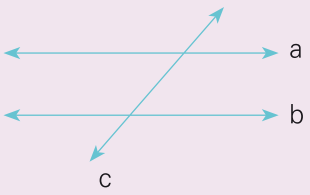


A veces, un ángulo se nombra solo con la letra, el vértice o un número:

∢ **Q** o ∢1.

Más información

Haga que sus estudiantes identifiquen ángulos del entorno y motíveles para que los clasifiquen en rectos, agudos y obtusos. Luego, pregunte al grupo: *¿Cuántos ángulos se forman cuando una recta corta a dos rectas paralelas?¿Cómo son estos ángulos?*



Motíveles para que verbalicen cómo está formado y cómo se mide un ángulo. Muéstreles un transportador y cómo está dividido y, luego, explíqueles el procedimiento para medir un ángulo dado y para trazar ángulos de medidas especificadas.

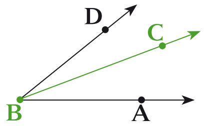
Sugerencias didácticas

- **Inicio:** Motive a sus estudiantes para que lean y realicen en el aula la actividad vinculada a la recuperación de experiencias previas propuesta en el apartado *Recuperación*, en la que encerrarán las figuras que son ángulos y explicarán por qué no lo son las que no encerraron.
- **Desarrollo:** Pídales que lean cuidadosamente el contenido de la doble página, que presten atención a los conceptos y que observen las representaciones gráficas. Propóngales que lean y reproduzcan en sus cuadernos el contenido del apartado *Recuerda*, que trata sobre la designación o notación de los ángulos.

2 Ángulos consecutivos y adyacentes

Dos ángulos son consecutivos si tienen un rayo en común y un mismo vértice.

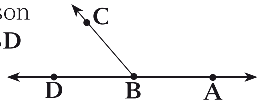
Los ángulos **ABC** y **CBD** siguientes son consecutivos, porque tienen el mismo vértice, **B**, y el rayo **BC** es común a uno y otro.



Edificio moderno. Los ángulos son elementos frecuentes de su diseño.

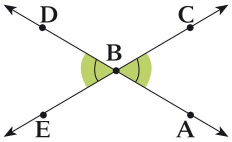
Un par de ángulos consecutivos y tales que sus rayos no comunes son opuestos, son adyacentes o forman un par lineal.

Los ángulos **ABC** y **CBD** siguientes son adyacentes, porque sus rayos **BA** y **BD** apuntan en sentidos opuestos.



3 Ángulos opuestos por el vértice

Dos ángulos opuestos por el vértice tienen un vértice común y cualquiera de los rayos de uno de ellos es opuesto a uno de los rayos del otro.



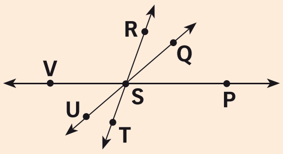
Los ángulos **ABC** y **DBE** son opuestos por el vértice.

Dos rectas secantes se cortan en un punto y forman dos pares de ángulos opuestos por el vértice.

ACTIVIDADES

1 Observa la figura y, luego, nombra ángulos distintos que cumplan con las condiciones especificadas.

- Con un mismo vértice.
- Con un rayo en común.
- Con rayos opuestos.



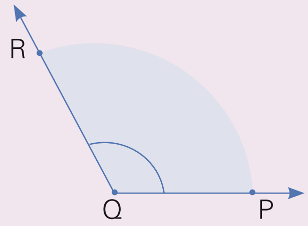
2 Traza lo que se te indica.

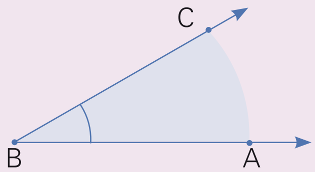
- Dos pares de ángulos consecutivos.
- Tres pares lineales distintos.

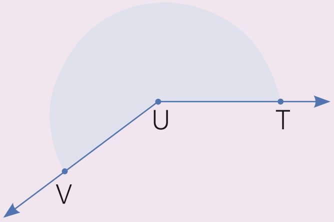
- **Desarrollo:** Converse con sus estudiantes sobre el concepto de *ángulos* y cómo se designan y, además, qué son ángulos consecutivos, adyacentes y opuestos por el vértice. Motíveles para que observen la fotografía de un edificio moderno y para que lean y comenten la información al pie de la misma. Haga que lean y comenten lo que expresa la joven ubicada en el margen derecho de la página.
- **Cierre:** Motive a sus estudiantes a realizar en sus cuadernos los ejercicios del apartado *Actividades*. En la actividad 1, observarán la figura y, luego, nombrarán ángulos distintos que cumplan con las condiciones especificadas. En la actividad 2, trazarán los ángulos que se les indican.

Atención a la diversidad

Actividad de refuerzo: Forme varias agrupaciones de estudiantes con su regla a la mano y su transportador y, luego, pídales que tracen ángulos similares a estos y los midan.







Ficha 6.

Aprender a aprender

Pregunte a sus estudiantes: *¿Qué conocimientos previos sobre los ángulos y su clasificación pueden expresar?¿Creen que esos conocimientos facilitaron el aprendizaje de estos conceptos? ¿Por qué?*

Indicadores de logro

- **Reconoce** los conceptos de *axioma* o *postulado*, *definición* y *teorema*.
- **Reconoce** y **distingue** el papel de los axiomas, las definiciones y los teoremas en la Geometría.

Actividad interactiva

Sistema Sexagesimal. Ángulos

Actividad interactiva en la que observarán las medidas de diversos ángulos, efectuarán las operaciones indicadas y, después, relacionarán dichas operaciones con sus respuestas correspondientes.

Más información

El Sistema Sexagesimal es un sistema de numeración en el que cada unidad se divide en 60 unidades de orden inferior.

Es un sistema de numeración en base 60. Se utiliza en la medida del tiempo y en la medida de la amplitud de los ángulos.

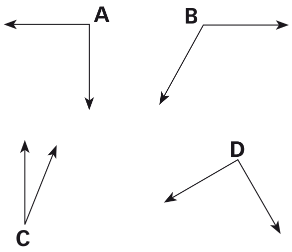
1 hora	60 minutos	60 segundos
1°	60′	60″

Para sumar estas unidades de medidas se colocan las horas debajo de las horas o los grados debajo de los grados, los minutos debajo de los minutos y los segundos debajo de los segundos y, finalmente, se suman.

Ejemplo:	35°	27′	15″
	21°	16′	24″
	56°	43′	39″

RECUPERACIÓN

Clasifica los ángulos de la figura siguiente.

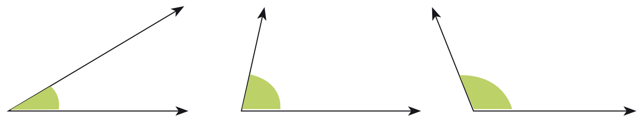


∢**A** y ∢**D**: rectos; ∢**B**: obtuso
∢**C**: agudo.

1 Medida de un ángulo. Postulado de la medida

La medida de un ángulo está determinada por la amplitud de la abertura entre sus dos rayos.

Los ángulos siguientes tienen amplitudes o medidas distintas:



El postulado de la medida indica que: A *cualquier ángulo* **ABC** *le corresponde un número real* **m** *entre 0 y 180*: 0 < **m** < 180.

2 El sistema sexagesimal de medida angular

El sistema sexagesimal de medida angular utiliza como unidad principal el grado (°), que es 1/360 parte de una circunferencia.

Un grado consta de 60 minutos (′) y un minuto de 60 segundos (″):

1′ = 1/60° 1″ = 1/ 60′ = 1/3 600°

La medida de un ángulo es incompleja cuando está expresada en una sola unidad y compleja cuando está expresada en más de una unidad.

EJEMPLOS RESUELTOS:

- Escribir 30° 12′ 45″, en forma incompleja.

  Se empieza convirtiendo 45″ en minutos:
  45″ = 45(1/60′) = 0.75′.

  La fracción de minuto resultante se suma a los minutos de la medida angular, 12′: 12′ + 0.75′ = 12.75′.

  Estos minutos resultantes se convierten en grados y el resultado obtenido se suma a los grados de la medida original:

  12.75′ = 12.75(1/60°) = 0.2125° ⟶ 30° + 0.2125° = 30.2125°.

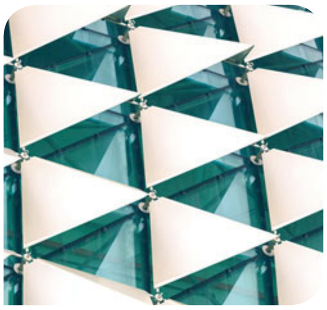
- Escribir 120.325° en forma compleja.

  La fracción decimal 0.325° se convierte en minutos:

  0.325° = 0.325(60′) = 19.5′.

  La fracción decimal 0. 5′ se convierte en segundos:

  0. 5′ = 0. 5(60″) = 30″. La medida compleja es: 120° 19′ 30″.



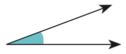
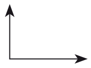
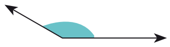
Ornamento de una construcción.
En las construcciones los ángulos y figuras congruentes son recursos ornamentales muy comunes.

Sugerencias didácticas

- **Inicio:** Motive a sus estudiantes para que lean y respondan en el aula la actividad vinculada a recuperación de experiencias previas propuesta en el apartado *Recuperación*, en la cual clasificarán los ángulos representados.
- **Desarrollo:** Haga que sus estudiantes lean cuidadosamente el contenido de la doble página, que observen las representaciones gráficas y, con detenimiento, el proceso de solución de los ejemplos resueltos. Haga que observen el ornamento de una construcción en el margen izquierdo de la página y que lean la información al pie de la misma. Después, pregunte al grupo: *¿Cuándo se dice que la medida de un ángulo es compleja? ¿Y cuándo es incompleja?*

3 Clasificación de los ángulos por sus medidas

Los ángulos se clasifican de acuerdo a sus medidas, como se muestra en la tabla siguiente.

Ángulo	Medida	Clase
	$0 < \mathbf{m} < 90°$	Agudo
	$\mathbf{m} = 90°$	Recto
	$90° < \mathrm{m} < 180°$	Obtuso

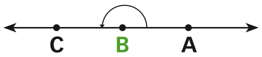
Se considera que dos rayos con el mismo origen e igual sentido forman un ángulo nulo ($\mathbf{m} = 0°$) y dos rayos con el mismo origen y sentidos opuestos forman un ángulo llano ($\mathbf{m} = 180°$).

Ángulo nulo

$\mathbf{m} = 0°$

Ángulo llano

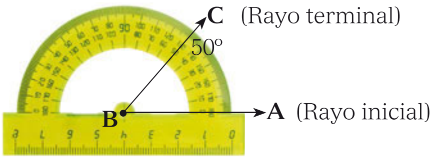
$\mathbf{m} = 180°$



4 Postulado de la construcción

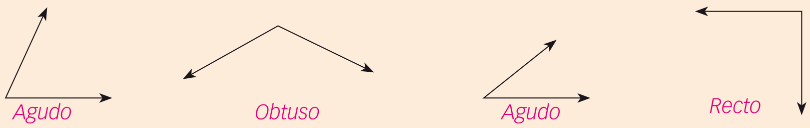
El postulado de la construcción de un ángulo muestra que: *Dado un rayo* $\overrightarrow{\mathbf{BA}}$*, existe un rayo y solo un rayo* $\overrightarrow{\mathbf{BC}}$ *tal que la medida del ángulo* **ABC** *es* **m**.

En la figura siguiente el rayo **BC** que tiene como origen el punto **B**, pasa por la marca 50 del transportador. Se construye así un ángulo agudo de medida $\mathbf{m} = 50°$.



ACTIVIDADES

3 Mide con un transportador los ángulos siguientes y, luego, clasifícalos.



Agudo *Obtuso* *Agudo* *Recto*

4 Construye ángulos con las medidas especificadas.

- 16°
- 25°
- 40°
- 75°
- 98°
- 110°
- 125°
- 146°
- 167°
- 175°

Atención a la diversidad

Actividades de refuerzo: Pida a sus estudiantes que expresen las medidas angulares complejas en incomplejas.

- 35° 27′ 15″ Resp.: 35.4542°.
- 42° 13′ 55″ Resp.: 42.0039°.
- 40° 24′ 36″ Resp.: 40.0068°.
- 52° 35′ 21″ Resp. 52.0098°.

Solicite a sus estudiantes que expresen las medidas angulares incomplejas en complejas.

- 130.453°. Resp.: 130° 27″ 11′.
- 125.132°. Resp.: 125° 7″ 55′.
- 75.520°. Resp.: 75° 31″ 12′.
- 110.352°. Resp.: 110° 21″ 7′.

Ficha 7.

- **Desarrollo:** Muestre a sus estudiantes los ejemplos en los que se transforman medidas angulares complejas a incomplejas y viceversa. Motíveles para que observen el cuadro con la clasificación de los ángulos y la representación de los ángulos llano y nulo ubicados en el margen derecho de la página. Haga que construyan ángulos diversos en sus cuadernos, y los midan usando el transportador. Pídales que observen, en el margen derecho de esta página, la representación de los ángulos nulo y llano.
- **Cierre:** Motive a sus estudiantes a realizar los ejercicios del apartado *Actividades*. En la actividad 3, medirán con el transportador los ángulos representados y, luego, los clasificarán. En la actividad 4, construirán ángulos con las medidas especificadas.

Aprender a aprender

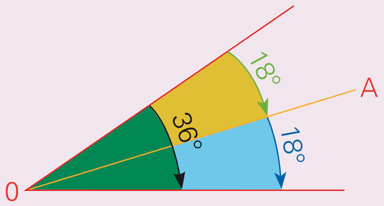
Pregunte a sus estudiantes: *¿Tuvieron alguna dificultad para comprender los temas desarrollados en esta doble página? ¿En qué consistió el problema? ¿Qué hicieron para superarlo?*

Indicadores de logro

- **Identifica** y **construye** ángulos congruentes y bisectrices.

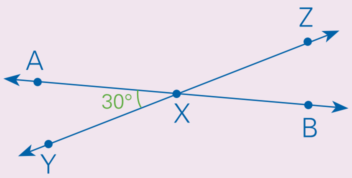
Más información

La bisectriz de un ángulo es la recta que nace en el vértice del mismo y lo divide en dos partes iguales.



La recta **OA** divide el ángulo de 36° en dos ángulos congruentes de 18°.

Muéstreles las siguientes rectas que se cortan en el punto **X**, **AB** e **YZ**.

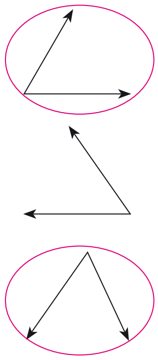


Pregunte al grupo:

- *¿Cuál es el valor del ángulo **AXZ**?*
- *¿Cuál es el valor del ángulo **ZXB**?*

RECUPERACIÓN

Encierra los ángulos con igual medida.

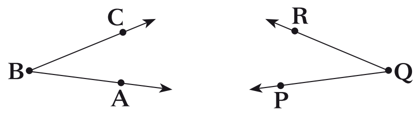


1 Congruencia de ángulos. Construcción

Dos ángulos son congruentes si tienen la misma amplitud.

Los ángulos **ABC** y **PQR** son congruentes:

$\measuredangle ABC \cong \measuredangle PQR$

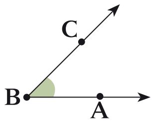


Al superponer los ángulos anteriores sus rayos coinciden.

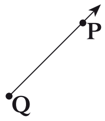
La relación de congruencia de dos ángulos cumple con:

- $\measuredangle A \cong \measuredangle A$
- $\measuredangle A \cong \measuredangle B \longrightarrow \measuredangle B \cong <A$
- $[(\measuredangle A \cong \measuredangle B) \land (\measuredangle B \cong \measuredangle C)] \longrightarrow \measuredangle A \cong \measuredangle C$

Para construir un ángulo **PQR** congruente al ángulo **ABC**:

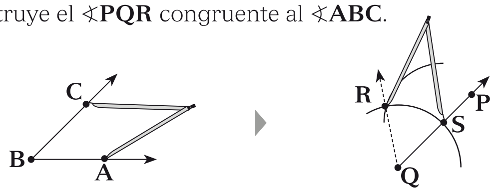


1.º Se traza un rayo $\overrightarrow{QP}$, con cualquier orientación.



2.º Apoyando la punta metálica del compás en el origen **B** del rayo $\overrightarrow{BA}$, del $\measuredangle$**ABC** se traza un arco y con la misma abertura, apoyando el compás en **Q** se traza un arco que corte al rayo $\overrightarrow{QP}$ en **S**.

3.º Apoyando el compás en **A** y abriéndolo de tal modo que la punta blanda toque a **C**, se traslada con la abertura consiguida al rayo $\overrightarrow{QP}$ y con centro en **S** se traza un arco que corte al anterior en **R**. Finalmente, trazando el rayo $\overrightarrow{QR}$ se construye el $\measuredangle$**PQR** congruente al $\measuredangle$**ABC**.



28

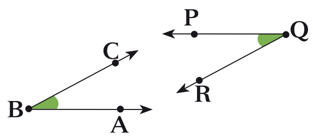
Sugerencias didácticas

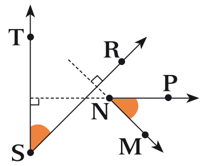
- **Inicio:** Oriente a sus estudiantes para que respondan en el aula la actividad de recuperación de experiencias previas propuesta en el apartado *Recuperación*, en la que encerrarán los ángulos con igual medida.
- **Desarrollo:** Haga que lean el contenido de la doble página, que observen los pasos para construir ángulos congruentes y que observen las representaciones gráficas. Motíveles para que observen los ángulos de lados paralelos y perpendiculares y la construcción de la bisectriz de un ángulo.

2 Ángulos de lados paralelos y perpendiculares

Los ángulos cuyos rayos son paralelos o perpendiculares son congruentes.

Los siguientes pares de ángulos son congruentes:

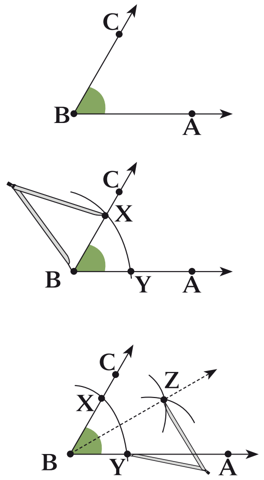




$\overrightarrow{BC} \parallel \overrightarrow{QR}$; $\overrightarrow{BA} \parallel \overrightarrow{QP}$ $\quad$ $\overrightarrow{NM} \perp \overrightarrow{SR}$; $\overrightarrow{NP} \perp \overrightarrow{ST}$

3 Bisectriz de un ángulo. Construcción

La bisectriz de un ángulo es la recta que lo divide en dos partes iguales.



Para trazar la bisectriz del ∢**ABC** de la derecha:

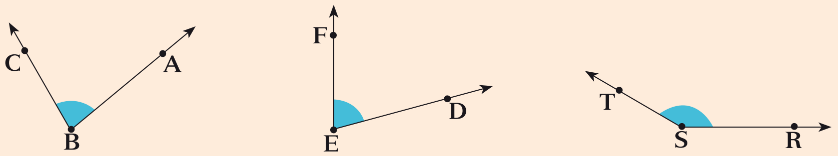
1.º Se apoya la punta del compás en **B** y se traza un arco que corte a los rayos del ∢**ABC** en los puntos **X** e **Y**.

2.º Se apoya la punta metálica del compás en los puntos **X** e **Y** se trazan dos arcos, con la misma abertura del compás, que se corten en **Z**.

3.º Finalmente, se traza la bisectriz del ∢**ABC**, que es la recta que pasa por los puntos **B** y **Z**: ∢**ABZ** ≅ ∢**ZBC**.

ACTIVIDADES

5 Copia y, luego, construye un ángulo congruente a cada uno de los ángulos dados.



- Comprueba tus resultados usando un transportador.

6 Construye los ángulos de medidas especificadas y, luego, traza sus bisectrices.

- 40º
- 50º
- 70º
- 75º
- 90º
- 100º
- 125º
- 132º

Actividad grupal

Forme varias agrupaciones de estudiantes y motíveles para que construyan, sobre papel de construcción, ángulos congruentes siguiendo los pasos detallados en la página 28. Para realizar esta actividad es necesario que tengan a la mano hojas en blanco o papel de construcción, la regla y el compás.

Al finalizar la actividad anterior, pida a sus estudiantes que dibujen ángulos de lados paralelos y perpendiculares.

Para concluir, solicite a los grupos formados que construyan la bisectriz de un ángulo siguiendo los pasos indicados en la página 29.

Acompáñeles en el proceso de realización de estas actividades y ofrézcales las orientaciones necesarias.

Ficha 8.

- **Desarrollo:** Muestre a sus estudiantes los procedimientos para construir ángulos congruentes y la bisectriz de un ángulo como se desarrollan en esta doble página. Formúleles preguntas vinculadas a los pasos, a fin de detectar las dudas o inquietudes que puedan presentarse.
- **Cierre:** Motive a sus estudiantes a realizar los ejercicios del apartado *Actividades*. En la actividad 5 copiarán y, luego, construirán un ángulo congruente a cada uno de los ángulos dados. En la actividad 6, construirán los ángulos de medidas especificadas y, luego, trazarán sus bisectrices. Acompáñeles en el proceso.

Aprender a aprender

Pregunte al grupo: *¿Les parecieron importantes los conceptos estudiados en esta oportunidad? ¿Qué utilidad para la cotidianidad tienen estos conceptos?*

Indicadores de logro

- **Efectúa** operaciones de adición y sustracción de diversas medidas angulares.
- **Determina** el complemento y el suplemento de medidas angulares.

Actividad interactiva

Operaciones con ángulos

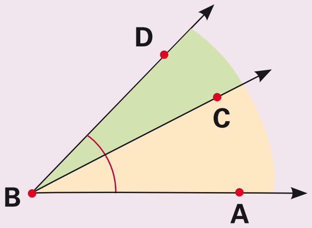
Actividad interactiva en la que efectuarán sustracciones con medidas angulares, luego, relacionarán con flechas las operaciones con sus respuestas correspondientes.

Más información

Hábleles acerca de la aritmética de los ángulos y sus diferencias con la de los números, acláreles que los ángulos se suman y se restan entre sí, pero no se multiplican, ni se dividen entre ellos.

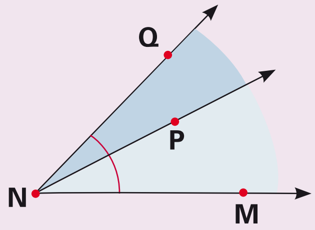
Suma y resta de ángulos

La suma de los ángulos **ABC** y **CBD** es el ángulo **ABD**.



∢ **ABC** + ∢ **CBD** = ∢ **ABD**

La diferencia, ∢**MNQ** – ∢**MNP**, es el ángulo **PNQ** entre el rayo terminal del ángulo minuendo, ∢**MNQ,** y el rayo terminal del sustraendo, ∢**MNP**.



∢ **MNQ** – ∢ **MNP** = ∢ **PNQ.**

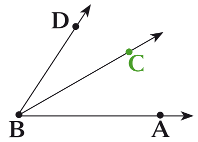
RECUPERACIÓN

Completa las igualdades siguientes.

- 5º = …′ *300′*
- 2º = …″ *7200″*
- …º = 480′ *8′*
- …″ = 5′ *300″*
- 10′ = …º *0.1667º*
- 18 000″ = …º *5º*

1 Adición y sustracción

Fíjate en los ángulos consecutivos **ABC** y **CBD**:



El postulado de la adición muestra que: *La medida de* ∢**ABD** *es el resultado de la adición de las medidas de* ∢**ABC** y ∢**CBD**.

Medida ∢**ABD** = medida ∢**ABC** + medida ∢**CBD**

De la expresión anterior se infieren:

Medida <**ABC** = medida <**ABD** – medida <**CBD**

Medida <**CBD** = medida <**ABD** – medida <**ABC**

EJEMPLOS RESUELTOS:

- Determinar la medida del ángulo formado por dos ángulos consecutivos de medidas 25º 45′ 18″ y 18º 38′ 42″.

  La medida es el resultado de la adición:

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1^\circ\quad 1'}\\ 25^\circ\ 45'\ 18''\\ +\ 18^\circ\ 38'\ 42''\\ \hline 44^\circ\ 84'\ 60''\\ {\scriptstyle 24'\quad 0''} \end{array}$$

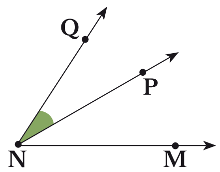
  La medida buscada es: 44º 24′.

- Obtener la medida de los ángulos **PNQ** de la figura de la izquierda si las medidas de los ángulos **MNQ** y **MNP** son, respectivamente, 50º 12′ 42″ y 32º 35′ 16″.

  La medida es el resultado de la sustracción:

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 49^\circ\quad 72'}\\ 50^\circ\ 12'\ 42''\\ -\ 32^\circ\ 35'\ 16''\\ \hline 17^\circ\ 37'\ 26'' \end{array}$$

  La medida buscada es: 17º 37′ 26″.



Sugerencias didácticas

- **Inicio:** Oriente a sus estudiantes para que lean y realicen en el aula la actividad vinculada a la recuperación de experiencias previas propuesta en el apartado *Recuperación*, en la que completarán igualdades relacionadas con grados, minutos y segundos.
- **Desarrollo:** Pídales que lean el contenido de la doble página, que observen las representaciones gráficas y el desarrollo de los ejemplos resueltos. Motíveles para que se fijen en los pasos para sumar y restar ángulos consecutivos y determinar el complemento y el suplemento de un ángulo y haga que reproduzcan los ejemplos en sus cuadernos.

2 Ángulos complementarios y suplementarios

Dos ángulos son complementarios o uno es el complemento del otro, si la suma de ellos es un ángulo recto.

Los ángulos **ABC** y **CBD** son complementarios si:

Medida ∢**ABC** + medida ∢**CBD** = 90º

∢**ABC** es el complemento de **CBD** y viceversa.

EJEMPLO RESUELTO:

- Determinar el complemento de ∢**ABC** que mide 62º 45′ 33″.

  El complemento de ∢**ABC** es: 90º – 62º 45′ 33″ = 27º 14′ 27″.

Dos ángulos son suplementarios o uno es el suplemento del otro, si la suma de ellos es un ángulo llano.

Los ángulos **ABC** y **CBD** son suplementarios si:

Medida ∢**ABC** + medida ∢**CBD** = 180º

∢**ABC** es el suplemento de ∢**CBD** y viceversa.

EJEMPLO RESUELTO:

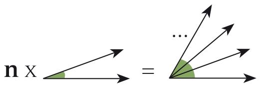
- Obtener el suplemento de ∢**ABC** que mide 108º 23′ 15″.

  El suplemento de ∢**ABC** es: 180º – 108º 23′ 15″ = 71º 36′ 45″.

SABER MÁS

Producto de un ángulo por un número natural

El resultado de multiplicar ∢**A** por un natural **n**, es el ángulo que resulta de yuxtaponer **n** veces a ∢**A**:



La medida de **n** x ∢**A** es el resultado de multiplicar **n** por la medida de ∢**A**.

Ejemplo resuelto:

- Obtener: 3 x 18º 15′ 25″.

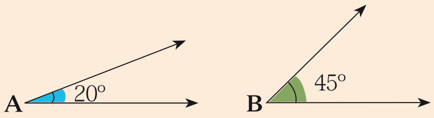
  18º 15′ 25″
  x 3
  54º 45′ 75″
  46′ 15″

El ángulo producto mide:

54º 46′ 15″

ACTIVIDADES

7 Construye y coloca en forma consecutiva los ángulos de la derecha y comprueba el postulado de la adición.



8 Efectúa las operaciones con medidas angulares.

- 35º 18′ + 46º 40′ 17″ *81º 58′ 17″*
- 103º 40′ 15″ – 63º 33′ 20″ *40º 6′ 55″*
- 15º 58′ 42″ + 95º 12′ 37″ *111º 11′ 19″*
- 3 x 41º 6′ 14″ *123º 18′ 42″*
- 74º 5′ 35″ – 26º 18′ 51″ *47º 46′ 44″*
- 4 x 27º 32′ 18″ *110º 9′ 12″*

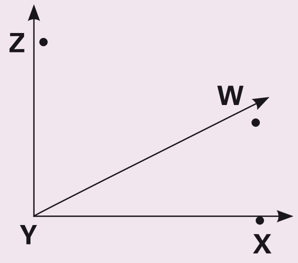
9 Resuelve el problema.

- La diferencia de dos ángulos complementarios es 12º. ¿Cuánto miden los ángulos? *51º; 39º*

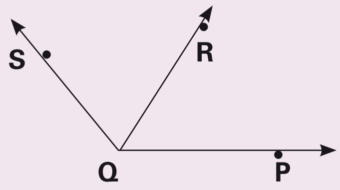
- **Desarrollo:** Muestre a sus estudiantes los ejemplos de adición y sustracción de ángulos consecutivos y el cálculo del complemento y el suplemento de un ángulo expuestos en la doble página y diseñe otros ejemplos adicionales. Propóngales que lean y reproduzcan en sus cuadernos el contenido del apartado *Saber más*, que muestra los pasos para obtener el producto de un ángulo por un número natural.
- **Cierre:** Motive a sus estudiantes a realizar los ejercicios propuestos en el apartado *Actividades*. En la actividad 7, construirán y colocarán en forma consecutiva los ángulos ubicados a la derecha y, luego, comprobarán el postulado de la adición. En la actividad 8, efectuarán operaciones con medidas angulares.

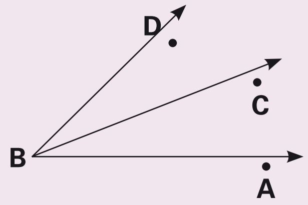
Atención a la diversidad

Actividades de ampliación: Solicíteles que sumen y resten pares de ángulos consecutivos como los siguientes:



Por ejemplo: En este caso, para la suma, medirán los ángulos **XYW** e **YWZ** y, luego, efectuarán la suma. En el caso de la resta, medirán el ángulo **XYZ** y le restarán **ZYW** o **WYZ**.





Ficha 9.

Aprender a aprender

Pregunte al grupo: *¿Podrían explicar a un compañero o a una compañera de aula los pasos para sumar y restar ángulos consecutivos?*

Indicadores de logro

- **Identifica** distintos sistemas de medida angular.
- **Realiza** transformaciones de una medida angular.
- **Resuelve** problemas del contexto que involucran medidas angulares.

Competencias específicas

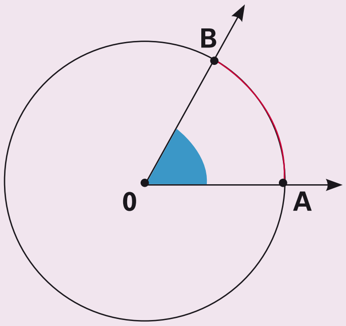
Competencia comunicativa

Motíveles para que expresen las diferencias entre un ángulo central, un ángulo inscrito, un ángulo interior y uno exterior en la circunferencia. Explíqueles cómo se miden estos ángulos.

Introduzca el concepto de *longitud de arco* y el radián, como unidad de medida angular. Muéstreles transformaciones de un sistema de medidas angulares a otro. Envíeles a la pizarra y haga que realicen todas las actividades en sus cuadernos.

Medida de un arco

La medida de un arco de cincunferencia es la del ángulo central que lo intercepta.



El arco $\overset{\frown}{\textbf{AB}}$ mide 60°

RECUPERACIÓN

Piensa y, luego, responde.

- ¿Puedes concebir un ángulo de medida mayor de 180º?
- ¿Cómo lo construirías usando un transportador?

Escribe qué fracción de una circunferencia representan los siguientes ángulos.

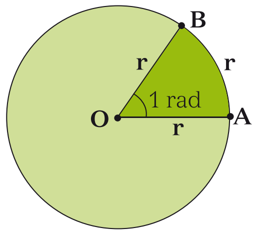
- 12º *1/15*
- 20º *1/9*
- 30º *1/6*
- 135º *3/4*
- 180º *1/2*
- 225º *5/4*

1 Sistema circular de medida angular

El sistema circular emplea el radián como unidad para medir la amplitud de un ángulo.

El radián (rad) es la amplitud del ángulo central de un sector circular limitado por un arco de igual longitud que el radio.

$\mathbf{r} = \overset{\frown}{\mathbf{AB}} = \mathbf{s}$



Para determinar a cuántos radianes, **x**, equivale una circunferencia completa se establece, a partir de la figura anterior, la siguiente proporción:

$$\frac{1\text{ rad}}{\mathbf{s}} = \frac{\mathbf{x}\text{ rad}}{2\pi\,\mathbf{r}}$$

De la proporción anterior se determina que: $\mathbf{x} = 2\pi\,\mathbf{r}/\mathbf{s} = 2\pi$.

Este resultado muestra que en una circunferencia completa caben 2π radianes, independientemente de la medida del radio y, por tanto, el radián es una unidad natural o intrínseca del círculo.

Si se admite que la medida angular de una circunferencia completa son cuatro ángulos rectos, esto es 360º, entonces puede escribirse la siguiente igualdad:

$$2\pi\text{ rad} = 360^\circ$$

La igualdad anterior permite expresar en unidades sexagesimales cualquier medida angular dada en radianes y viceversa.

Como π rad = π x 1 rad = 180º, entonces:

$$1\text{ rad} = 180^\circ/\pi = 57.29577951\ldots{}^\circ = 57^\circ\,17'\,44.806\ldots''$$

Un radián equivale, aproximadamente, a 57º 17′ 45″.

Como 180º = 180 x 1º = π rad, entonces:

$$1^\circ = \pi\text{ rad}/180 = 0.017453292\ldots\text{ rad}$$

Así, 1º equivale, aproximadamente, a 0.0175 rad.

Arte y Geometría. El rosetón es un ornamento presente en la arquitectura religiosa desde el siglo XIII. Divide al círculo en ángulos centrales iguales.

Sugerencias didácticas

- **Inicio:** Motive a sus estudiantes para que lean y realicen en el aula la actividad vinculada a la recuperación de experiencias previas propuesta en el apartado *Recuperación*, en la que responderán preguntas relacionadas con la medida de ángulos y fracciones de ángulos en la circunferencia.
- **Desarrollo:** Pídales que lean el contenido de la doble página, que observen las representaciones gráficas y los procedimientos aplicados en el desarrollo de los ejemplos de transformaciones de medidas angulares. Pídales que se fijen y lean el pie de la imagen de la figura de *Arte* y *Geometría* en el margen izquierdo de esta página.

2 Transformaciones de una medida angular

A partir de la equivalencia π rad = 180° se pueden transformar medidas sexagesimales en circulares y viceversa.

Sigue con atención los ejemplos siguientes.

EJEMPLOS RESUELTOS:

- Transformar 120° en radianes.

  Como 1° = $\pi/180$ rad, entonces:

  $120° = 120 \times (\pi/180 \text{ rad}) = 120\pi/180 \text{ rad} = 2\pi/3$ radianes.

  Como π es un número irracional, el resultado anterior se deja expresado tal cual, sin escribir cifras decimales.

- Convertir $5\pi/8$ rad al sistema sexagesimal.

  Puesto que 1 rad = $180°/\pi$:

  $5\pi/8 \text{ rad} = (5\pi/8) \times (180°/\pi) = 112.5° = 112° 30''$.

- Convertir 1.5 rad al sistema sexagesimal.

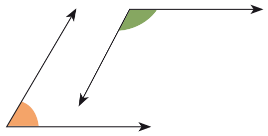
  Puesto que 1 rad = $180°/\pi$:

  $1.5 \text{ rad} = 1.5 \times (180°/\pi) = 270°/\pi = 85° 56' 37.2''$.

INTELIGENCIA COLABORATIVA

Ángulos de rayos paralelos y perpendiculares

Amplíen los ángulos siguientes cuyos rayos son paralelos, y hagan lo que se les pide.



- Midan ambos ángulos.
- Respondan. ¿Son suplementarios? ¿Qué concluyen?

Si un ángulo agudo y un ángulo obtuso tienen rayos paralelos, son suplementarios.

3 El sistema centesimal de medida angular

El sistema centesimal de medida angular divide a la circunferencia en 400 partes iguales llamadas grados centesimales (^{G}).

Las equivalencias de las unidades de este sistema con las de los sistemas sexagesimal y circular son: $360° = 400^G = 2\pi$ rad.

Minutos (^{M}) y segundos (^{S}) centesimales.

$1^G = 100^M$ $\quad 1^M = 100^S$

ACTIVIDADES

10 Transforma las medidas angulares del sistema sexagesimal al circular y viceversa.

- 30° = *π/r* rad
- 45° = *π/4* rad
- 60° = *π/3* rad
- 135° = *3π/4* rad
- π/12 rad = *15°*
- π/5 rad = *36°*
- 5π/6 rad = *150°*
- 2 rad = *114° 35′ 29.6″*

11 Resuelve el problema.

- Una rueda dentada da 600 vueltas por minuto. ¿En qué tiempo la rueda recorre 45°? NOTA: Una vuelta completa equivale a 360°.
  t = *1/80 s.*

Cuaderno: Ficha 10

Atención a la diversidad

Actividades de refuerzo: Solicíteles que transformen en radianes las siguientes medidas angulares expresadas en grados.

- 60°. Resp.: $\frac{\pi}{3}$ Rad.
- 90°. Resp.: $\frac{\pi}{2}$ Rad.
- 100°. Resp.: $\frac{5\pi}{9}$ Rad.
- 45°. Resp.: $\frac{\pi}{4}$ Rad.
- 140°. Resp.: $\frac{7\pi}{9}$ Rad.

Solicíteles que transformen en grados las siguientes medidas angulares expresadas en radianes.

- $\frac{2\pi}{12}$ Rad. Resp 30°.
- $\frac{3\pi}{10}$ Rad. Resp 144°.
- $\frac{2\pi}{4}$ Rad. Resp 90°.
- $\frac{2\pi}{3}$ Rad. Resp 120°.
- $\frac{\pi}{5}$ Rad. Resp 36°.

Ficha 10.

- **Desarrollo:** Muestre a sus estudiantes el proceso de solución de los ejemplos resueltos de la doble página y diseñe otros más. Haga que realicen transformaciones de medidas angulares diversas enviándoles a la pizarra. Propóngales que lean y realicen, en grupos, la actividad planteada en el apartado *Inteligencia colaborativa*, en la que ampliarán en una fotocopiadora los ángulos indicados, los medirán y, luego, responderán las preguntas.
- **Cierre:** Motive a sus estudiantes a realizar los ejercicios propuestos en el apartado *Actividades*. En la actividad 9, transformarán las medidas angulares del Sistema Sexagesimal al circular y viceversa. En la actividad 10, resolverán un problema de la cotidianidad que involucra el cálculo de medidas angulares.

Aprender a aprender

Pregunte al grupo: *¿Tuvieron alguna dificultad al realizar las transformaciones de medidas angulares? ¿Qué hicieron para superar el problema?*

Competencias

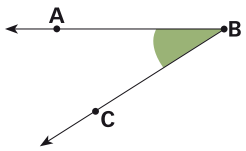
- Comunicativa.
- Uso de algoritmos.
- Resolución de problemas.

Indicadores de logro

- **Conoce** el concepto de *ángulo* y su notación. **Identifica** ángulos y **los designa** correctamente. **Identifica** ángulos consecutivos, adyacentes y opuestos por el vértice. **Clasifica**, **construye** y **mide** ángulos diversos. **Conoce** las unidades de medida angular del sistema sexagesimal. **Identifica** y **construye** ángulos congruentes y bisectrices. **Efectúa** operaciones de adición y sustracción de medidas angulares. **Determina** el complemento y el suplemento de medidas angulares. **Identifica** distintos sistemas de medida angular. **Realiza** transformaciones de una medida angular. **Resuelve** problemas del contexto que involucran medidas angulares.

ACTIVIDADES

12 Rodea las designaciones correctas para el ángulo de la figura siguiente.



- ∢BAC
- ∢CAB
- ∢ABC
- ∢A
- ∢CBA
- ∢B

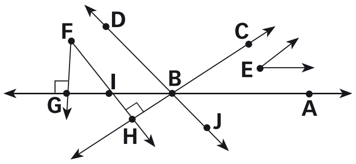
13 Traza, en tu cuaderno, lo que se te pide.

- Tres ángulos consecutivos.
- Dos ángulos obtusos opuestos por el vértice.
- Un par lineal.

14 Copia en tu cuaderno y, luego, escribe al lado de cada afirmación si es verdadera (V) o falsa (F).

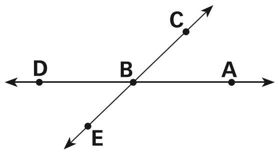
- V *La medida de un ángulo no tiene que ver con cuánto se extiendan sus rayos.*
- V *Cuando un ángulo se designa mediante una letra, esta es la de su vértice.*
- F *Dos ángulos consecutivos no pueden ser pares lineales.*
- F *Existe más de un rayo que hace que la medida de un ángulo sea **m**.*
- F *Dos ángulos de rayos paralelos siempre son congruentes.*

15 Identifica en la figura.



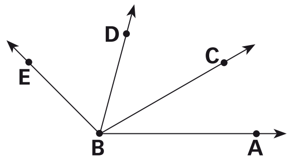
- Dos ángulos de rayos paralelos.
- Dos ángulos de rayos perpendiculares.
- Dos ángulos consecutivos.
- Dos ángulos adyacentes.

16 Responde las preguntas y haz lo que se te pide luego de cada pregunta.



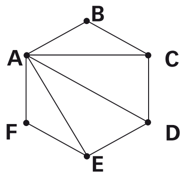
- ¿Cuántos pares de ángulos opuestos por el vértice se forman al cortarse dos rectas? Identifícalos en la figura.
  *Dos pares. **∢ABC** y **∢DBE**; **∢ABE** y **∢CBD**.*
- ¿Cuántos pares de ángulos adyacentes se forman? Identifícalos en la figura.
  *Dos pares. **∢EBA** y **∢ABC**; **∢EBD** y **∢CBD**.*

17 Haz una copia ampliada de los ángulos siguientes y determina las medidas.



- **m ∢ABC** = *30°*
- **m ∢CBD** = *45°*
- **m ∢DBE** = *60°*
- **m ∢ABD** = *75°*
- Comprueba el postulado de la adición con dos ángulos consecutivos cualesquiera de los presentes en la figura anterior.

18 Completa las expresiones siguientes.



- **m ∢BAC + m ∢CAD = m ∢** *BAD*
- **m ∢CAD + m ∢DAF = m ∢** *CAF*
- **m ∢CAE − m ∢DAE = m ∢** *CAD*
- **m ∢EAB + m ∢CAB = m ∢** *EAC*

19 Traza en una hoja suelta un ángulo cualquiera y construye su bisectriz.

- ¿Qué harías para comprobar tu construcción?

Competencias específicas

Competencia comunicativa

Es preciso que los estudiantes adquieran las habilidades necesarias para identificar los ángulos, las clases de ángulos, y puedan resolver operaciones con los mismos.

Uso de algoritmos

Las reglas y procedimientos en la resolución de operaciones aritméticas son vitales para la persecución de resultados correctos. Por ejemplo, en las operaciones que involucran las operaciones con ángulos y las transformaciones de medidas angulares.

Sugerencias didácticas

- Las actividades propuestas en esta página están estrechamente vinculadas a los conceptos y procedimientos desarrollados a lo largo de la unidad. Haga que lean cuidadosamente las instrucciones y, después, verifique las respuestas obtenidas.
- Es importante observar de cerca que sus estudiantes pueden identificar los diversos tipos de ángulos, efectúan operaciones con los mismos y transforman diversas medidas angulares.

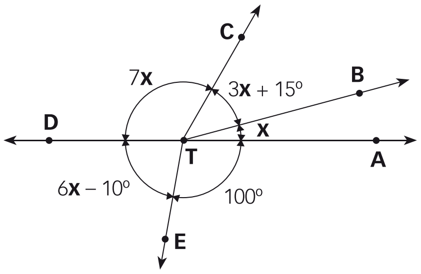
20 Efectúa las operaciones siguientes.

- 17° 45′ 36″ + 68° 19′ 45″ *86° 5′ 21″*
- 125° 18′ 27″ + 16° 37′ 39″ *141° 56′ 6″*
- 115° 32″ – 56° 26′ 48″ *58° 33′ 44″*
- 125° 50′ 18″ – 98° 46′ 55″ *27° 3′ 23″*
- 4 x 25° 15′ 45″ *101° 3′*
- 2.5 x 32° 18′ 40″ *80° 46′ 40″*

21 Lee y, luego, resuelve.

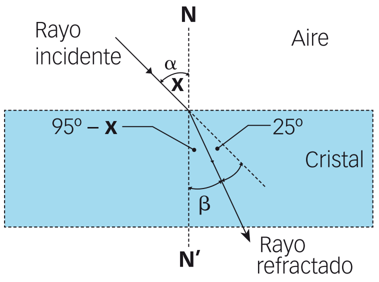
En un observatorio se ubican las posiciones angulares de algunas estrellas con respecto a la Tierra, **T**. ¿Cuáles son las medidas de los ángulos desconocidos?

$x = 15°$; $3x + 15° = 60°$; $7x = 105°$; $6x - 10° = 80°$



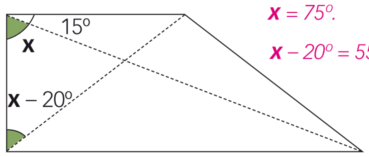
22 Resuelve el problema.

- Un rayo de luz al pasar del aire a un cristal sufre una desviación llamada refracción. El rayo refractado se acerca a la recta perpendicular **NN′** a la superficie del cristal. Obtén las medidas de los ángulos de incidencia, α y de refracción, β.



Ángulo incidencia, α = 60°; ángulo de refracción, β = 35°.

23 Determina la medida desconocida de los ángulos coloreados del cuadrilátero.

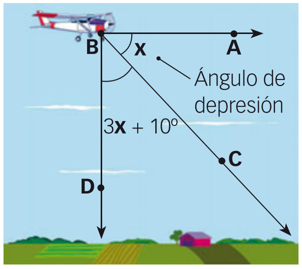


$x = 75°$.

$x - 20° = 55°$.

24 Lee y, luego, resuelve el problema.

Un ángulo de depresión es el formado por la línea horizontal, $\overleftrightarrow{BA}$, paralela al terreno y la línea visual, $\overleftrightarrow{BC}$, por debajo de dicha horizontal.



3x + 10° x

- Obtén la medida **x** del ángulo de depresión **ABC** de la figura anterior. *$x = 20°$.*

25 Resuelve los problemas planteando y resolviendo las ecuaciones ajustadas en cada caso.

- El complemento de un ángulo es 10° menor que cinco veces dicho ángulo. ¿Cuál es la medida del ángulo?
  $(5x - 10°) + x = 90°$ *$x = 16° 40′$*
- ¿Cuál es la medida del ángulo cuyo suplemento es 5° mayor que seis veces dicho ángulo?
  $(6x + 5°) + x = 180°$ *$x = 25°$*
- Dos ángulos consecutivos son tales que la medida de uno de ellos es menor, en 58°, al triplo del otro. Si ambos ángulos forman a un tercero de medida 82°, ¿cuánto miden los ángulos?

$x + (3x - 58°) = 82°$ *Los ángulos miden 35° y 47°.*

Competencias fundamentales

Pensamiento lógico, creativo y crítico

Los conocimientos adquiridos por los estudiantes son necesarios para identificar las alternativas más convenientes en la persecución de la solución de problemas que forman parte de su diario vivir. En este aspecto radica la importancia de que reconozcan, sin dificultad, los conceptos relacionados con ángulos y las operaciones que los involucran.

Criterios de evaluación

Competencia comunicativa:

- Adaptación de las representaciones gráficas, simbólicas y numéricas a la situación de comunicación.

Competencia algoritmo:

- Seguimiento de las reglas, instrucciones y procedimientos.

Competencia pensamiento lógico, creativo y crítico

- Selecciona una estrategia, la aplica y evalúa su efectividad.

Sugerencias didácticas

Resolución de problemas

- Proponga a sus estudiantes que lean detenidamente las instrucciones de los problemas planteados en las actividades 20, 21, 22, 23, 24 y 25. Estos problemas son aplicaciones cotidianas de las operaciones con ángulos y las transformaciones de medidas angulares. Acompañe a sus estudiantes en la realización de estas actividades y ofrézcales las orientaciones necesarias.

Aprender a aprender

Motive a sus estudiantes para que inventen ejemplos de las aplicaciones cotidianas de los conceptos desarrollados en la unidad. Por ejemplo, pregunte al grupo: *¿Qué papel juegan los ángulos en las construcciones arquitectónicas?* Discuta las diversas respuestas con el grupo.

Indicadores de logro de la evaluación

- **Conoce** el concepto de *ángulo* y su notación. **Identifica** ángulos y **los designa** correctamente. **Identifica** ángulos consecutivos, adyacentes y opuestos por el vértice. **Clasifica**, **construye** y **mide** ángulos diversos. **Conoce** las unidades de medida angular del Sistema Sexagesimal. **Identifica** y **construye** ángulos congruentes y bisectrices. **Efectúa** operaciones de adición y sustracción de medidas angulares. **Determina** el complemento y el suplemento de medidas angulares. **Identifica** distintos sistemas de medida angular. **Realiza** transformaciones de una medida angular. **Resuelve** problemas del contexto que involucran medidas angulares. **Utiliza** recursos virtuales y electrónicos: computadora, programas educativos, juegos interactivos y otros, en la búsqueda de información.

Competencias específicas

- Comunica.
- Razona y argumenta.
- Modela y representa.
- Usa algoritmos.
- Conecta.
- Resuelve problemas.

Aprender a aprender

Plantear al grupo: *Si tienen que medir el ángulo de inclinación de una rampa, ¿qué datos deben conocer?*

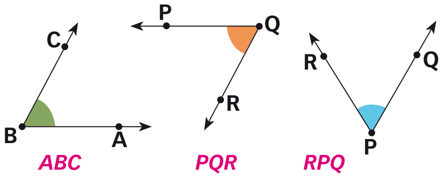
EVALUACIÓN

Comunica

26 Escribe en el lenguaje de la vida cotidiana la proposición simbólica siguiente.

$$[\measuredangle A \cong \measuredangle B \wedge \measuredangle B \cong \measuredangle C] \longrightarrow \measuredangle A \cong \measuredangle C$$

27 Nombra los ángulos siguientes.



ABC *PQR* *RPQ*

Razona y argumenta

28 Lee las proposiciones **A** y **B** y, luego, responde las preguntas.

A: *Si dos ángulos son adyacentes, entonces dichos ángulos son consecutivos, es una proposición condicional,* **p** ⟶ **q**.

B: *Si dos ángulos son consecutivos, entonces dichos ángulos son adyacentes, es la recíproca de la anterior condicional,* **q** ⟶ **p**.

- ¿Es verdadera la recíproca de **A**?
- ¿Cómo argumentas tu respuesta?

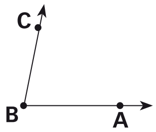
Modela y representa

29 Construye con un transportador ángulos con las medidas siguientes.

- 10º
- 38º
- 109º
- 245º

■ Explica qué hiciste para construir el ángulo de medida 245º.

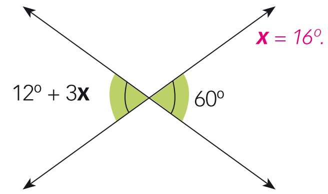
30 Copia y, luego, construye un ángulo congruente al ABC dado.



- Traza la bisectriz del $\measuredangle$**ABC** y comprueba tu resultado.

Usa algoritmos

31 Determina el valor desconocido x.



32 Transforma las medidas angulares de complejas a incomplejas o viceversa.

- 35º 12′ 18″ = 35.205º
- 3 200′ = 53º 20′
- 15 640″ = 4º 20′ 40″
- 158º 26′ 57″ = ...′ 9 506.95

33 Obtén lo que se te pide.

■ El complemento de los ángulos cuyas medidas se especifican abajo.

- 19º 35′ 56″. *70º 24′ 4″*
- 41º 12′ 48″. *48º 47′ 12″*

■ El suplemento de los ángulos cuyas medidas se muestran abajo.

- 79º 58′ 22″. *100º 1′ 38″*
- 128º 55″. *51º 59′ 5″*

34 Transforma las medidas angulares.

- 5π/6 rad al sistema sexagesimal. *150º*
- 240º al sistema circular. *4π/3 rad*
- 63º al sistema centesimal. *70º*
- 60^G 25^M 36^S al sistema sexagesimal. *54º 13′ 41.7″*

Conecta

35 Si la ruleta da 20 vueltas cada segundo, responde las preguntas.

- ¿En qué tiempo da la rueda una sola vuelta? *1/20 s.*
- ¿Cuántos radianes por segundo recorre la rueda? *40π rad/s.*

Sugerencias didácticas para la evaluación

- Es importante verificar, antes de dar inicio a las actividades de evaluación, que sus estudiantes conocen el concepto de *ángulo* y su clasificación. Observe que aplican correctamente los procedimientos para operar con ángulos y que realizan transformaciones de medidas angulares.

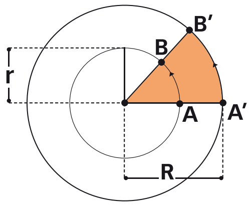
SABER HACER

36 **Debate.** Lean y, luego, respondan argumentando sus respuestas.

La velocidad angular, ω, de una rueda es el ángulo barrido por su radio en una unidad de tiempo, **t**: ω = Ángulo/**t**.

La velocidad tangencial es el arco de circunferencia recorrido por cualquier punto de la periferia en una unidad de tiempo: **v** = **s**/**t**.

Para una rueda con rapidez constante: $\omega = 2\pi/\mathbf{T}$; $\mathbf{v} = 2\pi\mathbf{r}/\mathbf{T}$, donde **T** es el tiempo que tarda la rueda en dar una vuelta o periodo.



- ¿Cómo se relacionan matemáticamente las velocidades, ω y **v**?
  $v = \omega \times r$.
- Si dos ruedas de radios distintos tienen igual velocidad angular, ¿la de mayor radio recorre mayor distancia en el mismo tiempo?
  Sí.
- Si la respuesta anterior fuera un no, ¿cómo ruedas de radios distintos podrían recorrer la misma distancia en un mismo tiempo?

La rueda de menor radio debe dar más vueltas por unidad de tiempo que la de mayor radio.

37 Responde las preguntas.

- ¿Qué entiendes tú por una ciudad inclusiva?
- ¿En la ciudad donde vives se atiende a la diversidad de sus habitantes? Señala tres ejemplos.
- ¿Qué relación puedes establecer entre democracia e inclusión?

APRENDIZAJE AUTÓNOMO

38 Marca según tus logros.	Iniciado	En proceso	Logrado
• Identifico ángulos y los designo correctamente.	▢	▢	▢
• Clasifico, construyo y mido ángulos diversos.	▢	▢	▢
• Identifico y construyo ángulos congruentes y bisectrices.	▢	▢	▢
• Efectúo operaciones con medidas angulares.	▢	▢	▢
• Identifico y transformo sistemas de medida angular.	▢	▢	▢

Reflexiona sobre tu aprendizaje.

- ¿Estás satisfecho con tu trabajo con los contenidos de la unidad?
- ¿En cuáles temas te gustaría profundizar? ¿Por qué?

Sugerencias didácticas para la evaluación

- Pregunte a sus estudiantes:
  — *¿Qué es un ángulo y cómo se nombran los ángulos?*
  — *¿Cómo se clasifican los ángulos?*
  — *¿Cuál es la unidad principal del Sistema Sexagesimal de medida de ángulo?*
  — *¿Cuándo decimos que dos ángulos son congruentes?*
  — *¿Qué es el radián?*

Saber hacer

En la actividad 36, *Saber hacer*, se aplica la estrategia de evaluación *Debate*. Leerán cuidadosamente el contenido del texto y, luego, harán lo que se les indica. En este caso, observarán las ilustraciones y analizarán las fórmulas de la velocidad angular y tangencial y la velocidad constante que tarda una rueda en dar una vuelta. Después, relacionarán matemáticamente estas fórmulas y responderán las preguntas. Finalmente, discutirán las respuestas en el grupo.

Actitudes y valores

Convivencia

En la sección destinada a *Actitudes y valores*, actividad 37, responderán qué entienden por una ciudad inclusiva. Expresarán si en la ciudad donde viven se atiende a la diversidad de sus habitantes. Señalarán tres ejemplos. Para concluir, dirán qué relación pueden establecer entre democracia e inclusión.

Aprendizaje autónomo

En el apartado *Aprendizaje autónomo*, actividad 38, evaluarán por ellos mismos si los conceptos y procedimientos que trabajaron en la unidad se encuentran en estado de iniciación, en proceso o logrado. En la actividad 39, reflexionarán sobre su proceso de aprendizaje.

Aprender a aprender

Haga que sus estudiantes apliquen los conceptos aprendidos en la unidad en situaciones de la cotidianidad, por ejemplo, preguntar: *¿En cuáles situaciones de la vida cotidiana están presentes las medidas angulares?*

3 Rectas paralelas y perpendiculares

Propuesta de programación

COMPETENCIAS	CONTENIDOS
Específicas • **Razona y argumenta**: **Utiliza** los conceptos de *rectas paralelas* y *perpendiculares* y sus propiedades para justificar y probar problemas en situaciones de la vida cotidiana. • **Comunica**: **Interpreta** y **da** explicaciones sobre croquis, maquetas y situaciones del entorno que se relacionan con rectas paralelas y perpendiculares. • **Modela y representa**: **Utiliza** gráficos diversos para representar situaciones del entorno que involucren rectas paralelas y perpendiculares. • **Usa algoritmos**: **Sigue** las reglas que le permiten obtener un resultado al resolver problemas que involucran rectas paralelas y perpendiculares. • **Conecta**: **Relaciona** y **aplica** los conocimientos sobre rectas paralelas y perpendiculares para dar explicaciones e interpretar nuevas situaciones de la Geometría y de otras áreas del conocimiento. • **Resuelve problemas**: **Resuelve** problemas en diversos contextos de la vida cotidiana que involucran rectas paralelas y perpendiculares y sus propiedades. • **Utiliza herramientas tecnológicas**: **Utiliza** soportes tecnológicos como la Internet, la calculadora científica y otros dispositivos. **Fundamentales** **Resolución de problemas**: **Identifica** y **utiliza** estrategias, y **genera** alternativas de solución**.**	**Conceptos** • Rectas paralelas y perpendiculares. • Construcciones con regla y compás. • Rectas paralelas y una transversal. • Paralelogramos. Construcciones. **Procedimientos** • Identificación de rectas paralelas y perpendiculares. • Trazado de rectas paralelas y perpendiculares con la regla y el compás. • Identificación de los ángulos formados por una recta transversal y un par de rectas coplanares. **Actitudes y valores** • Valoración de las aplicaciones de la Geometría. • Apreciación de la creatividad en el arte.

Tiempo estimado de trabajo: 2 semanas

INDICADORES DE LOGRO

- **Identifica** rectas paralelas y perpendiculares.
- **Reconoce** las propiedades del paralelismo y la perpendicularidad.
- **Construye** rectas paralelas y perpendiculares usando la regla y el compás.
- **Construye** la perpendicular que pasa por un punto de una recta usando la regla y el compás.
- **Construye** una recta paralela a una distancia dada de una recta.
- **Construye** una recta perpendicular a un segmento que pasa por uno de sus extremos.
- **Identifica** los ángulos formados por una recta transversal y un par de rectas coplanares y **determina** la medida de los ángulos formados.
- **Resuelve** problemas del contexto que involucran aplicar las propiedades de las rectas paralelas y perpendiculares.
- **Utiliza** recursos virtuales y electrónicos: computadora, programas educativos, juegos interactivos y otros, en la búsqueda de información.

Valor transversal: Creatividad

Recursos digitales

Plataforma digital

CD

BIBLIOTECA DEL DOCENTE

- DOCUMENTOS PARA LA PLANIFICACIÓN
- GUÍA DE RECURSOS TIC

CUADERNO DE ACTIVIDADES

UNIDAD 3	Rectas paralelas y perpendiculares

RECURSOS DE REFUERZO Y AMPLIACIÓN

LibroMedia

ACTIVIDADES INTERACTIVAS

PÁGINA 39	Tipos de rectas.
PÁGINA 42	Rectas paralelas y perpendiculares.
PÁGINA 46	Ángulos

CD DE RECURSOS DIGITALES: PLAN REGULAR

Pleno: PRUEBA DE EVALUACIÓN FORMATIVA DE LA UNIDAD

Estrategias pedagógicas

- Recuperación de experiencias previas.
- Trabajo en equipo.
- Aprendizaje basado en problemas (ABP).

Unidad 3

Competencias de la unidad

- **Lee** y **comenta** las informaciones expuestas en el apartado *Punto de partida*.
- **Responde** preguntas relacionadas con las informaciones expuestas en el apartado *Punto de partida*.
- **Recupera** experiencias vividas mediante la observación de las imágenes de la ilustración.
- **Analiza** un problema de la vida cotidiana vinculado a los conceptos y procedimientos que desarrollarán en la unidad en el apartado *Analiza el problema*.
- **Plantea** soluciones al problema leído y analizado anteriormente, en el apartado *Plantea una solución*.

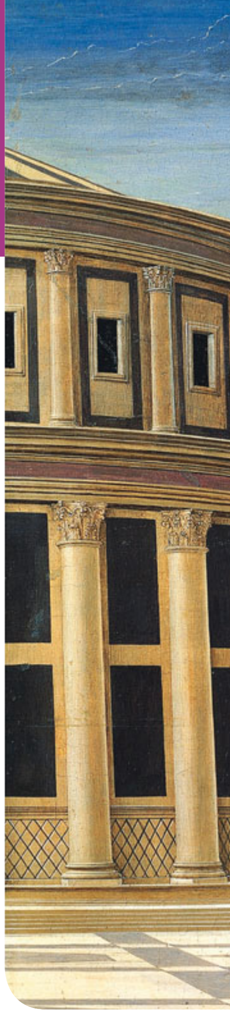
Apertura de la unidad

Dentro de los objetivos principales de la apertura de esta unidad se encuentran el plantear una situación de aprendizaje, una problemática o un texto que sirve para contextualizar el tema de la misma. Todo esto con la finalidad de motivar y despertar la curiosidad de los estudiantes.

A partir de la situación o texto planteado, el problema a analizar y las imágenes de la ilustración se conecta al estudiante con el tema a tratar, a la vez que vincula con la realidad o cotidianidad los temas que se van a desarrollar.

Todos los elementos que conforman la portada promueven la recuperación de experiencias o conocimientos previos y la motivación o el interés por los conocimientos que adquirirán en la unidad.

3 Rectas paralelas y perpendiculares



Conceptos

- Rectas paralelas y perpendiculares.
- Construcciones con regla y compás.
- Rectas paralelas cortadas por una transversal.
- Paralelogramos. Construcciones diversas.

Procedimientos

- Resolución de problemas.
- Construcción de diversas figuras geométricas.

Actitudes y valores

- Valoración de las aplicaciones de la Geometría.
- Aprecio la creatividad en las creaciones del arte.

Pintura medieval. Ciudad amurallada y sus alrededores.

Punto de partida

La pintura ha experimentado cambios significativos a lo largo de su historia. Temas, técnicas y recursos se han modificado y hecho más complejos y exigentes con el paso del tiempo.

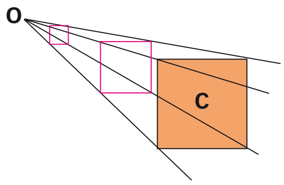
Las primeras manifestaciones de la pintura, asociadas a las actividades de la vida cotidiana, no exigieron de muchos recursos técnicos. Las escenas recreadas por la pintura carecían de las proporciones correctas y los objetos en el espacio se representaban, sin profundidad.

Hasta finales de la Edad Media los pintores no conocían las técnicas que más tarde les permitieron dar la impresión de distancia y profundidad. Filippo Brunelleschi fue quien, cerca del año 1430, introdujo la perspectiva, fundándose en sus conocimientos de la Geometría. Más tarde, pintores como Piero della Francesca y Albert Durero emplearon ampliamente la perspectiva para dar una visión más realista de los objetos en el espacio.

- ¿En qué consiste la técnica de la perspectiva en la pintura?

ANALIZA EL PROBLEMA

Se quieren conseguir dos vistas alejadas de un observador del cuadrado **C** de la figura. Las vistas deben apuntar hacia al punto **O** situado en el horizonte y deben conservar la forma original de **C**.



¿Cómo construirías las dos vistas de **C** en perspectiva?

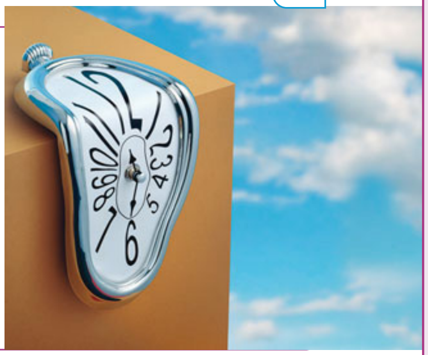
Trabajo colectivo de apertura

- **Punto de partida**: Guíe a sus estudiantes a leer y comentar en el grupo las informaciones expuestas en el apartado *Punto de partida*, que trata sobre la carencia de recursos técnicos en la pintura en sus inicios y los cambios a partir de la introducción de la perspectiva por Filippo Brunelleschi.
- **Analiza el problema**: En este apartado se plantea que se quieren conseguir dos vistas alejadas de un observador del cuadrado, apuntando hacia el horizonte y conservando su forma original.
- **Plantea una solución:** En este apartado se plantean preguntas relacionadas con la figura que representa el cuadrado **C** y el punto **O** situado en el horizonte. Expresarán de qué manera podrían reproducir esta figura de acuerdo con las indicaciones.

La ciudad ideal (1475). Pintura atribuida a Piero della Francesca (1415-1492), una notable aplicación de la perspectiva.

PLANTEA UNA SOLUCIÓN

- Observa la ilustración de la página anterior y, luego, responde las preguntas.
  - ¿Qué papel juegan las líneas que se cortan en el punto **O**?
  - ¿Cómo deben desplazarse los lados del cuadrado **C** para que las dos vistas den la impresión de estar situadas más lejos que la figura original?
- Ahora, piensa en la manera en que podrías reproducir dos vistas del cuadrado alejadas del ojo del observador. Expón tu solución en el aula.



Esquema conceptual de la unidad

Rectas paralelas y perpendiculares

La Geometría se ocupa de estudiar

- Rectas paralelas
- Rectas perpendiculares
- Rectas paralelas y transversales

Construcciones con regla y compás

Ángulos

Actividad de motivación

Pida a sus estudiantes que lean en la sección: *Conceptos y procedimientos*, los temas que trabajarán en la unidad y las actitudes y valores que estarán presentes en el desarrollo de la misma. Luego, para que interioricen la importancia de conocer las propiedades de las rectas paralelas y las perpendiculares, formúleles preguntas como las siguientes: *¿Cómo se representan y distribuyen las calles en un mapa o croquis de un sector? ¿Qué importancia tiene conocer los conceptos de* paralelismo *y* perpendicularidad *en la interpretación de un mapa? ¿Podrían mencionar calles paralelas y perpendiculares a la calle donde residen?*

Actividad interactiva

Tipos de rectas

Actividad interactiva de recuperación de experiencias, en la que observarán un dibujo formado por rectas paralelas y perpendiculares, luego seleccionarán, entre las opciones, las respuestas correctas.

Actitudes y valores

Creatividad

Aproveche la situación planteada en el apartado *Punto de partida* y en las imágenes de la ilustración para conversar con sus estudiantes acerca del papel invaluable y significativo del arte en las sociedades y de su presencia en todos los aspectos de nuestra vida cotidiana. Pregunte al grupo: *¿Podrían dar algunos ejemplos de la presencia del arte en la naturaleza?*

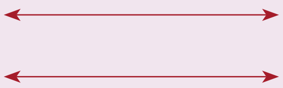
Indicadores de logro

- **Identifica** rectas paralelas y perpendiculares.
- **Reconoce** las propiedades tanto del paralelismo como de la perpendicularidad.

Más información

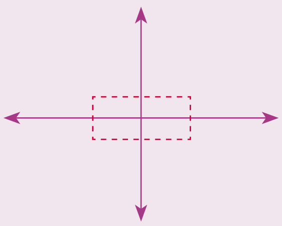
Comente a sus estudiantes que dos rectas son paralelas cuando no tienen ningún punto en común.

Las rectas paralelas pueden trazarse con la regla y la escuadra y con la regla y el compás.



Dos rectas son perpendiculares cuando al cortarse forman cuatro ángulos rectos, o sea, de 90 grados.

Las rectas perpendiculares pueden trazarse con escuadra, por un punto perteneciente a la misma recta o fuera de la misma o con compás, por un punto perteneciente a la recta o por un punto fuera de la misma.



RECTAS PARALELAS Y PERPENDICULARES

RECUPERACIÓN

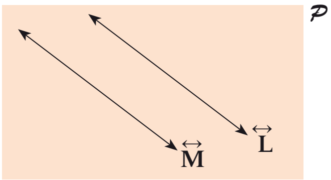
Observa a tu alrededor y, luego, responde.

- ¿Qué figuras o contornos sugieren la noción de rectas paralelas?

Vía férrea. Las líneas paralelas dan la impresión de tocarse en un punto muy lejano.

1 Rectas paralelas

Dos rectas que pertenecen a un mismo plano que no se cortan en un punto son rectas paralelas.

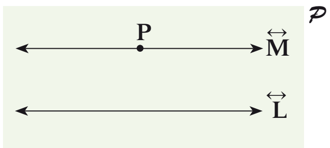


Las rectas $\overleftrightarrow{L}$ y $\overleftrightarrow{M}$ sobre el plano $\mathcal{P}$ son paralelas: $\overleftrightarrow{L} \cap \overleftrightarrow{M} = \varnothing$.

El paralelismo de $\overleftrightarrow{L}$ y $\overleftrightarrow{M}$ se designa: $\overleftrightarrow{L} \parallel \overleftrightarrow{M}$.

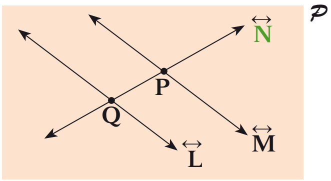
El postulado de las paralelas de Euclides muestra que:

Si una recta $\overleftrightarrow{L}$ *y un punto* **P**, *tal que* $\mathbf{P} \notin \overleftrightarrow{L}$, *están en un mismo plano* $\mathcal{P}$, *por* **P** *pasa una y solo una recta paralela a* $\overleftrightarrow{L}$.



La recta paralela $\overleftrightarrow{M}$ que pasa por el punto **P** es única.

Si una recta $\overleftrightarrow{N}$ perteneciente al plano de dos paralelas, $\overleftrightarrow{L}$ y $\overleftrightarrow{M}$, corta a una de ellas, también corta a la otra.



$$\overleftrightarrow{N} \cap \overleftrightarrow{M} = \{\mathbf{P}\} \wedge \overleftrightarrow{N} \cap \overleftrightarrow{L} = \{\mathbf{Q}\}$$

El paralelismo entre dos rectas cumple con las propiedades siguientes:

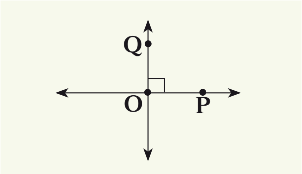
- Toda recta $\overleftrightarrow{L}$ es paralela a sí misma: $\overleftrightarrow{L} \parallel \overleftrightarrow{L}$.
- Si $\overleftrightarrow{L} \parallel \overleftrightarrow{M}$, entonces $\overleftrightarrow{M} \parallel \overleftrightarrow{L}$: $\overleftrightarrow{L} \parallel \overleftrightarrow{M} \longrightarrow \overleftrightarrow{M} \parallel \overleftrightarrow{L}$.
- Si $\overleftrightarrow{L} \parallel \overleftrightarrow{M}$ y $\overleftrightarrow{M} \parallel \overleftrightarrow{N}$, entonces $\overleftrightarrow{L} \parallel \overleftrightarrow{N}$: $[(\overleftrightarrow{L} \parallel \overleftrightarrow{M}) \wedge (\overleftrightarrow{M} \parallel \overleftrightarrow{N})] \longrightarrow \overleftrightarrow{L} \parallel \overleftrightarrow{N}$.

Sugerencias didácticas

- **Inicio:** Oriente a sus estudiantes para que lean y respondan la actividad vinculada a la recuperación de experiencias previas propuesta en el apartado *Recuperación*, en la que responderán una pregunta relacionada con las rectas paralelas.
- **Desarrollo:** Pida a sus estudiantes que lean cuidadosamente el contenido de la doble página, que observen las representaciones gráficas y el desarrollo de los conceptos. Haga que observen la fotografía de la vía férrea y lean la información al pie de la misma. Formúleles preguntas como, por ejemplo: *¿Podrían dar un ejemplo similar al que se plantea con la imagen de la vía férrea?* Continúe con las preguntas.

2 Rectas perpendiculares

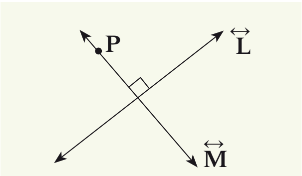
Dos rectas que pertenecen a un mismo plano son perpendiculares si se cortan formando ángulos rectos.



Las rectas $\overleftrightarrow{L}$ y $\overleftrightarrow{M}$ sobre $\mathcal{P}$ son perpendiculares: **m** $\sphericalangle$**POQ** = 90º.

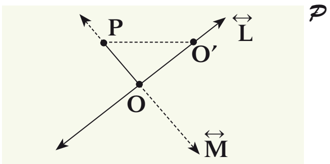
La perpendicularidad de $\overleftrightarrow{L}$ y $\overleftrightarrow{M}$ se designa: $\overleftrightarrow{L} \perp \overleftrightarrow{M}$.

Si un punto **P** y una recta $\overleftrightarrow{L}$, tal que **P** $\notin$ a $\overleftrightarrow{L}$, están en un mismo plano $\mathcal{P}$, por **P** pasa una y solo una recta perpendicular a $\overleftrightarrow{L}$.



El segmento más corto que une al punto **P** con la recta $\overleftrightarrow{L}$ está contenido en la perpendicular a $\overleftrightarrow{L}$ que pasa por **P**.

Para cualquier segmento $\overline{PO'}$, distinto de $\overline{PO}$, se cumplirá la desigualdad:



$$\measuredangle(PO) < \measuredangle(PO')$$

ACTIVIDADES

1 Piensa y, luego, responde.

- ¿Puede afirmarse que dos rectas son paralelas si la distancia entre dos puntos de una y otra es constante? *Sí, porque si no lo fuera las rectas se tocarían.*
- Si una recta $\overleftrightarrow{L}$ es perpendicular a otra $\overleftrightarrow{M}$ y esta, a su vez, perpendicular a una tercera $\overleftrightarrow{N}$, ¿la recta $\overleftrightarrow{L}$ es perpendicular a la recta $\overleftrightarrow{N}$? *No, serían paralelas.*
- ¿Puedes concebir dos líneas rectas que sin ser paralelas nunca se cortan? Si tu respuesta es afirmativa, explica cómo es posible. *Sí. Si las rectas no pertenecen a un mismo plano.*

- **Desarrollo:** Muéstreles ejemplos de los conceptos desarrollados en la doble página. Pídales que expresen ejemplos de la presencia de las rectas paralelas y las perpendiculares en su entorno. Haga que reproduzcan las representaciones gráficas de estas rectas en sus cuadernos, tal como se muestran en la doble página.
- **Cierre:** Motive a sus estudiantes a realizar los ejercicios del apartado *Actividades*. En la actividad 1, responderán si se puede afirmar que dos rectas son paralelas si la distancia entre dos puntos de una y otra es constante. Responderán si una recta **L** es perpendicular a otra **M**, y esta, a su vez, perpendicular a una tercera **N**, *¿la recta* ***L*** *es perpendicular a* ***N****?* Por último, si pueden concebir dos líneas rectas que sin ser paralelas nunca se cortan. Justificarán sus respuestas.

Atención a la diversidad

Actividad de refuerzo: Pida a sus estudiantes que reproduzcan este croquis como ejemplo en cartulina o en papel de construcción, y que representen las calles del sector donde residen. Identificar con sus nombres las calle paralelas y perpendiculares, edificaciones, parques, comercios, etc. y titularlo con el nombre del sector o residencial. Después de terminados los trabajos, motíveles a comentarlos en el grupo.

Ficha 11.

Aprender a aprender

Pregunte a sus estudiantes: *¿Qué conocimientos previos sobre las rectas paralelas y perpendiculares tenían antes de trabajar con esta doble página? ¿Creen que esos conocimientos facilitaron el trabajo?¿Por qué?*

Indicadores de logro

- **Construye** rectas paralelas y perpendiculares usando la regla y el compás.
- **Construye** la perpendicular que pasa por un punto de una recta usando la regla y el compás.

Actividad interactiva

Rectas paralelas y perpendiculares

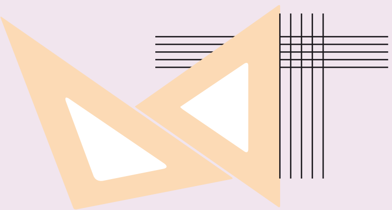
Presentación en la que se muestra, en varios pasos, el procedimiento para trazar rectas paralelas y perpendiculares a una recta que pasa por un punto.

Más información

Trazado de rectas paralelas y perpendiculares con escuadra y cartabón

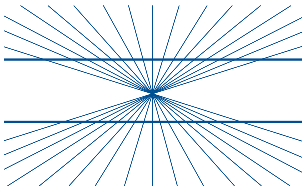
- Para trazar rectas paralelas se coloca la escuadra encima del papel y se traza la recta por el lado más ancho de la escuadra.

- Para trazar rectas perpendiculares se colocan la escuadra y el cartabón como se muestra en el dibujo.



RECUPERACIÓN

Observa, piensa y, luego, responde.

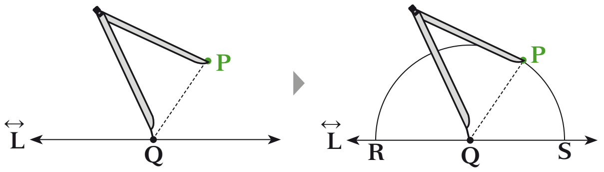


- ¿Basta la vista para determinar si dos rectas son paralelas?
- ¿Son paralelas las líneas de la figura?

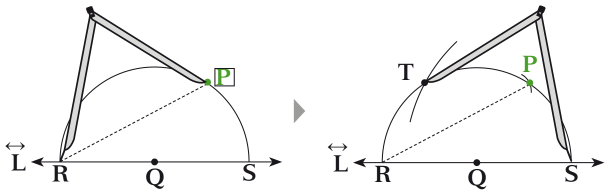
1 Construcción de rectas paralelas

Sigue atentamente el procedimiento para construir con reglas y compás una recta paralela a una dada $\overleftrightarrow{L}$ y que pase por el punto exterior a ella, **P**.

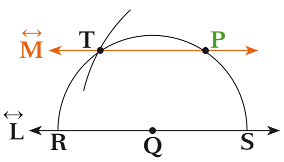
1.º Se marca un punto **Q** sobre la recta $\overleftrightarrow{L}$ y con el compás con abertura **QP** y apoyando en **Q**, se traza un arco de circunferencia que corte a $\overleftrightarrow{L}$ en dos puntos, **R** y **S**:



2.º Apoyando su punta metálica en el punto **R**, se abre el compás hasta el punto **P** y con esta abertura, **RP**, y con centro en **S**, se traza un arco que corte al anterior en el punto **T**.



3.º Finalmente se unen los puntos **P** y **T** mediante una recta $\overleftrightarrow{M}$ que será la paralela a $\overleftrightarrow{L}$ buscada:



La recta $\overleftrightarrow{M}$ es la única paralela a $\overleftrightarrow{L}$ que pasa por el punto **P**.

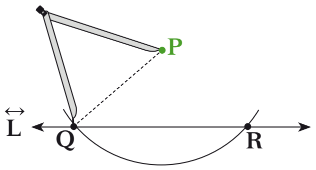
Sugerencias didácticas

- **Inicio:** Oriente a sus estudiantes para que lean y realicen en el aula la actividad vinculada a recuperación de experiencias previas propuesta en el apartado *Recuperación*, en la que observarán una figura formada por diversas líneas y, después, responderán las preguntas.
- **Desarrollo:** Pida a sus estudiantes que lean cuidadosamente el contenido de la doble página, que observen las representaciones gráficas y los procedimientos para realizar las construcciones de rectas paralelas y perpendiculares. Es necesario que lleven al aula su regla y su compás para que reproduzcan los gráficos correspondientes y, luego, desarrollen otras construcciones en sus cuadernos.

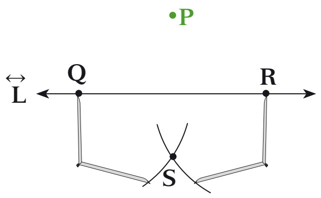
2 Construcción de rectas perpendiculares

Para construir una recta perpendicular a una dada **L** y que pase por el punto exterior **P**, se emplea el siguiente procedimiento.

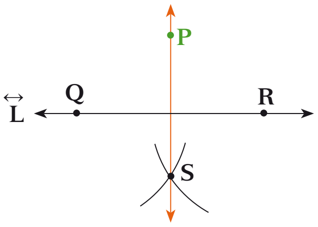
1.º Se apoya la punta metálica del compás en el punto **P** y con una abertura tal que pueda trazarse un arco que corte a la recta $\overleftrightarrow{\mathbf{L}}$ en dos puntos **Q** y **R**:



2.º Con la misma abertura, y con centros en los puntos **Q** y **R**, se trazan con el compás dos arcos que se cortarán en un punto **S**:



3.º Finalmente, se traza la línea recta que pasa por los puntos **P** y **S** que es la perpendicular buscada, **M**.



La recta **M** perpendicular a **L** y que pasa por **P** es única.

SABER MÁS

Perpendicular que pasa por un punto de una recta $\overleftrightarrow{\mathbf{L}}$

Dadas una recta $\overleftrightarrow{\mathbf{L}}$ y un punto cualquiera, **P**, de ella:

La perpendicular a $\overleftrightarrow{\mathbf{L}}$ que pasa por el punto **P** se construye como sigue:

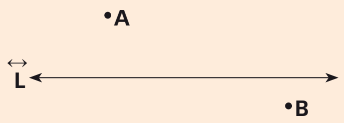
1.º Con centro en **P** se traza un arco que corte a $\overleftrightarrow{\mathbf{L}}$ en dos puntos, **Q** y **R**.

2.º Apoyando el compás en los puntos **Q** y **R**, y con igual o distinta abertura, se trazan dos arcos que se corten en un punto **S**.

3.º Uniendo los puntos **P** y **S**, se consigue la recta perpendicular buscada.

ACTIVIDADES

2 Copia en tu cuaderno y, luego, traza lo que se te indica.



- Paralelas a la recta $\overleftrightarrow{\mathbf{L}}$ que pasen por los puntos exteriores **A** y **B**.
- Perpendiculares a la recta $\overleftrightarrow{\mathbf{M}}$ que pasen por los puntos **P** y **Q**.

3 Explica por qué la recta que resulta de emplear el procedimiento descrito en esta página es perpendicular a la recta $\overleftrightarrow{\mathbf{L}}$. *Las diagonales del cuadrado son perpendiculares.*

Atención a la diversidad

Actividades de refuerzo: Forme varios grupos de estudiantes con su regla y compás a la mano y, luego, pídales que construyan en hojas blancas, rectas paralelas y perpendiculares siguiendo los pasos especificados en esta doble página.

Propóngales, además, que construyan la recta perpendicular que pasa por un punto de una recta **L**, siguiendo los pasos que se les indican en el apartado *Más información*.

Asegúrese de que utilizan adecuadamente el compás en las construcciones de las rectas. Es importante formularles preguntas que permitan verificar si comprenden y aplican correctamente los procedimientos.

Ficha 12.

- **Desarrollo:** Muestre a sus estudiantes los procedimientos para construir las rectas paralelas y perpendiculares. Pídales que sigan las indicaciones y construyan diversas rectas en sus cuadernos. Motíveles para que lean y reproduzcan en sus cuadernos el contenido del apartado *Saber más*, que muestra los pasos para construir la perpendicular que pasa por un punto de una recta **L**.
- **Cierre:** Motive a sus estudiantes a realizar los ejercicios del apartado *Actividades*. En la actividad 2, copiarán las rectas en sus cuadernos y, luego, trazarán las que se les indican. En la actividad 3, explicarán por qué la recta que resulta de emplear el procedimiento descrito en esta página es perpendicular a la recta **L**. Acompáñeles en el proceso de realización de estas actividades.

Aprender a aprender

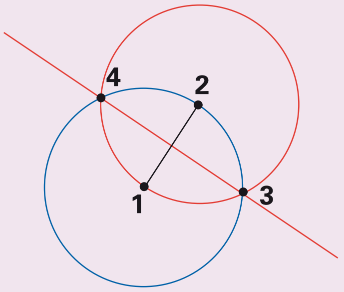
Pregunte a sus estudiantes: *¿Tuvieron alguna dificultad en el trazado de las rectas paralelas y perpendiculares? ¿En qué consistió el problema? ¿Qué hicieron para resolverlo?*

Indicadores de logro

- **Construye** una recta paralela a una distancia dada de una recta.
- **Construye** una recta perpendicular a un segmento que pasa por uno de sus extremos.

Más información

Otra construcción con regla y compás:



Primero:

Usando el compás, trazamos el círculo de centro (1) y radio (1-2).

Segundo:

Trazamos el círculo con centro (2) y el mismo radio (1-2).

Tercero:

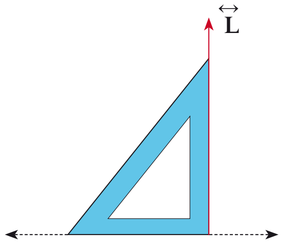
Marcamos los puntos coincidentes de los círculos o intersecciones (3 y 4).

Cuarto:

Trazamos con la regla la recta que une los puntos 3 y 4, que es la perpendicular al segmento (1-2).

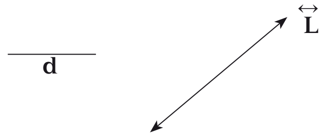
RECUPERACIÓN

Descubre, a partir de la figura siguiente, una manera de trazar un par de rectas paralelas con la escuadra.

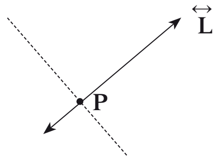


1 Construcción de una recta paralela a una distancia dada de una recta

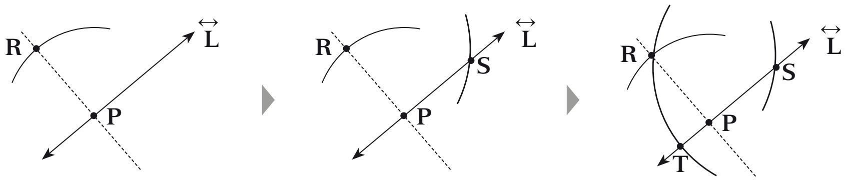
Fíjate cómo se construye una recta paralela a otra situada a una distancia **d**.



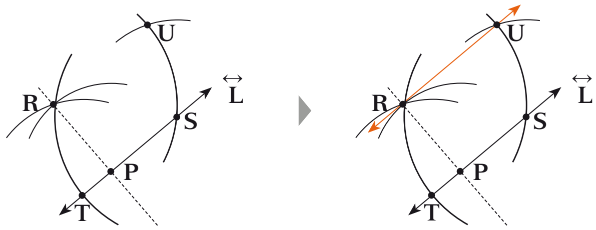
1.º Se traza una perpendicular a $\overleftrightarrow{L}$ que pase por un punto cualquiera, **P**, de dicha recta:



2.º Se toma una abertura del compás igual a **d** y apoyándolo en el punto **P** se traza un arco que corte a la perpendicular en un punto **R**. Luego, con centro en **R** y con una abertura mayor, se traza un arco que corte a $\overleftrightarrow{L}$ en un punto **S** y con la misma abertura, apoyando en **S**, se traza un arco que pasará por **R** y cortará a la recta $\overleftrightarrow{L}$ en un punto **T**:



3.º Con una abertura del compás igual a $\overleftrightarrow{TR}$ y apoyando su punta metálica en **S** se traza un arco que corte al que pasa por **S** en un punto **U**. La paralela buscada pasa por **R** y **U**.



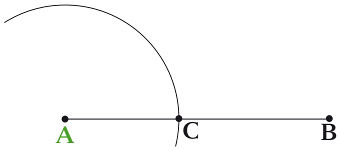
Sugerencias didácticas

- **Inicio:** Oriente a sus estudiantes para que respondan en el aula la actividad de recuperación de experiencias previas propuesta en el apartado *Recuperación*, en la que descubrirán, a partir de la figura representada, la manera de trazar las rectas que se les indican.
- **Desarrollo:** Haga que lean cuidadosamente el contenido de la doble página, que observen las representaciones gráficas y los procedimientos para la construcción de las rectas paralelas y perpendiculares especificadas en cada caso. Motíveles para que realicen estas construcciones en sus cuadernos usando la regla y el compás.

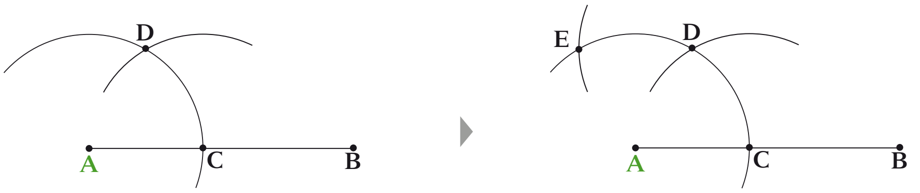
2 Construcción de una recta perpendicular a un segmento y que pase por uno de sus extremos

Para construir una recta perpendicular a un segmento $\overline{AB}$ que pase por el extremo **A**, se procede como se muestra.

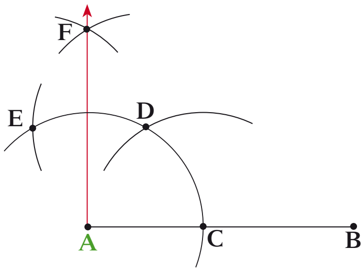
1.º Se abre el compás y apoyando su punta metálica en **A** se traza un arco que corte al segmento en un punto **C**, como se muestra a la derecha.

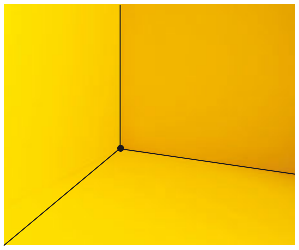


2º. Con la misma abertura del compás y apoyándolo en **C**, se traza un segundo arco que corte al anterior en un punto **D** y, luego, apoyando el compás en **D** y con la misma abertura, se traza un tercer arco que corte al que pasa por **C** en **E**.



3°. Apoyando el compás en los puntos **D** y **E** se trazan dos arcos que se corten en el punto **F**. La perpendicular buscada es la recta que pasa por los puntos **F** y **A**.





ACTIVIDADES

4 Construye.

- Una recta paralela a otra $\overleftrightarrow{L}$ separada de esta una distancia de 5 cm.
- Una recta paralela a otra **M** separada de esta una distancia de 8.5 cm.

5 Construye un segmento $\overline{PQ}$ de longitud 10 cm y, luego, traza rectas perpendiculares por sus extremos **P** y **Q**.

Cuaderno: Ficha 13

- **Desarrollo:** Muestre a sus estudiantes, con ejemplos prácticos, los procedimientos para la construcción de las rectas paralelas y perpendiculares cuyos pasos se explican en esta doble página. Formúleles preguntas relacionadas con el proceso a seguir a fin de verificar que conocen el mismo.
- **Cierre:** Motive a sus estudiantes a realizar los ejercicios del apartado *Actividades*. En la actividad 4, construirán rectas paralelas a las rectas indicadas. En la actividad 5, copiarán el segmento de extremos **P** y **Q** y, luego trazarán, por sus extremos, rectas perpendiculares.

Actividad grupal

Forme varias agrupaciones de estudiantes con su regla y compás a la mano y, luego, pídales que construyan, en hojas blancas, rectas paralelas y perpendiculares siguiendo los pasos especificados en esta doble página.

- Primero, pídales que construyan una recta paralela a una distancia de otra recta dada.
- Segundo, propóngales que construyan una recta perpendicular a un segmento y que pase por uno de sus extremos.
- Tercero, motíveles para que construyan la perpendicular a un segmento, siguiendo los pasos indicados en el margen izquierdo de la página 44 de esta Guía.
- Asegúrese de que sus estudiantes utilizan adecuadamente el compás en las construcciones de las rectas. Es importante formularles preguntas que permitan verificar si comprenden y aplican correctamente los procedimientos.

Ficha 13.

Aprender a aprender

Pregunte al grupo: *¿Les parecieron importantes los conceptos estudiados en esta oportunidad? ¿Qué utilidad tienen dichos conceptos para la cotidianidad?*

Indicadores de logro

- **Identifica** los ángulos formados por una recta transversal y un par de rectas coplanares y **determina** la medida de los ángulos formados.

Actividad interactiva

Ángulos

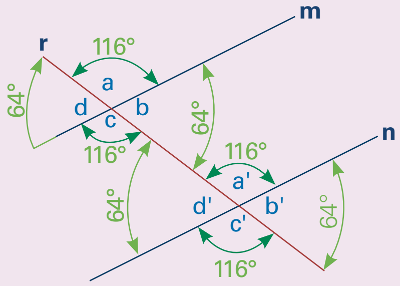
Actividad interactiva en la que seleccionarán con el ratón la representación del ángulo que se les indica: opuestos por el vértice, suplementario o complementario.

Competencias fundamentales

Competencia comunicativa

Dos rectas paralelas cortadas por una recta transversal forman 8 ángulos que, de acuerdo a su ubicación, reciben distintos nombres.

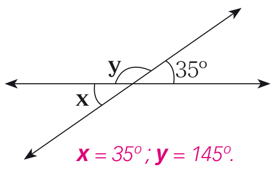
La recta transversal **r** corta a las rectas paralelas **m** y **n**:



Los ángulos **a** y **b** son suplementarios puesto que suman 180°. Los ángulos **a**, **d**, **b**′ y **c**′ son externos por estar situados fuera de las rectas **m** y **n**. Los ángulos **c** y **a**′ y **b** y **d**′ son alternos internos. Los ángulos **a** y **c**′ y **d** y **b**′ son alternos externos. Los ángulos **d** y **d**′, **c** y **c**′ son congruentes.

RECUPERACIÓN

Obtén las medidas **x** e **y** de cada de los ángulos de la figura.

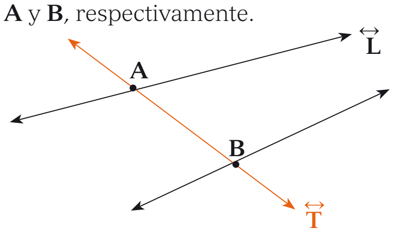


x *= 35º ;* ***y*** *= 145º.*

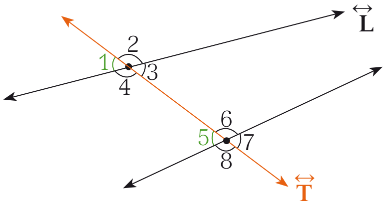
1 Recta transversal

Una recta transversal o secante corta a cualquier par de rectas del plano en dos puntos.

T es la transversal que corta a las rectas coplanares $\overleftrightarrow{L}$ y $\overleftrightarrow{M}$ en los puntos **A** y **B**, respectivamente.



La intersección de un par de rectas coplanares y una transversal determina los siguientes ocho ángulos:



Los ángulos 1, 2, 7 y 8 son ángulos externos, porque están situados fuera de la región entre las rectas $\overleftrightarrow{L}$ y $\overleftrightarrow{M}$.

Los ángulos 3, 4, 5 y 6 son ángulos internos, porque están dentro de la región entre las rectas $\overleftrightarrow{L}$ y $\overleftrightarrow{M}$.

Los pares de ángulos 1 y 5, 2 y 6, 3 y 7, 4 y 8, de la figura anterior, son correspondientes.

Los ángulos correspondientes están a un mismo lado de la transversal uno fuera y otro dentro de la región entre las rectas $\overleftrightarrow{L}$ y $\overleftrightarrow{M}$.

Los pares de ángulos 4 y 6, 3 y 5 son alternos internos.

Los ángulos alternos internos están en lados distintos de la transversal y entre las rectas coplanares.

Los pares de ángulos 1 y 7, 2 y 8 son alternos externos.

Los ángulos alternos externos están en lados distintos de la transversal y ambos fuera de las rectas coplanares.

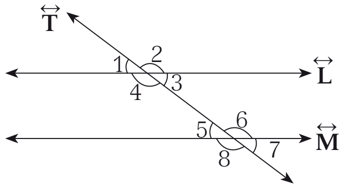
La suma de las medidas de los ángulos con vértices comunes en los puntos **A** y **B** es 360º.

Sugerencias didácticas

- **Inicio:** Oriente a sus estudiantes para que lean y resuelvan en el aula la actividad vinculada a la recuperación de experiencias previas propuesta en el apartado *Recuperación*, en la que obtendrán las medidas de los ángulos desconocidos en la figura representada.
- **Desarrollo:** Pídales que lean el contenido de la doble página, que observen las representaciones gráficas y el desarrollo del ejemplo resuelto. Haga que reproduzcan las figuras en sus cuadernos e identifiquen con sus nombres y clasifiquen los ángulos formados en cada caso.

2 Recta transversal a dos rectas paralelas

Observa los ángulos correspondientes y alternos internos o externos formados por una recta transversal y un par de rectas paralelas.



Los ángulos de la figura que se muestra arriba verifican las siguientes afirmaciones:

- Los ángulos correspondientes son congruentes.

  ∢ 1 ≅ ∢ 5; ∢ 2 ≅ ∢ 6; ∢ 3 ≅ ∢ 7; ∢ 4 ≅ ∢ 8

- Los ángulos alternos internos son congruentes.

  ∢ 4 ≅ ∢ 6; ∢ 3 ≅ ∢ 5

- Los ángulos alternos externos son congruentes.

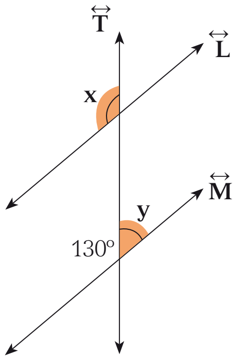
  ∢ 1 ≅ ∢ 7; ∢ 2 ≅ ∢ 8

EJEMPLO RESUELTO:

- Obtener las medidas **x** e **y** de los ángulos de la figura.

  Como el ángulo de medida 130º y el de medida desconocida **x** son correspondientes, son congruentes y **x** = 130º.

  Como el ángulo de medida 130º y el de medida desconocida **y** son suplementarios, entonces **y** = 50º.

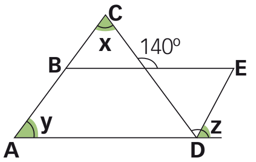


INTELIGENCIA COLABORATIVA

Determinación de ángulos

- Obtengan las medidas de los ángulos **x** e **y**, si:

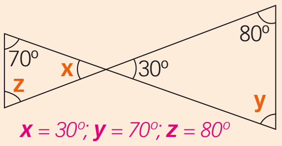
  $\overline{AC} \parallel \overline{DE}$; $\overline{BE} \parallel \overline{AD}$



x = 75º; y = z = 65º

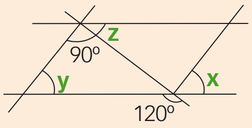
ACTIVIDADES

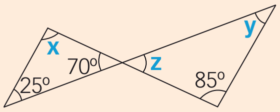
6 Observa las figuras y, luego, determina las medidas de los ángulos coloreados.



x = 30º; y = 70º; z = 80º

x = y = 30º; z = 60º



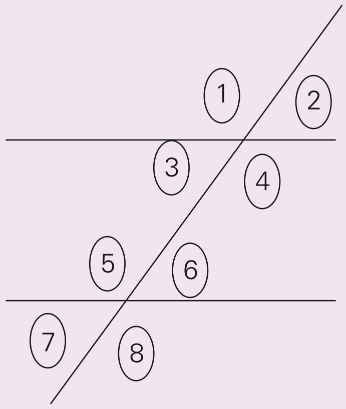


x = 85º; y = 25º; z = 70º

- Describe cómo determinaste las medidas desconocidas.

Atención a la diversidad

Actividades de ampliación: Motive al grupo para que reproduzcan la figura que se muestra a continuación y, luego, clasifiquen los ángulos y sus posiciones en todos los casos.



Por ejemplo:

- Los ángulos 5 y 6 son suplementarios y adyacentes.
- Los ángulos 2 y 3 son opuestos por el vértice.
- Los ángulos 1 y 8 son alternos externos.

Ficha 14.

- **Desarrollo:** Haga que sus estudiantes tracen las rectas paralelas y la transversal a fin de que identifiquen los ángulos por su ubicación. Propóngales que determinen la medida de ángulos como se muestra en el ejemplo resuelto de la página 47. Haga que realicen la actividad propuesta en el apartado *Inteligencia colaborativa*, en la que determinarán las medidas de distintos ángulos.
- **Cierre:** Motive a sus estudiantes a realizar los ejercicios propuestos en el apartado *Actividades*. En la actividad 6, observarán las figuras y, luego, determinarán las medidas de los ángulos coloreados. Al concluir, describirán cómo determinaron las medidas de los ángulos desconocidos.

Aprender a aprender

Pregunte al grupo: *¿Creen que los conocimientos previos hicieron más fácil el trabajo en esta oportunidad? ¿Por qué?*

Competencias

- Comunicativa.
- Usa algoritmos.
- Resolución de problemas.

Indicadores de logro

- **Identifica** rectas paralelas y perpendiculares. **Reconoce** las propiedades del paralelismo y la perpendicularidad. **Construye** rectas paralelas y perpendiculares usando la regla y el compás. **Construye** la perpendicular que pasa por un punto de una recta usando la regla y el compás. **Construye** una recta paralela a una distancia dada de una recta. **Construye** una recta perpendicular a un segmento que pasa por uno de sus extremos. **Identifica** los ángulos formados por una recta transversal y un par de rectas coplanares y **determina** la medida de los ángulos formados. **Resuelve** problemas del contexto que involucran aplicar las propiedades de las rectas paralelas y perpendiculares.

Competencias específicas

Competencia comunicativa

Es necesario que los estudiantes adquieran las habilidades para identificar y clasificar rectas y ángulos y, además, reconocer los procedimientos para construir rectas paralelas y perpendiculares; al mismo tiempo, que puedan desarrollar las competencias comunicativas que les permitan expresar estos conocimientos.

Usa algoritmos

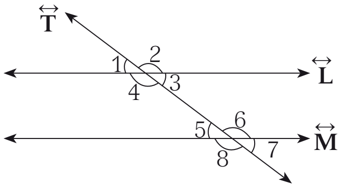
Las reglas y procedimientos en la resolución de operaciones aritméticas son vitales para la persecución de resultados correctos. Por ejemplo, en las operaciones que involucran los pasos para calcular el valor de ángulos desconocidos.

ACTIVIDADES

7 Escribe V o F delante de cada afirmación.

- *V* *Dos rectas del plano cualesquiera, o se cortan, o son paralelas, o son coincidentes.*
- *V* *Dos rectas podrían no cortarse sin que sean paralelas.*
- *F* *Dos rectas perpendiculares dividen al plano que las contiene en tres partes iguales.*
- *F* *Una transversal corta a dos rectas paralelas en un máximo de dos puntos.*
- *V* *Si los ángulos alternos internos de dos rectas cortadas por una transversal son congruentes, dichas rectas son paralelas.*

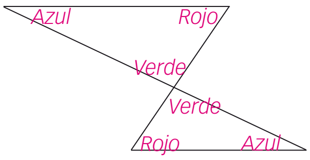
8 Observa la figura y, luego, identifica la condición que debe cumplirse para que las rectas **L** y **M** sean paralelas.



- $m\measuredangle 1 + m\measuredangle 2 = 180°$
- $m\measuredangle 5 + m\measuredangle 8 = 180°$
- $m\measuredangle 4 = m\measuredangle 8$
- $m\measuredangle 5 = m\measuredangle 3$

- Explica por qué la condición que escogiste es la correcta.

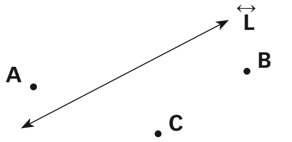
9 Copia la figura en tu cuaderno y, luego, haz lo que se te pide.



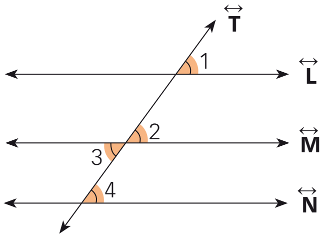
- Responde: ¿Cuántos pares de ángulos congruentes aparecen en la figura? *Tres pares.*
- ***Identifica*** con colores distintos los ángulos que son congruentes.

10 Copia la figura siguiente y, luego, realiza lo que se te pide.

- Traza rectas paralelas y perpendiculares a $\overleftrightarrow{L}$ que pasen por los puntos **A**, **B** y **C**.

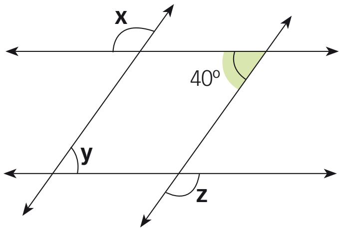


11 Observa la figura y, luego, responde la pregunta justificando tu respuesta.

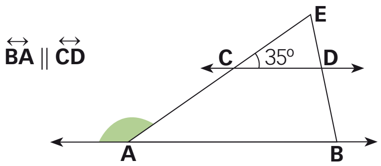


- ¿Se cumple que **L** || **M** || **N**? *__L__ y __M__ son paralelas: ∢1 ≅ ∢2. __M__ y __N__ son paralelas: ∢3 ≅ ∢4.*

12 Determina cuánto miden los ángulos de la figura siguiente. *__x__ = 140°; __y__ = 40°; __z__ = 140°.*



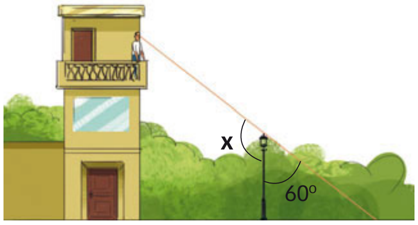
13 Responde: ¿Cuál es la medida **x** del ángulo coloreado? *__x__ = 145°.*



Sugerencias didácticas

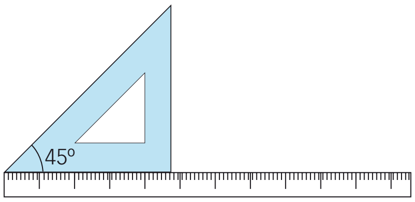
- Las actividades propuestas en esta página están estrechamente vinculadas a los conceptos y procedimientos desarrollados a lo largo de la unidad. Haga que lean cuidadosamente las instrucciones y, después, verifique las respuestas obtenidas.
- Es importante observar de cerca que los estudiantes utilizan correctamente la regla y el compás al realizar las construcciones estudiadas en esta unidad y que identifican las posiciones de los ángulos.

14 Obtén la medida **x** del ángulo que forman la línea visual con el poste del farol. *x = 120º.*



15 Lee, piensa y, luego, responde. Finalmente, haz tu lo que debe hacer el diseñador.

> Un diseñador de interiores proyecta una cenefa para un cliente. En el diseño de la cenefa hay un conjunto de líneas paralelas inclinadas 45º y separadas una distancia constante de 5 cm. ¿Cómo construye el diseñador su boceto utilizando una regla y una escuadra?

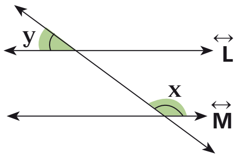


- Haz tú lo que haría el diseñador.

16 Lee, y luego, responde.

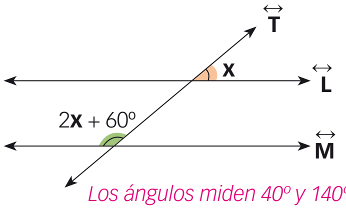
Las medidas, **x** e **y**, de los ángulos coloreados cumplen con las siguientes igualdades:

$x = 150º$; $x = 5y$

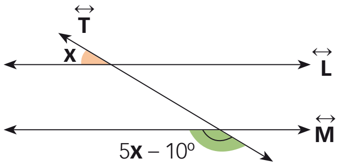


- ¿Son paralelas las rectas **L** y **M**? **Argumenta** tu respuesta.

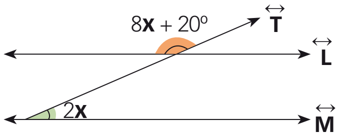
17 Las rectas $\overleftrightarrow{L}$ y $\overleftrightarrow{M}$ son paralelas. ¿Qué medidas tienen los ángulos coloreados?



Los ángulos miden 40º y 140º.

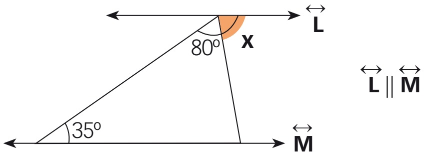


Los ángulos miden 31º 40' y 148º 20'.



Los ángulos miden 32º y 148º.

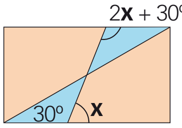
18 Determina la medida **x** del ángulo coloreado de la figura. *x = 65º.*



19 Resuelve el problema.

Se cortan piezas para que encajen en un embaldosado. ¿Cuánto deben medir los ángulos indicados para que las piezas encajen sin superponerse y sin dejar huecos?

- Explica qué hiciste para determinar las medidas de los ángulos del problema.



Los ángulos deben medir 50º y 130º.

Competencias fundamentales

Pensamiento lógico, creativo y crítico

Los conocimientos adquiridos por los estudiantes son necesarios para identificar las alternativas más convenientes en la persecución de la solución de problemas que forman parte de su diario vivir. En este aspecto radica la importancia de que adquieran las destrezas necesarias para resolver problemas que involucren las construcciones de rectas y ángulos y el cálculo de las medidas de estos últimos.

Criterios de evaluación

Competencia comunicativa:

- Adaptación de las representaciones gráficas, simbólicas y numéricas a la situación de comunicación.

Competencia algoritmo:

- Seguimiento de las reglas, instrucciones y procedimientos.

Competencia pensamiento lógico, creativo y crítico

- Enfrenta las situaciones de manera original con estrategias y medios diversos.

Sugerencias didácticas

Resolución de problemas

- Propóngales que lean detenidamente las instrucciones de los problemas planteados en las actividades 14, 15, 16, 17, 18 y 19. Estos problemas son aplicaciones cotidianas de las diversas construcciones con la regla y el compás. Acompañe a sus estudiantes en la realización de estas actividades y ofrézcales las orientaciones necesarias.

Aprender a aprender

Motive a sus estudiantes para que inventen ejemplos de las aplicaciones cotidianas de los conceptos desarrollados en la unidad. Por ejemplo, pregunte al grupo: *¿Qué pasos deben seguir para trazar rectas paralelas y perpendiculares sobre el plano?* Discuta las diversas respuestas con el grupo.

Indicadores de logro de la evaluación

- **Identifica** rectas paralelas y perpendiculares. **Reconoce** las propiedades del paralelismo y la perpendicularidad. **Construye** rectas paralelas y perpendiculares usando la regla y el compás. **Construye** la perpendicular que pasa por un punto de una recta usando la regla y el compás. **Construye** una recta paralela a una distancia dada de una recta. **Construye** una recta perpendicular a un segmento que pasa por uno de sus extremos. **Identifica** los ángulos formados por una recta transversal y un par de rectas coplanares y **determina** la medida de los ángulos formados. **Resuelve** problemas del contexto que involucran aplicar las propiedades de las rectas paralelas y perpendiculares. **Utiliza** recursos virtuales y electrónicos: computadora, programas educativos, juegos interactivos y otros, en la búsqueda de información.

Competencias específicas

- Comunica.
- Razona y argumenta.
- Modela y representa.
- Usa algoritmos.
- Conecta.
- Resuelve problemas.

Aprender a aprender

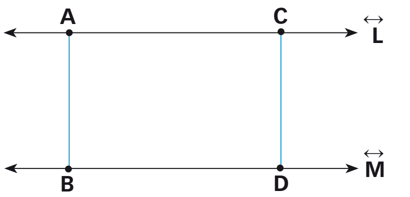
Plantee al grupo: *¿Qué pasos deben dar para calcular la medida de un ángulo suplementario? ¿Cuánto suman los ángulos suplementarios?*

EVALUACIÓN

Comunica

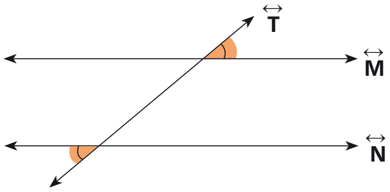
20 Observa las figuras y, luego, construye un enunciado con la propiedad que se muestra en cada caso.

$\measuredangle(\overline{AB}) = \measuredangle(\overline{CD})$



Razona y argumenta

21 Prueba con la hipótesis **H** y los lemas L_1 y L_2 la proposición del recuadro.



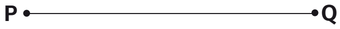
- **H**: *Las rectas* $\overleftrightarrow{M}$ *y* $\overleftrightarrow{N}$ *son paralelas.*
- L_1: *Los ángulos alternos internos son ángulos congruentes.*
- L_2: *Los ángulos opuestos por el vértice son congruentes.*

Los ángulos alternos externos formados por un par de paralelas y una transversal son congruentes.

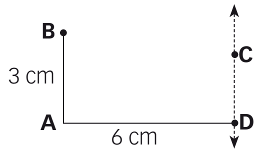
Modela y representa

22 Traza una parábola a $\overleftrightarrow{L}$ que pase por **P** y una perpendicular a **Q**.

23 Copia en una hoja suelta y, luego, construye la recta perpendicular que pasa por el extremo **Q** del segmento.



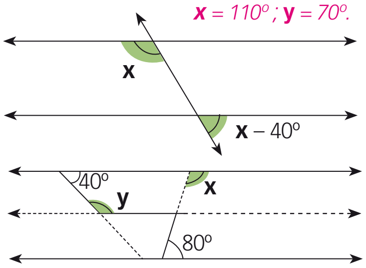
24 Copia y, luego, traza con regla y compás un lado vertical CD, de 2 cm de longitud, necesario para construir un cuadrilátero.



Usa algoritmos

25 Obtén las medidas de los ángulos siguientes.

x = 110°; y = 70°.

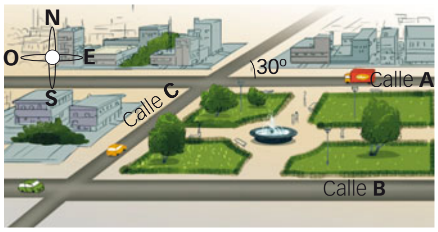


x = 100°; y = 140°.

Conecta

26 Observa, lee y, luego, responde.

Las calles **A** y **B** son paralelas. Un vehículo que va hacia el nordeste por la calle **C** gira hacia el este para tomar la calle **A**.



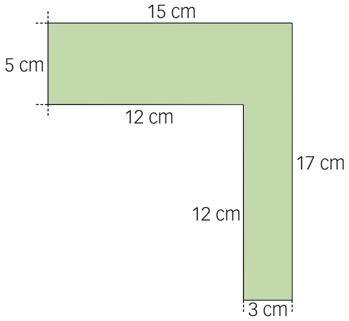
- ¿Con qué ángulo dobla el vehículo para tomar la dirección este? *Debe girar 150°.*

Sugerencias didácticas para la evaluación

- Es importante verificar, antes de dar inicio a las actividades de evaluación, que sus estudiantes identifican y clasifican los ángulos en las construcciones con rectas paralelas y la transversal. Observe que determinan correctamente el valor de ángulos desconocidos en construcciones diversas.

SABER HACER

27 **Aprendizaje basado en proyectos**. Construyan sobre una hoja de papel un modelo de pieza con la forma y dimensiones de la figura, utilizando solo regla y compás.



- Describan, paso a paso, el procedimiento utilizado para construir el modelo.
- Lleven el modelo sobre el papel a un pedazo de cartón, cálquenlo y, luego, recorten la pieza. Socialicen sus resultados en el aula.

28 Responde las preguntas.

- ¿Qué manifestaciones artísticas te gustan de manera especial?
- ¿La matemática requiere, como el arte, de creatividad?
- ¿Qué relaciones puedes establecer entre arte y matemática?

APRENDIZAJE AUTÓNOMO

29 Marca según tus logros.

	Iniciado	En proceso	Logrado
• **Ildentifico** rectas paralelas y perpendiculares.	☐	☐	☐
• **Trazo** paralelas y perpendiculares con regla y compás.	☐	☐	☐
• **Identifico** los ángulos formados por una transversal y un par de rectas coplanares.	☐	☐	☐
• **Obtengo** medidas de ángulos entre paralelas y una transversal.	☐	☐	☐

30 Reflexiona sobre tu aprendizaje.

- ¿Cómo aprovechaste el trabajo con los contenidos de la unidad? ¿Mucho, medianamente o poco?
- ¿En qué situaciones podrías aplicar los conocimientos adquiridos en la unidad?

Sugerencias didácticas para la evaluación

- Pregunte a sus estudiantes:
  — *¿Qué son rectas paralelas?*
  — *¿Qué son rectas perpendiculares?*
  — *¿Cuáles son los pasos para construir una recta paralela **L** que pase por un punto **P**?*
  — *¿Cómo se determina la medida de un ángulo suplementario?*

Saber hacer

En la actividad 27, *Saber hacer*, se aplica la estrategia de evaluación *Aprendizaje basado en proyectos*. Formados en grupos, construirán sobre una hoja de papel un modelo de pieza con la forma y dimensiones de la figura representada, utilizando solo la regla y el compás. En este caso, describirán, paso a paso, el procedimiento utilizado para construir el modelo. Finalmente, llevarán el modelo sobre el papel a un pedazo de cartón, luego, recortarán la pieza y socializarán sus resultados en el aula.

Actitudes y valores

Creatividad

En la sección destinada a *Actitudes y valores*, actividad 28, responderán qué manifestaciones artísticas les gustan de manera especial. Expresarán si la matemática, como el arte, requiere de creatividad. Por último, dirán qué relaciones deben establecer entre arte y matemática.

Aprendizaje autónomo

En el apartado *Aprendizaje autónomo*, actividad 29, evaluarán por ellos mismos si los conceptos y procedimientos que trabajaron en la unidad se encuentran en estado de iniciación, en proceso o logrado. En la actividad 30, reflexionarán sobre su proceso de aprendizaje.

Aprender a aprender

Haga que sus estudiantes apliquen los conceptos aprendidos en la unidad en situaciones de la cotidianidad, por ejemplo, preguntar: *¿Cuáles son los pasos para reproducir una pieza de cartón cuyos lados tienen forma de paralelogramo?*

4 Triángulos

Propuesta de programación

COMPETENCIAS

Específicas

- **Razona y argumenta**: **Justifica** y **prueba** propiedades y teoremas sobre triángulos.
- **Comunica**: **Interpreta** dibujos, planos y croquis que se utilizan en la construcción de situaciones ligadas a la vida cotidiana.
- **Modela y representa**: **Representa** y **modela** situaciones de la vida cotidiana a través de los diferentes tipos de triángulos, tomando en cuenta sus propiedades.
- **Usa algoritmos**: **Sigue** las reglas que le permiten obtener un resultado al resolver problemas que involucran los triángulos y sus propiedades.
- **Conecta**: **Usa** los conocimientos sobre triángulos, sus elementos y propiedades para adquirir nuevos conocimientos y resolver situaciones problemáticas dentro y fuera de la matemática.
- **Resuelve problemas**: **Utiliza** los triángulos y sus propiedades para dar soluciones a situaciones problemáticas.
- **Utiliza herramientas tecnológicas**: **Utiliza** soportes tecnológicos como la Internet, la calculadora científica y otros dispositivos.

Fundamentales

Resolución de problemas: **Identifica** y **utiliza** estrategias, y **genera** alternativas de solución**.**

CONTENIDOS

Conceptos

- Triángulo: concepto y clasificación.
- Segmentos y puntos notables.
- Semejanza y congruencia de triángulos.
- Construcciones de triángulos semejantes y congruentes.
- Teorema de Tales.
- El triángulo rectángulo. Propiedades.
- Construcciones.

Procedimientos

- Identificación de los ángulos internos y externos de un triángulo y resolución de problemas.
- Reconocimiento y trazado de segmentos, rectas y puntos notables del triángulo.
- Conocimiento y aplicación de los criterios de semejanza y congruencia de triángulos.
- Construcción de triángulos semejantes y congruentes usando la regla y el compás.
- Conocimiento y aplicación del teorema de Tales en la resolución de problemas.
- Identificación de triángulos rectángulos y sus propiedades.
- Construcción de diversos triángulos usando la regla y el compás.

Actitudes y valores

- Valoración del ingenio humano.
- Apreciación del conocimiento de figuras geométricas y sus propiedades.

Tiempo estimado de trabajo: 2 semanas

INDICADORES DE LOGRO

- **Identifica** el concepto de *triángulo* y su clasificación.
- **Identifica** los ángulos internos y externos de un triángulo y **resuelve** problemas.
- **Reconoce** y **traza** segmentos, rectas y puntos notables del triángulo.
- **Conoce** y **aplica** los criterios de semejanza y congruencia de triángulos.
- **Construye** triángulos semejantes y congruentes usando la regla y el compás.
- **Conoce** y **aplica** el teorema de Tales en la resolución de problemas.
- **Identifica** triángulos rectángulos y sus propiedades métricas.
- **Construye** triángulos diversos usando la regla y el compás.
- **Resuelve** problemas del contexto que involucran triángulos y sus propiedades.
- **Utiliza** recursos virtuales y electrónicos: computadora, programas educativos, juegos interactivos y otros, en la búsqueda de información.

Valor transversal: Creatividad

Recursos digitales

Plataforma digital

CD

BIBLIOTECA DEL DOCENTE

- DOCUMENTOS PARA LA PLANIFICACIÓN

CUADERNO DE ACTIVIDADES

UNIDAD 4	Triángulos

RECURSOS DE REFUERZO Y AMPLIACIÓN

LibroMedia

ACTIVIDADES INTERACTIVAS

PÁGINA 54	Triángulos y sus ángulos.
PÁGINA 58	Triángulos semejantes.
PÁGINA 64	El teorema de Pitágoras.

CD DE RECURSOS DIGITALES: PLAN REGULAR

Pleno — PRUEBA DE EVALUACIÓN FORMATIVA DE LA UNIDAD

Estrategias pedagógicas

- Recuperación de experiencias previas.
- Trabajo en equipo.
- Aprendizaje basado en problemas (ABP).

Unidad 4

Competencias de la unidad

- **Lee** y **comenta** las informaciones expuestas en el apartado *Punto de partida*.
- **Responde** preguntas relacionadas con las informaciones expuestas en el apartado *Punto de partida*.
- **Recupera** experiencias vividas mediante la observación de las imágenes de la ilustración.
- **Analiza** un problema de la vida cotidiana vinculado a los conceptos y procedimientos que desarrollarán en la unidad en el apartado *Analiza el problema*.
- **Plantea** soluciones al problema leído y analizado anteriormente, en el apartado *Plantea una solución*.

Apertura de la unidad

Dentro de los objetivos principales de la apertura de esta unidad se encuentran el plantear una situación de aprendizaje, una problemática o un texto que sirve para contextualizar el tema de la unidad. Todo esto con la finalidad de motivar y despertar la curiosidad de los estudiantes.

A partir de la situación o texto planteado, el problema a analizar y las imágenes de la ilustración se conecta al estudiante con el tema a tratar, a la vez que vincula con la realidad o cotidianidad los temas que se van a desarrollar.

Todos los elementos que conforman la portada promueven la recuperación de experiencias o conocimientos previos y la motivación o el interés por los conocimientos que adquirirán en la unidad.

4 Triángulos

Conceptos

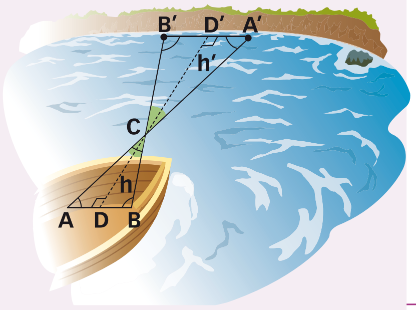
- Triángulo: concepto y clasificación.
- Segmentos y puntos notables.
- Semejanza y congruencia de triángulos.
- Construcciones de triángulos semejantes y congruentes.
- Teorema de Tales.
- El triángulo rectángulo. Propiedades.
- Construcciones.

Procedimientos

- Resolución de problemas.
- Construcción de figuras geometricas diversas.

Actitudes y valores

- Valoración del ingenio y la creatividad humana.
- Aprecio el conocimiento de las figuras geométricas.



Punto de partida

Desde la más remota antigüedad navegantes polinesios sin brújulas ni instrumentos ópticos y sin emplear complejas técnicas matemáticas, lograron realizar largas travesías en el océano Pacífico poblar sus numerosas islas y establecer rutas de intercambio comercial con poblaciones asentadas con anterioridad. Las técnicas de navegación de los primitivos polinesios tomaban en cuenta los vientos, las mareas y las posiciones del Sol, la Luna y algunas estrellas en el cielo nocturno.

Recientemente, en julio del año 2017, la prensa recogió en sus titulares la increíble hazaña de Nainoa Thompson, un descendiente de aquellos primeros navegantes, quien repitió la hazaña de sus antepasados en una canoa de doble quilla, recorriendo los mares durante tres años sin instrumentos de navegación modernos.

- ¿Cómo crees que los primeros navegantes pudieron orientarse en sus largas travesías marinas?

ANALIZA EL PROBLEMA

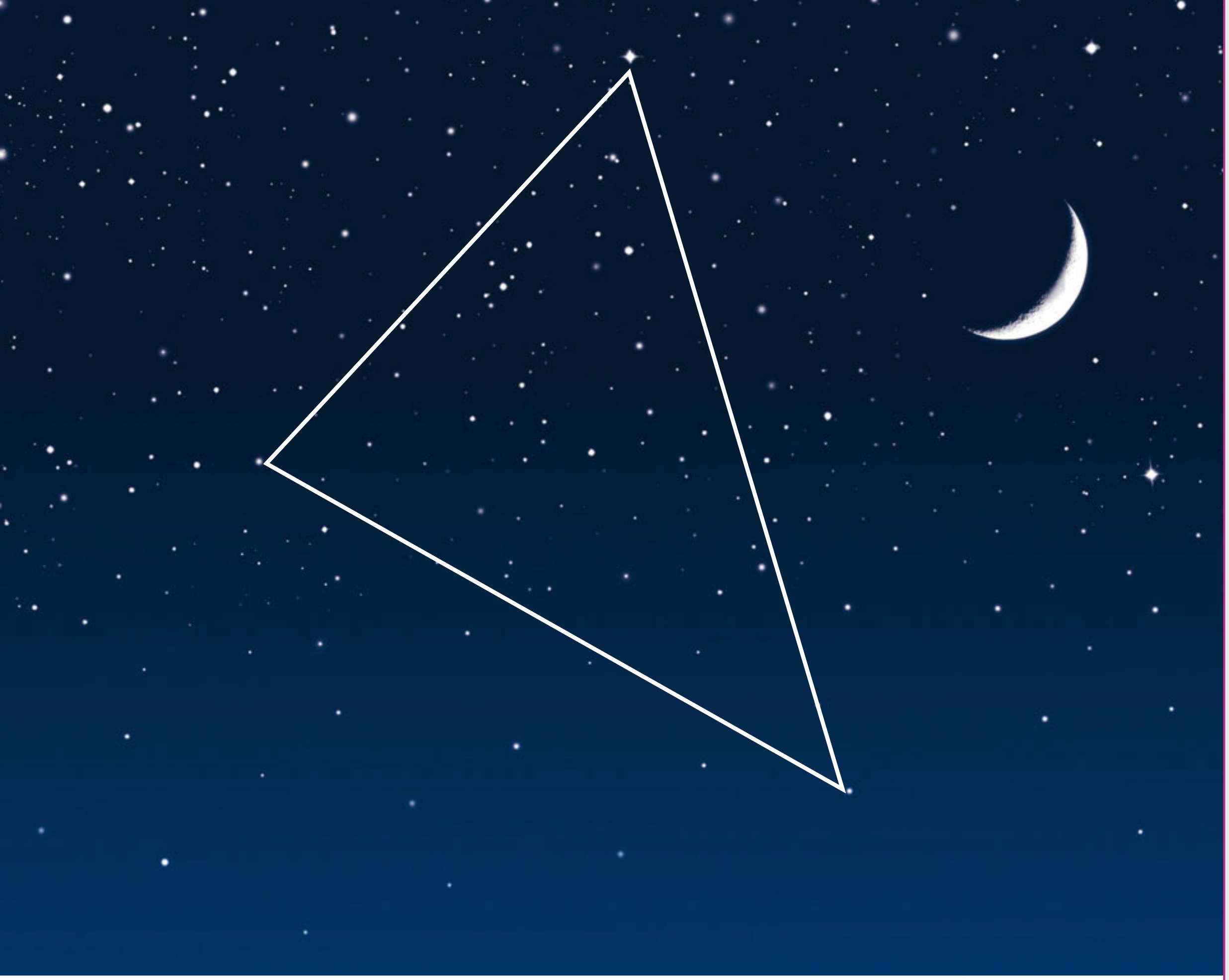
Con los triángulos, por las sencillas relaciones entre sus lados y sus ángulos, pueden calcularse con facilidad distancias inaccesibles o de difícil determinación directa.

La figura muestra un diagrama construido por un marinero que se encuentra a una determinada distancia de la costa. Conoce la distancia **A′B′** que hay entre dos embarcaderos en tierra firme y que **D′** es el punto medio de **A′B′**.

¿Cómo podrías ayudarlo a calcular la distancia a la costa, **h′**, si se pueden medir directamente **AB** y **h** y se sabe que **D** es el punto medio de **AB**?

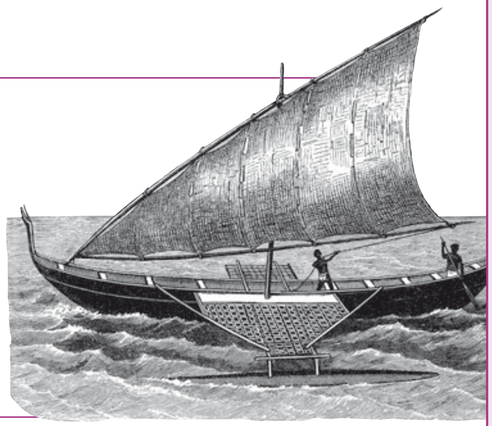
Trabajo colectivo de apertura

- **Punto de partida**: Guíe a sus estudiantes a leer y comentar en el grupo las informaciones expuestas en el apartado *Punto de partida*, que trata sobre las largas travesías en el océano Pacífico realizadas por los navegantes polinesios en la antigüedad sin utilizar ningún instrumento óptico ni técnicas matemáticas.
- **Analiza el problema**: En este apartado se plantea que se quiere calcular la distancia en que se encuentra un marinero desde un punto del mar hasta la costa.
- **Plantea una solución:** En el apartado observarán los triángulos **ACB** y **A′C′B**′, responderán preguntas y expresarán cómo determinarían la distancia de la embarcación a la costa.



PLANTEA UNA SOLUCIÓN

- Observa los triángulos **ACB** y **A'CB'** de la figura de la página anterior y, luego, responde las siguientes preguntas.
  - ¿Cómo son estos triángulos?
  - ¿Qué relaciones de proporcionalidad puedes establecer entre sus lados? Escribe alguna proporción entre estos lados.
  - ¿Cómo determinarías la distancia de la embarcación a la costa con los datos que posee el marinero?
- Calcula la distancia de la embarcación a la costa y socializa tu respuesta en el aula.



Esquema conceptual de la unidad

Triángulos

Una de las figuras básicas de la Geometría es el

Triángulo

que es objeto de

- Clasificación
- Construcciones con regla y compás
- Triángulos congruentes y semejantes

asociado al

Teorema de Tales

y a sus

Aplicaciones

Actividad de motivación

Pida a sus estudiantes que lean en la sección: *Conceptos y procedimientos*, los temas que trabajarán en la unidad y las actitudes y valores que estarán presentes en el desarrollo de la misma. Luego, para que interioricen la importancia de conocer los triángulos, su clasificación y sus propiedades, formúleles preguntas como las siguientes: *¿Cómo se calculan distancias o longitudes mediante el uso del teorema de Pitágoras? ¿Pueden determinar la altura de un edificio, si conocen la longitud, de la sombra que proyecta y su inclinación? ¿En qué triángulo se fundamenta el teorema de Pitágoras?*

Actitudes y valores

Creatividad

Aproveche la situación planteada en el apartado *Punto de partida* y en las imágenes de la ilustración para conversar con sus estudiantes acerca del papel del ingenio y la creatividad humana en la solución de problemas de la cotidianidad. Pregunte al grupo: *¿Podrían dar algunos ejemplos en los que se manifiesten el ingenio y la creatividad humana?*

Indicadores de logro

- **Identifica** el concepto de *triángulo* y su clasificación.
- **Identifica** los ángulos internos y externos de un triángulo y **resuelve** problemas.

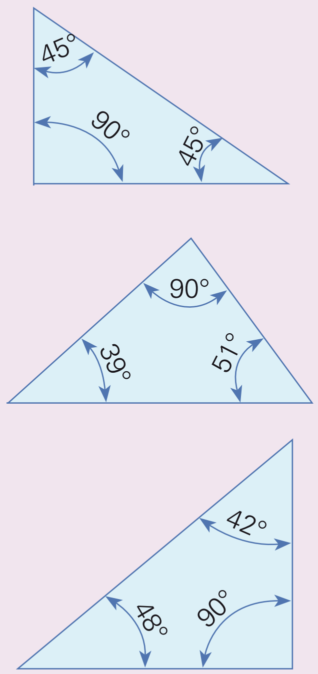
Actividad interactiva

Triángulos y sus ángulos

Actividad interactiva en la que determinarán, en sus cuadernos, los valores de dos ángulos desconocidos en un triángulo rectángulo y, luego, completarán los recuadros.

Más información

Comente a sus estudiantes que el triángulo rectángulo recibe este nombre porque uno de sus ángulos es recto, mide 90°. Muéstreles estos tres ejemplos de triángulos rectángulos:



Recuérdeles que, en un triángulo rectángulo, el lado opuesto al ángulo recto se denomina *hipotenusa* y los lados perpendiculares que forman el ángulo recto se denominan *catetos*.

RECUPERACIÓN

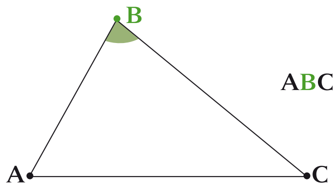
Piensa y, luego, responde.

- ¿Un triángulo es siempre una figura convexa? Justifica tu respuesta.

1 Concepto de triángulo

Dados tres puntos no colineales, un triángulo es la unión de los segmentos cuyos extremos son dichos puntos.

En la figura siguiente se muestra el triángulo **ABC**.



$ABC = \overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{CA}$

Los extremos de los segmentos que forman un triángulo son los vértices de sus ángulos internos: $\measuredangle A$, $\measuredangle B$, $\measuredangle C$.

En cualquier triángulo, al ángulo de mayor medida se opone el lado de mayor longitud. En el triángulo **ABC** de la figura, al ángulo **B** se opone el lado de mayor longitud, $\overline{AC}$.

Tres segmentos forman un triángulo si sus longitudes son tales que, la suma de dos de ellas es mayor que la tercera (Desigualdad triangular):

$\overline{AB} + \overline{BC} > \overline{AC}$ $\quad$ $\overline{BC} + \overline{CA} > \overline{AB}$ $\quad$ $\overline{CA} + \overline{AB} > \overline{BC}$

2 Teorema de la suma de los ángulos internos del triángulo

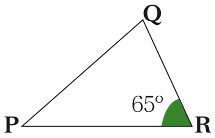
La afirmación siguiente es uno de los teoremas fundamentales del triángulo: *En todo triángulo,* **ABC**, *la suma de las medidas de sus ángulos internos es 180º.*

La afirmación anterior muestra que:

$$m\measuredangle A + m\measuredangle B + m\measuredangle C = 180º.$$

EJEMPLO RESUELTO:

- La medida del ángulo **Q** es 6º menor que el doble de la medida del ángulo **P**. ¿Cuánto miden los ángulos **P** y **Q**?



Las condiciones del problema permiten escribir: $x° + (2x - 6)° + 65° = 180°$.

Resolviendo la ecuación se obtienen las medidas de los ángulos **P** y **Q**: $m\measuredangle P = 74°$; $m\measuredangle Q = 41°$.

Sugerencias didácticas

- **Inicio:** Oriente a sus estudiantes para que lean y respondan la pregunta vinculada a la recuperación de experiencias previas propuestas en el apartado *Recuperación*, en la que responderán una pregunta relacionada con el triángulo y, luego, justificarán sus respuestas.
- **Desarrollo:** Pida a sus estudiantes que lean cuidadosamente el contenido de la doble página, que observen las representaciones gráficas y el desarrollo de los conceptos. Haga que observen la fotografía ubicada en el margen izquierdo de la página y que expresen cuál es la función del triángulo en la situación que observan en la imagen.

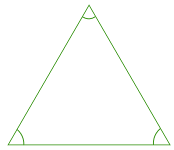
3 Clasificación de los triángulos

Los triángulos se clasifican:

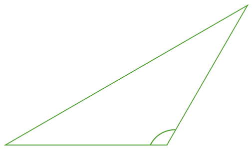
- Por sus lados en:
  - Equiláteros, si sus tres lados tienen igual longitud.
  - Isósceles, si dos de sus lados tienen igual longitud.
  - Escalenos, si sus tres lados tienen longitudes distintas.
- Por sus ángulos en:
  - Acutángulos, si sus tres ángulos son agudos.
  - Rectángulos, si uno de sus ángulos es recto.
  - Obtusángulos, si uno de sus ángulos es obtuso.

Ningún triángulo tiene más de un ángulo recto u obtuso.

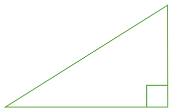
Equilátero y acutángulo



Isósceles y obtusángulo

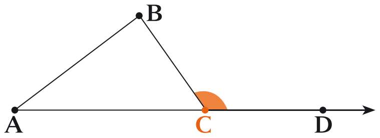


Escaleno y rectángulo



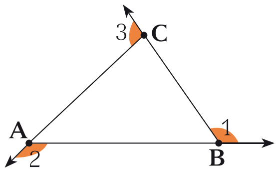
4 Ángulos externos de un triángulo

El ángulo formado por un lado de un triángulo y la prolongación de otro lado es un ángulo externo.



∢**DCB** es el ángulo externo del triángulo **ABC** formado por el lado **BC** y la prolongación del lado **AC**.

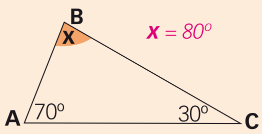
La suma de las medidas de los ángulos externos de cualquier triángulo es 360°.

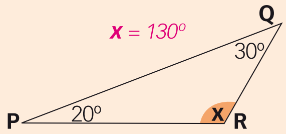


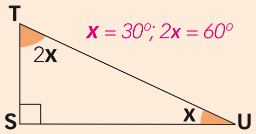
m ∢1 + **m** ∢2 + **m** ∢3 = 360°

ACTIVIDADES

1 Obtén, en cada caso, las medidas desconocidas de los ángulos.

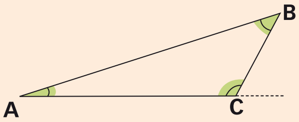






2 Prueba que la suma de las medidas de dos ángulos internos cualesquiera de un triángulo es igual al suplemento del tercero.

m∢A + m∢B + m∢C = 180° → m∢A + m∢B = 180° − m∢C.



- **Desarrollo:** Muéstreles ejemplos de los conceptos y procedimientos desarrollados en la doble página. Pídales que desarrollen los ejemplos resueltos en sus cuadernos y diseñe otros más sobre el cálculo de las medidas de los ángulos internos y externos de los triángulos. Haga que reproduzcan las representaciones gráficas de los triángulos en sus cuadernos, tal como se muestran en la doble página.
- **Cierre:** Motive a sus estudiantes a realizar los ejercicios del apartado *Actividades*. En la actividad 1, obtendrán, en cada caso, las medidas desconocidas de los ángulos de los triángulos representados. En la actividad 2, probarán que la suma de las medidas de dos ángulos internos cualesquiera de un triángulo es igual al suplemento del tercero. Justificarán sus respuestas.

Competencia comunicativa

De acuerdo con la clasificación de los triángulos según sus ángulos, el triángulo *acutángulo isósceles* tiene todos sus ángulos agudos: dos iguales y otro distinto, es simétrico con respecto a su altura.

El triángulo *acutángulo escaleno* tiene todos sus ángulos agudos, todos distintos y no tiene ejes de simetría.

Los *triángulos rectángulos* se clasifican en:

- *Triángulo rectángulo isósceles*, que tiene un angulo recto y dos agudos iguales, dos lados iguales y otro distinto, los lados iguales son los catetos, y el distinto es la hipotenusa, es simétrico respecto a la altura, eje simétrico que se traza desde el ángulo recto hasta la hipotenusa.
- El *triángulo rectángulo escaleno* tiene un ángulo recto y todos sus lados y ángulos son distintos.

Los *triángulos obtusángulos* son:

- El *triángulo obtusángulo isósceles*, que tiene un ángulo obtuso y dos lados iguales que son los que parten del ángulo obtuso, el siguiente lado es distinto y mayor que los otros dos.
- El *triángulo obtusángulo escaleno*, tiene un ángulo obtuso y todos sus lados son distintos.

Haga que sus estudiantes dibujen en papel de construcción todos estos triángulos y, luego, comenten sus características.

Ficha 15.

Aprender a aprender

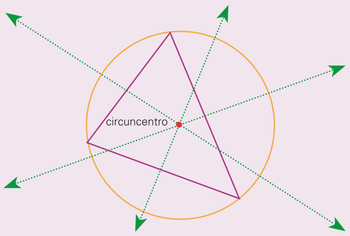
Pregunte a sus estudiantes: *¿Qué conocimientos previos sobre los triángulos y su clasificación tenían antes de trabajar esta doble página? ¿Creen que esos conocimientos facilitaron el trabajo?¿Por qué?*

Indicadores de logro

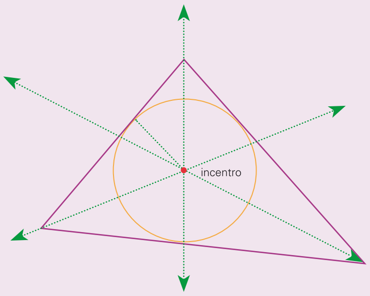
- **Reconoce** y **traza** segmentos, rectas y puntos notables del triángulo.

Más información

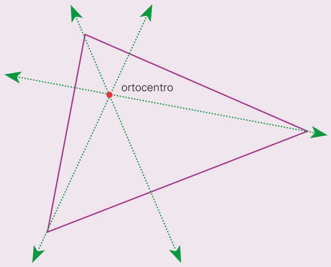
- El *circuncentro* es el punto donde coinciden las tres mediatrices de un triángulo.



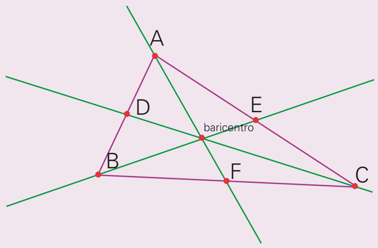
- El *incentro* es el punto donde coinciden las tres bisectrices de sus ángulos.



- El *ortocentro* es el punto donde coinciden las tres alturas de un triángulo.



- El *baricentro* es el punto donde coinciden las tres medianas del triángulo.



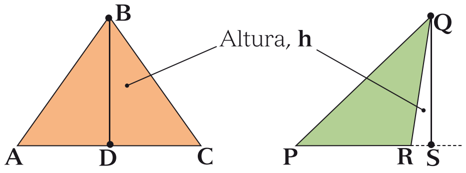
RECUPERACIÓN

Traza un segmento de 8 cm de longitud y divídelo en dos partes iguales, utilizando regla y compás.

1 Segmentos notables de un triángulo. Mediatrices

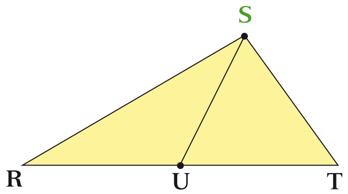
En todo triángulo hay segmentos y rectas notables por sus propiedades. Los segmentos son sus alturas y medianas y las rectas, son sus mediatrices.

- Las alturas son los segmentos perpendiculares que van desde los vértices del triángulo hasta sus lados o sus prolongaciones.



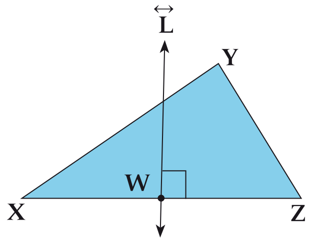
Los segmentos $\overline{\mathbf{BD}}$ y $\overline{\mathbf{QS}}$ son alturas de los triángulos **ABC** y **PQR**.

- Las medianas son los segmentos que van desde los vértices del triángulo hasta los puntos medios de sus lados opuestos.



En el triángulo **RST**, la mediana $\overline{\mathbf{SU}}$ va desde el vértice **S** hasta el punto medio, **U**, del lado **RT**.

- Las mediatrices son rectas que pasan por los puntos medios de los lados del triángulo y son perpendiculares a dichos lados.

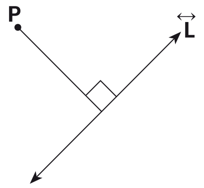


En el triángulo **XYZ**, la mediatriz del lado **XZ** es la recta perpendicular, $\overleftrightarrow{\mathbf{L}}$, que pasa por su punto medio.

El número de lados de un triángulo determina que haya tres alturas, tres medianas y tres rectas mediatrices.

RECUERDA

Distancia de un punto a una recta



Es la longitud del segmento más corto de un punto, **P**, a la recta **L**.

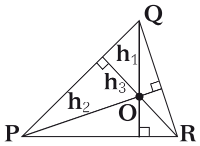
Sugerencias didácticas

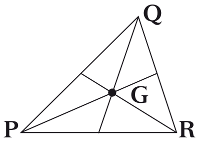
- **Inicio:** Oriente a sus estudiantes para que lean y realicen en el aula la actividad vinculada a recuperación de experiencias previas propuesta en el apartado *Recuperación*, en la que trazarán un segmento con la medida que se les indica, utilizando la regla y el compás.
- **Desarrollo:** Pida a sus estudiantes que lean cuidadosamente el contenido de la doble página, que observen las representaciones gráficas y los procedimientos para realizar las construcciones de los triángulos y sus segmentos y puntos notables. Es necesario que lleven al aula su regla y su compás para que reproduzcan los gráficos correspondientes. Pídales que lean y reproduzcan el contenido del apartado *Recuerda*.

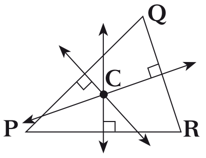
2 Puntos notables de un triángulo

Los puntos notables de un triángulo son el ortocentro, el baricentro o centroide y el circuncentro, que están asociados a las alturas, las medianas y las mediatrices de sus lados respectivamente y el incentro, relacionado con las bisectrices de sus ángulos internos.

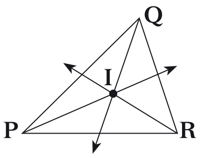
El ortocentro, **O**, es la intersección de las tres alturas del triángulo; el baricentro, **G**, la intersección de sus tres medianas y el circuncentro, **C**, la intersección de sus tres mediatrices.







El incentro, **I**, es la intersección de las bisectrices de los tres ángulos internos del triángulo.



El circuncentro es el centro de la circunferencia que pasa por los vértices, **P**, **Q** y **R**, del triángulo (circunferencia circunscrita) y el incentro, **I**, el centro de la circunferencia que toca a cada uno de los lados del triángulo en un punto y solo uno (circunferencia inscrita).

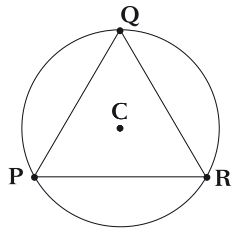
SABER MÁS

Recta de Euler

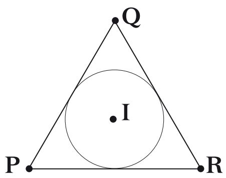
El ortocentro, el baricentro y el circuncentro de un triángulo o coinciden, o están sobre una línea recta llamada recta de Euler.

O, **G** y **C** coinciden solo si el triángulo es equilátero.

Circunferencia circunscrita



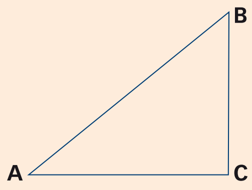
Circunferencia inscrita



ACTIVIDADES

3 Haz tres copias del triángulo **ABC** de la derecha y, luego, sobre cada una haz lo que se te pide.

- Traza una altura, una mediana y una mediatriz.
- Comprueba, trazando el resto de sus alturas medianas y mediatrices, que cada una de estas clases de segmentos y rectas se corta en un punto.
- Traza la recta de Euler del triángulo **ABC** y sus circunferencias circunscrita e inscrita.



Atención a la diversidad

Actividades de refuerzo: Forme varias agrupaciones de estudiantes con su regla y compás a la mano y, luego, pídales que construyan en hojas blancas, los triángulos representados en esta doble página con sus correspondientes puntos notables: circuncentro, ortocentro, incentro y baricentro.

Ficha 16.

- **Desarrollo:** Muestre a sus estudiantes los procedimientos para construir los triángulos y sus segmentos y puntos notables. Pídales que sigan las indicaciones y construyan las representaciones de los ejemplos de la doble página en sus cuadernos. Motíveles para que lean y reproduzcan en sus cuadernos el contenido del apartado *Saber más*, que muestra el concepto de *recta de Euler*.
- **Cierre:** Motive a sus estudiantes a realizar los ejercicios del apartado *Actividades*. En la actividad 3, harán tres copias del triángulo **ABC** ubicado a la derecha de la página, luego, sobre cada copia, realizarán los trazados que se les indican en cada punto. Acompáñeles en el proceso de realización de estas actividades.

Aprender a aprender

Pregunte a sus estudiantes: *Tuvieron alguna dificultad en el trazado de los triángulos y sus puntos y segmentos notables? ¿En qué consistió el problema?¿Qué hicieron para resolverlo?*

Indicadores de logro

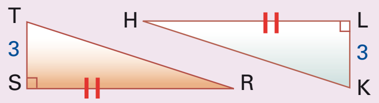
- **Conoce** y **aplica** los criterios de semejanza y congruencia de triángulos.

Actividad interactiva

Triángulos semejantes

Actividad interactiva en la que determinarán, en sus cuadernos, los valores de la semejanza o no de los triángulos expresados, completando las informaciones mediante el arrastre del ratón.

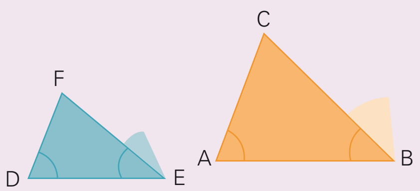
Más información



Lados congruentes

SR ≅ HL
ST ≅ KL
TR ≅ HK

Comente al grupo que dos figuras son congruentes si tienen los lados iguales y el mismo tamaño o, también, si existe una isometría que los relaciona, una transformación que puede ser traslación, rotación o reflexión. Dos figuras son congruentes si tienen la misma forma y tamaño, aunque su posición u orientación sean distintas. Las partes coincidentes de las figuras congruentes se llaman homólogas.



Recuerde a sus estudiantes que dos objetos o figuras geométricas son semejantes cuando varían sus tamaños, pero sus formas son idénticas. Por ejemplo, dos mapas a escalas diferentes son semejantes, ya que su forma y sus características no se modifican, pero sí su tamaño.

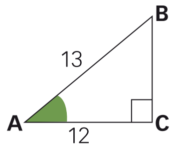
RECUPERACIÓN

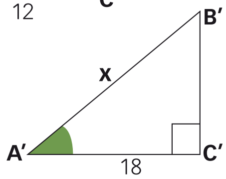
Obtén el valor de **x** en cada una de estas proporciones.

- 5/8 = **x**/24   ***x** = 15.*
- **x**/72 = 7/9   ***x** = 56.*
- 3/**x** = 5/40   ***x** = 24.*
- 7/5 = 56/**x**   ***x** = 40.*

EJEMPLO RESUELTO:

- Obtener la medida **x**, si **ABC** y **A′B′C′** son triángulos semejantes.





$$\frac{\overline{A'C'}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$$

Como los triángulos son semejantes:

$$\frac{A'C'}{AC} = \frac{A'B'}{AB}$$

Sustituyendo los valores en la proporción:

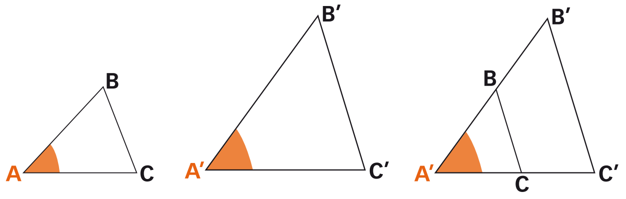
18/12 = **x**/13

Entonces:

$$x = \frac{13 \times 18}{12} = 19.5$$

1 Semejanza de triángulos

En los triángulos siguientes: $\measuredangle A \cong \measuredangle A'$; $\overline{BC} \parallel \overline{B'C'}$



$\measuredangle A$ y $\measuredangle A'$ y $\overline{BC}$ y $\overline{B'C'}$ son ángulos y lados correspondientes, respectivamente.

> Dos triángulos son semejantes, si sus ángulos correspondientes son congruentes o sus lados correspondientes son proporcionales.

Los triángulos semejantes **ABC** y **A′B′C′** cumplen con:

- $\measuredangle A \cong \measuredangle A'$; $\measuredangle B \cong \measuredangle B'$; $\measuredangle C \cong \measuredangle C'$
- $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{AC}}$ = constante (Razón de semejanza)

Los siguientes son criterios de semejanza de dos triángulos:

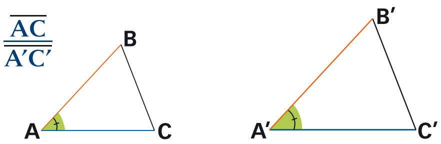
- Dos triángulos son semejantes si sus ángulos correspondientes son congruentes (**Criterio AAA**).

$\measuredangle A \cong \measuredangle A'$; $\measuredangle B \cong \measuredangle B'$; $\measuredangle C \cong \measuredangle C'$

Basta con que dos de los ángulos correspondientes de dos triángulos sean congruentes, para que dichos triángulos sean semejantes.

- Dos triángulos son semejantes si tienen el mismo ángulo entre lados que son proporcionales (**Criterio LAL**).

$\measuredangle A \cong \measuredangle A'$; $\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}$



Sugerencias didácticas

- **Inicio:** Oriente a sus estudiantes para que resuelvan en el aula la actividad de recuperación de experiencias previas propuesta en el apartado *Recuperación*, en la que obtendrán el valor de **x** en cada una de las proporciones indicadas.
- **Desarrollo:** Haga que lean cuidadosamente el contenido de la doble página, que observen las representaciones gráficas y los procedimientos para determinar las medidas de los lados de los triángulos semejantes. Motíveles para que reproduzcan los triángulos congruentes y semejantes en sus cuadernos.

2 Congruencia de triángulos

Dos triángulos son congruentes, si sus ángulos correspondientes son congruentes y sus lados correspondientes son segmentos congruentes.

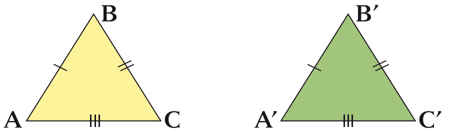
Los siguientes son criterios de congruencia de dos triángulos:

- Dos triángulos son congruentes si sus lados correspondientes son segmentos congruentes (Criterio LLL).

$\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$

$\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$

$\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$



- Dos triángulos son congruentes, si dos de sus ángulos y el lado comprendido entre ellos son respectivamente congruentes (Criterio ALA).

$\measuredangle A \cong \measuredangle A'$

$\measuredangle C \cong \measuredangle C'$

$\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$

- Dos triángulos son congruentes, si dos de sus lados y el ángulo comprendido entre ellos son respectivamente congruentes (Criterio LAL).

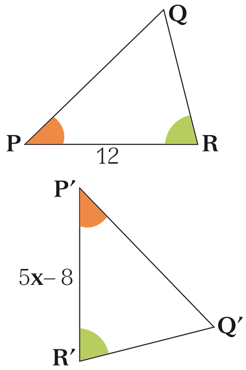
$\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$

$\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$

$\measuredangle A \cong \measuredangle A'$

EJEMPLO RESUELTO:

- Obtener la medida **x**, si los triángulos dados son congruentes.



A partir del criterio ALA:

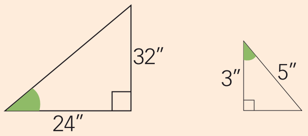
$5\mathbf{x} - 8 = 12$

La solución de la ecuación es: **x** = 4.

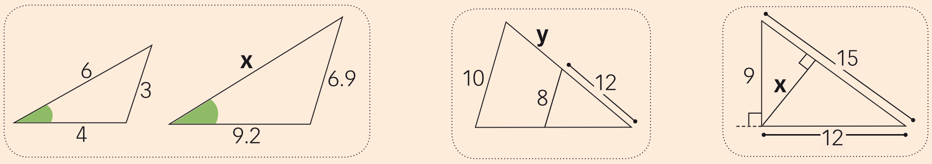
ACTIVIDADES

4 Determina si los triángulos siguientes son semejantes.

- Describe el procedimiento que utilizaste para responder.
- Si **ABC** y **A′B′C′** son semejantes, ¿cuál su razón **r**? *1/8.*



5 Obtén el valor de **x** en cada caso.



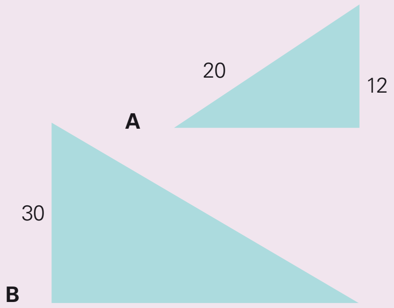
x = 13.8 *x = 3* *x = 7.2*

- **Desarrollo:** Muestre a sus estudiantes los ejemplos y sus procedimientos desarrollados en la doble página, en los que se determinan medidas de lados desconocidos de triángulos semejantes y congruentes. Diseñe ejemplos adicionales para que los resuelvan en sus cuadernos.
- **Cierre:** Motive a sus estudiantes a realizar los ejercicios del apartado *Actividades*. En la actividad 4, determinarán si los triángulos representados son semejantes. En la actividad 5, obtendrán el valor de **x** en cada uno de los triángulos representados.

Actividad grupal

Forme varias agrupaciones de estudiantes con su regla a la mano y, luego, pídales que construyan en hojas blancas triángulos semejantes similares a estos, con las medidas indicadas, a fin de que obtengan la longitud de uno de sus lados.

Pídales, por ejemplo, que calculen el valor de la hipotenusa del triángulo **B**.

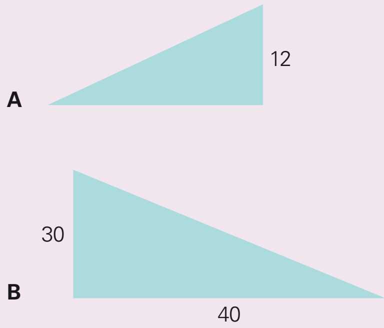


Resp.: $\frac{30}{12} = \frac{\mathbf{x}}{20}$

$\mathbf{x} = 30 \times 20 \div 12$

$\mathbf{x} = 50.$

Haga que calculen el cateto desconocido del triángulo **A**.



Resp.: $\frac{30}{12} = \frac{40}{\mathbf{x}}$

$\mathbf{x} = 40 \times 12 \div 30$

$\mathbf{x} = 16.$

Ficha 17.

Aprender a aprender

Pregunte al grupo: *¿Les parecieron importantes los conceptos estudiados en esta oportunidad? ¿Qué utilidad para la cotidianidad tienen estos conceptos?*

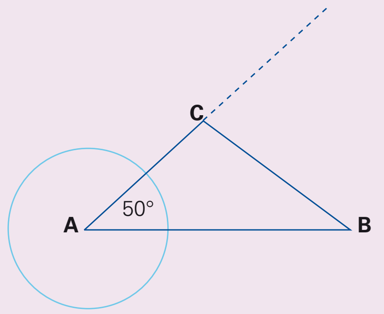
Indicadores de logro

- **Construye** triángulos semejantes y congruentes usando la regla y el compás.

Más información

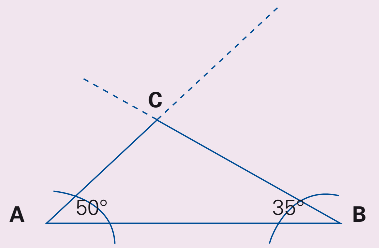
Comente a sus estudiantes que para construir triángulos congruentes, conocidos dos de sus lados y el ángulo comprendido entre ellos:

- Se traza uno de los segmentos.
- Se traza el ángulo que forman los dos lados.
- Se lleva el segundo lado conocido sobre el lado del ángulo.
- Para construir el triángulo se unen los extremos de los dos lados.



Si se conocen un lado y dos de sus ángulos.

- Se traza el lado conocido.
- Se trazan los ángulos conocidos desde cada uno de los extremos del lado.
- El tercer vértice del triángulo es intersección de los lados de los ángulos.



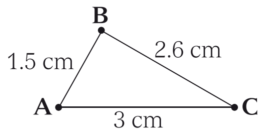
RECUPERACIÓN

Explica por qué bastan solo dos ángulos congruentes, en dos triángulose para que éstos sean semejantes.

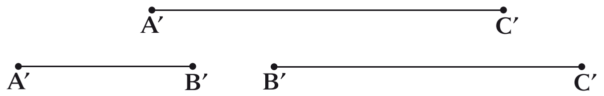
El tercero de los ángulos medirá, en ambos triángulos, 180º – Suma de los otros dos.

1 Construcción de un triángulo semejante a otro dado

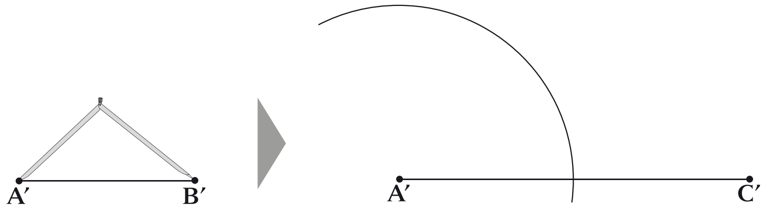
Sigue con atención, paso a paso, el procedimiento para construir un triángulo semejante al **ABC**, con razón de semejanza **r** = 2.



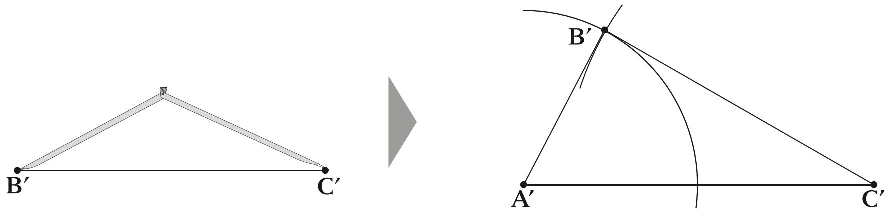
1.º Se trazan los segmentos $\overline{A'C'}$, $\overline{A'B'}$ y $\overline{B'C'}$, de longitudes 2 x 3 cm = 6 cm; 2 x 1.5 cm = 3 cm y 2 x 2.6 cm = 5.2 cm, respectivamente:



2.º Se apoya la punta metálica del compás en el extremo **A′** del segmento $\overline{A'B'}$ y se abre hasta que su punta blanda toque el extremo **B′**. Luego, con la abertura anterior, se apoya el compás en el extremo **A′** del segmento $\overline{A'C'}$ y se traza un primer arco:



3.º Con una abertura del compás igual a **B′C′** y apoyando su punta en el extremo **C′** del segmento $\overline{A'C'}$ se traza un segundo arco que cortará al primero en un punto **B′**:



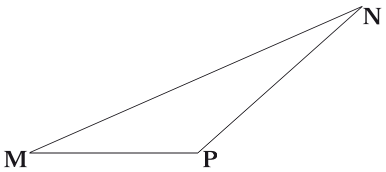
Los triángulos **ABC** y **A′B′C′** son semejantes y de razón **r** = 2.

Sugerencias didácticas

- **Inicio:** Oriente a sus estudiantes para que lean y resuelvan en el aula la situación vinculada a la recuperación de experiencias previas planteada en el apartado *Recuperación*, en la que explicarán por qué bastan solo dos ángulos congruentes, en dos triángulos, para que estos sean semejantes.
- **Desarrollo:** Pídales que lean el contenido de la doble página, que observen las representaciones gráficas y los pasos para construir triángulos semejantes y congruentes. Haga que realicen las construcciones en sus cuadernos o en hojas blancas utilizando la regla y el compás.

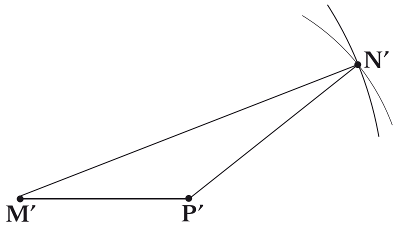
2 Construcción de un triángulo congruente a otro dado

Para construir un triángulo congruente al **MNP**:



1.° Se traza el segmento **M′P′** congruente con el segmento **MP**:

2.° Se apoya la punta metálica del compás en el extremo **M** del lado **MN** del triángulo **MNP** y se abre hasta que su punta blanda toque el extremo **N**. Se traza un primer arco con la abertura anterior, apoyando el compás en el extremo **M′** del segmento $\overline{\mathbf{M'P'}}$ y, luego, con una abertura del compás igual al lado **NP** del triángulo **MNP**, se traza un segundo arco que corte al primero en un punto que llamaremos **N′**:



Los triángulos **MNP** y **M′N′P′** son congruentes.

SABER MÁS

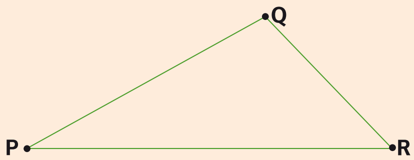
Semejanza y congruencia

La congruencia puede ser considerada una relación de semejanza de razón unitaria, **r** = 1.

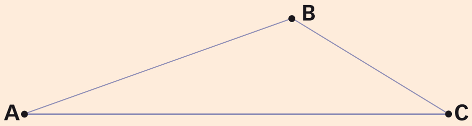
ACTIVIDADES

6 Copia y, luego, construye lo que se te pide.

- Un triángulo semejante al triángulo **PQR** de la derecha y con **r** = 2.5 como razón de semejanza.
- Un triángulo semejante al triángulo **PQR** y que tenga una razón de semejanza **r** = 1/2.



7 Construye un triángulo congruente al **ABC** dado.

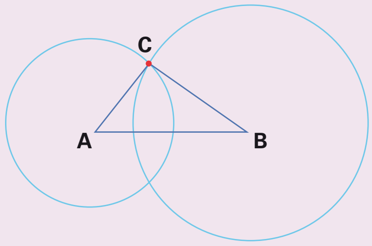


- **Desarrollo:** Haga que sus estudiantes, utilizando la regla y el compás, construyan triángulos semejantes y congruentes siguiendo los procedimientos indicados en la doble página. Propóngales que lean y comenten en el grupo el contenido del apartado *Saber más*.
- **Cierre:** Motive a sus estudiantes a realizar los ejercicios propuestos en el apartado *Actividades*. En la actividad 6, copiarán el triángulo **PQR** representado y, luego, construirán los triángulos semejantes especificados. En la actividad 7, construirán un triángulo congruente al **ABC** dado.

Más información

Construcción de triángulos congruentes conociendo sus tres lados:

1. Trazamos un segmento de igual medida que uno de los lados.
2. Desde cada extremo del lado trazado se dibuja una circunferencia cuyo radio tendrá la medida del segundo y tercer lados del triángulo.
3. El triángulo tiene sus vértices en los extremos del primer segmento trazado y una de las intersecciones de la circunferencia.



Atención a la diversidad

Actividades de refuerzo: Motive al grupo para que construyan en hojas blancas, usando la regla y el compás y, siguiendo los pasos correspondientes, los triángulos semejantes y congruentes desarrollados en la doble página.

Ficha 18.

Aprender a aprender

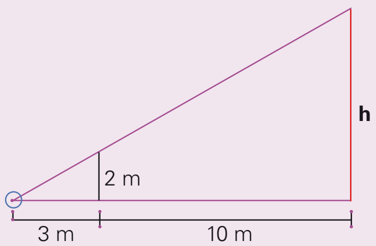
Pregunte al grupo: *¿Creen que los conocimientos previos hicieron más fácil el trabajo en esta oportunidad? ¿Por qué?*

Indicadores de logro

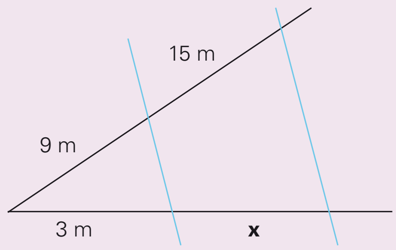
- **Conoce** y **aplica** el teorema de *Tales* en la resolución de problemas.

Otras actividades

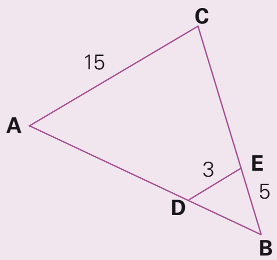
Proponga a sus estudiantes que determinen las medidas desconocidas de los siguientes triángulos aplicando el teorema de *Tales*.



Resp.: **h** = 6.67m.



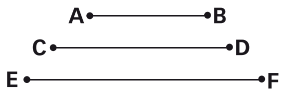
Resp.: **x** = 5 cm.



Resp.: **BC** = 20.

RECUPERACIÓN

Traza con una regla un segmento proporcional a los siguientes.

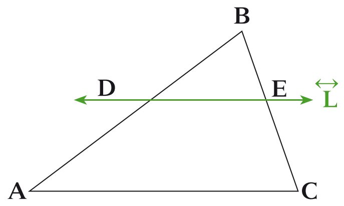


1 Teorema de Tales

El teorema de Tales, que es uno de los dos teoremas que se atribuyen a este pensador griego que vivió entre los siglos VII y VI antes de la era común, muestra que:

Si se traza una recta paralela a uno de los lados de un triángulo resultan dos triángulos semejantes y, por consiguiente, su lados son proporcionales.

La recta $\overleftrightarrow{L}$ paralela a su base $\overline{AC}$ del triángulo **ABC** permite obtener un segundo triángulo, **DBE**, semejante al primero.



Los triángulos **ABC** y **DBE** son semejantes porque sus ángulos son congruentes (Criterio AAA):

$$\measuredangle A \cong \measuredangle D;\ \measuredangle B \cong \measuredangle B;\ \measuredangle C \cong \measuredangle E$$

De acuerdo al teorema de Tales:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DE}}$$

Puesto que $\overline{AB} = \overline{AD} + \overline{DB}$ y $\overline{BC} = \overline{CE} + \overline{EB}$:

$$\frac{\overline{AD} + \overline{DB}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{CE} + \overline{EB}}{\overline{EB}} \longrightarrow \frac{\overline{AD}}{\overline{DB}} + \cancel{1} = \frac{\overline{CE}}{\overline{EB}} + \cancel{1}$$

Queda, $\frac{\overline{AD}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{CE}}{\overline{EB}}$ que es equivalente a: $\frac{\overline{AD}}{\overline{CE}} = \frac{\overline{DB}}{\overline{EB}}$.

La última proporción muestra que la recta $\overleftrightarrow{L}$ divide a los lados $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ del triángulo en segmentos proporcionales.

EJEMPLO RESUELTO:

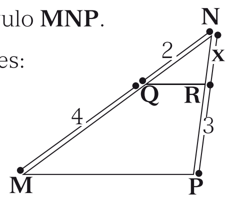
- Determinar la longitud **x** en el triángulo **MNP**.

  La proporción ajustada al problema es:

  $4/3 = 2/\mathbf{x}$.

  De donde: $\mathbf{x} = (3 \times 2)/4 = 1.5$.

  El segmento $\overline{NR}$ mide 1.5 unidades.



Sugerencias didácticas

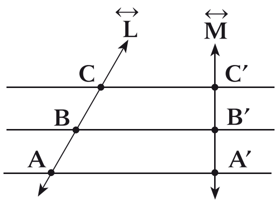
- **Inicio:** Oriente a sus estudiantes para que lean y resuelvan en el aula la actividad vinculada a la recuperación de experiencias previas propuesta en el apartado *Recuperación*, en la que trazarán con una regla un segmento proporcional a los segmentos representados.
- **Desarrollo:** Pídales que lean el contenido de la doble página, que observen las representaciones gráficas y el desarrollo del ejemplo resuelto. Haga que reproduzcan los ejemplos resueltos y sus respectivos gráficos en sus cuadernos.

2 Corolario del teorema de Tales

Del teorema de Tales se deriva el siguiente corolario:

Dos rectas que atraviesan al menos tres rectas paralelas determinan, en éstas últimas, segmentos proporcionales.

El primer teorema de Tales permite comprobar el paralelismo de un grupo de líneas rectas.

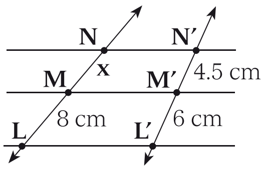


Las rectas $\overleftrightarrow{L}$ y $\overleftrightarrow{M}$ determinan sobre las paralelas segmentos que cumplen con:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}$$

EJEMPLO RESUELTO:

- Obtener la longitud **x** del segmento.



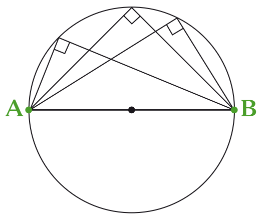
De las condiciones del problema:

$$\frac{\overline{LM}}{\overline{L'M'}} = \frac{\overline{MN}}{\overline{M'N'}} \longrightarrow \frac{8 \text{ cm}}{6 \text{ cm}} = \frac{x}{4.5 \text{ cm}}.$$

Entonces: **x** = (8 x 4.5)/6 = 6. El segmento $\overline{MN}$ mide 6 cm.

A Tales se le atribuye este otro teorema:

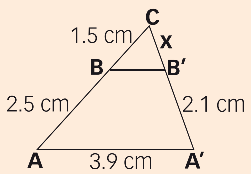
Los extremos de un diámetro forman, con cualquier otro punto distinto de la circunferencia, un triángulo rectángulo.



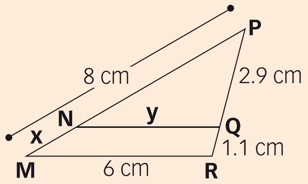
ABC, **ABD** y **ABE** son triángulos rectángulos.

ACTIVIDADES

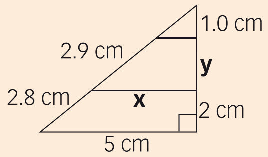
8 Calcula las longitudes desconocidas.



x = 1.26 cm



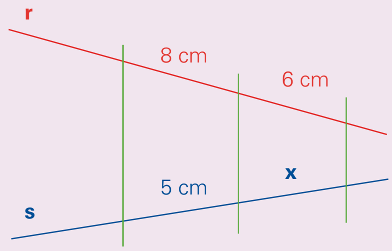
x = 2.2 cm; y = 4.35 cm



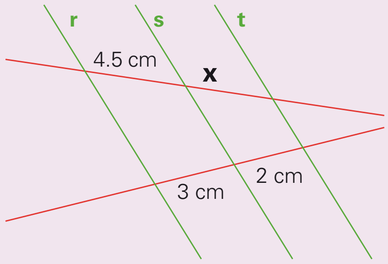
x = 3.02 cm; y = 2.07 cm

Atención a la diversidad

Actividades de ampliación: Motive al grupo para que determinen la longitud de los segmentos desconocidos en las figuras representadas.



Resp.: **x** = 3.75 cm.



Resp.: **x** = 3 cm.

Ficha 19.

- **Desarrollo:** Haga que sus estudiantes calculen longitudes de segmentos proporcionales en triángulos y rectas que atraviesan paralelas aplicando el teorema de *Tales*. Diseñe ejercicios similares a los de esta doble página para que los resuelvan en el cuaderno y en la pizarra. Motíveles para que lean y comenten en el grupo la información que les ofrece la joven en el margen derecho de la página 63.
- **Cierre:** Motive a sus estudiantes a realizar los ejercicios propuestos en el apartado *Actividades*. En la actividad 8, en sus cuadernos, calcularán las longitudes desconocidas de los triángulos representados.

Aprender a aprender

Pregunte al grupo: *¿Qué similitud tienen los conceptos desarrollados en esta doble página con temas que trabajaron en grados anteriores? ¿Creen que esta similitud hizo más fácil el aprendizaje?*

Indicadores de logro

- **Identifica** triángulos rectángulos y sus propiedades métricas.

Actividad interactiva

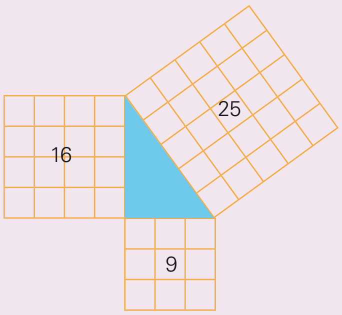
El teorema de Pitágoras

Actividad interactiva en la que determinarán, en sus cuadernos, el valor de los catetos desconocidos en diversos triángulos rectángulos aplicando el teorema de Pitágoras.

Competencias fundamentales

Competencia comunicativa

Recuerde a sus estudiantes que Pitágoras fue un filósofo matemático griego que planteó que, en un triángulo rectángulo de 3, 4 y 5 unidades de longitud, el cuadrado de su lado mayor es equivalente a la suma de los cuadrados de los otros dos lados. Esto se aplica en todos los triángulos rectángulos.



$25 = 5^2$

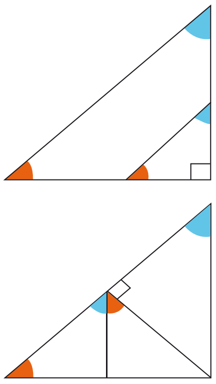
$16 = 4^2$

$9 = 3^2$

$5^2 = 4^2 + 3^2$

RECUPERACIÓN

Observa las figuras y, luego, responde las preguntas.



- ¿Son congruentes los ángulos del mismo color? *Sí, lo son.*
- Si tu respuesta es afirmativa, ¿por qué crees que lo son?

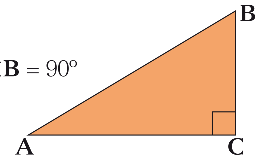
Son ángulos de rayos paralelos o perpendiculares.

1 El teorema de Pitágoras

El teorema de Pitágoras establece una relación entre las longitudes de la hipotenusa y los catetos.

El teorema de Pitágoras enuncia que: *El cuadrado de la longitud de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos.*

$m\sphericalangle A + m\sphericalangle B = 90°$



Del enunciado anterior se tiene que: $\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2$.

Con la expresión anterior se obtiene la longitud de uno de los catetos, conocidas las longitudes de la hipotenusa y el otro cateto:

$$\overline{BC} = \sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{AC}^2} \qquad \overline{AC} = \sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{BC}^2}$$

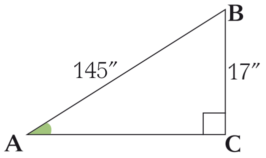
EJEMPLOS RESUELTOS:

- Obtener la longitud del cateto $\overline{AC}$ el triángulo rectángulo de la figura siguiente.

  Aquí: $\overline{AB} = 145''$ y $\overline{BC} = 17''$.

  La longitud del cateto **AC** se obtiene mediante:

  $\overline{BC} = \sqrt{145^2 - 17^2} = \sqrt{20\,736} = 144$.

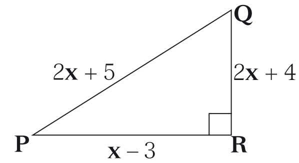
  

  La longitud de **AC** es 144″.

- Obtener las longitudes de los catetos y la hipotenusa del siguiente triángulo rectángulo.

  De acuerdo al teorema de Pitágoras:

  $(2x + 5)^2 = (x - 3)^2 + (2x + 4)^2$.

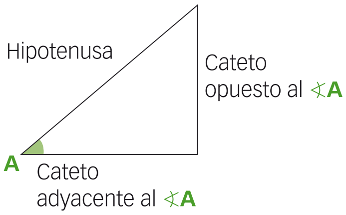
  

  La igualdad anterior se reduce a la ecuación: $x^2 - 10x = 0$.

  Las soluciones de la ecuación son $x = 0$ y $x = 10$. Descartando la solución $x = 0$, que implicaría una longitud negativa para **PR**:

  $\overline{PQ} = 2(10) + 5 = 25$; $\overline{QR} = 2(10) + 4 = 24$; $\overline{PR} = 10 - 3 = 7$.

Elementos de un triángulo rectángulo



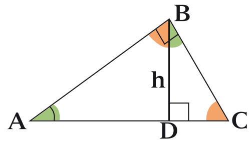
Sugerencias didácticas

- **Inicio:** Oriente a sus estudiantes para que lean y resuelvan en el aula la actividad vinculada a la recuperación de experiencias previas propuesta en el apartado *Recuperación*, en la que observarán los triángulos y, luego, responderán las preguntas planteadas.
- **Desarrollo:** : Pídales que lean el contenido de la doble página, que observen las representaciones gráficas y el desarrollo de los ejemplos resueltos aplicando el teorema de *Pitágoras* y el teorema de la altura y del cateto. Haga que reproduzcan los ejercicios y sus gráficos correspondientes en sus cuadernos.

2 Teoremas de la altura y del cateto

El teorema de la altura del triángulo rectángulo muestra que:

La altura sobre la hipotenusa divide a un triángulo rectángulo en otros dos triángulos rectángulos semejantes al triángulo original.



La altura **h** = $\overline{BD}$ sobre la hipotenusa $\overline{AC}$ divide al triángulo rectángulo **ABC** en otros dos triángulos rectángulos, **ABD** y **DBC**, semejantes, ambos, al triángulo **ABC**.

Como **ABD** ~ **DBC**: $\dfrac{\overline{BD}}{\overline{AD}} = \dfrac{\overline{CD}}{\overline{BD}} \longrightarrow \overline{BD}^2 = h^2 = \overline{AD} \cdot \overline{CD}$

De la expresión se deduce que la altura, **h**, sobre la hipotenusa es la raíz cuadrada del producto de las proyecciones, $\overline{AD}$ y $\overline{CD}$, de los catetos, sobre la hipotenusa: $h = \sqrt{\overline{AD}.\overline{CD}}$.

El teorema del cateto dice que:

El cuadrado de la longitud de un cateto es igual al resultado de multiplicar la longitud de su proyección sobre la hipotenusa por la longitud de esta última.

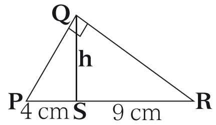
Para los triángulos **ABD** y **ABC**: $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{AB}} \longrightarrow \overline{AB}^2 = \overline{AD} \cdot \overline{AC}$

Entonces: $\overline{AB} = \sqrt{\overline{AD}.\ \overline{AC}}$.

La longitud de un cateto es la raíz cuadrada del producto de la longitud de la hipotenusa por la longitud de la proyección de dicho cateto sobre la hipotenusa.

EJEMPLOS RESUELTOS:

- Determinar la altura **h** del triángulo **PQR**.



$\overline{PS}$ y $\overline{SR}$ son las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa. Sus longitudes respectivas, en centímetros, son: 4 y 9.

Entonces:

$h = \sqrt{4 \times 9} = \sqrt{36} = 6$ cm.

- Calcular las longitudes de los catetos $\overline{PQ}$ y $\overline{QR}$.

$\overline{PQ} = \sqrt{\overline{PS}.\ \overline{PR}} = \sqrt{4 \times 13}$

$= 2\sqrt{13}$ cm.

$\overline{QR} = \sqrt{\overline{SR}.\ \overline{PR}} = \sqrt{9 \times 13}$

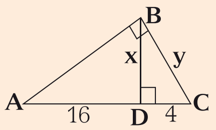
$= 3\sqrt{13}$ cm.

ACTIVIDADES

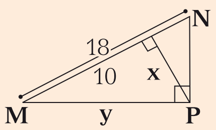
9 Responde la pregunta.

- ¿Cómo justificas la afirmación de que los triángulos **ABC**, **ABD** y **DBC** de la figura mostrada arriba son todos semejantes? *Son rectángulos y sus ángulos agudos tienen sus rayos perpendiculares.*

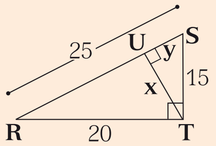
10 Calcula los valores de **x** e **y** en cada caso.



$x = 8;\ y = 4\sqrt{5}$



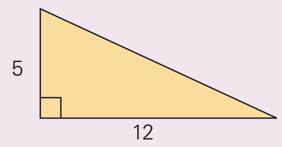
$x = 4\sqrt{5};\ y = 6\sqrt{5}$



$x = 12;\ y = 9$

Atención a la diversidad

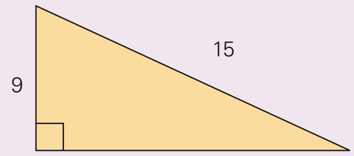
Actividades de refuerzo: Motive al grupo para que determinen la longitud de los lados desconocidos en los siguientes triángulos rectángulos aplicando el teorema de Pitágoras.



$h = \sqrt{12^2 + 5^2}$

$h = \sqrt{169}$

$h = 13.$



$h = \sqrt{15^2 - 9^2}$

$h = \sqrt{144}$

$h = 12.$

Ficha 20.

- **Desarrollo:** Diseñe ejercicios similares a los propuestos en esta doble página en los que calculen la longitud de la hipotenusa y los catetos de triángulos rectángulos y apliquen el teorema de la altura y del cateto. Haga que reproduzcan el ejemplo resuelto del margen derecho de la página 65 y construya otros adicionales para el cuaderno y la pizarra.
- **Cierre:** Motive a sus estudiantes a realizar los ejercicios propuestos en el apartado *Actividades*. En la actividad 9, expresarán cómo justifican la afirmación de que los triángulos **ABC**, **ABD** y **DBC** de la figura mostrada arriba son todos semejantes. En la actividad 10, calcularán los valores de **x** e **y** en los triángulos rectángulos representados.

Aprender a aprender

Pregunte al grupo: *¿Creen que los conocimientos previos hicieron más fácil el trabajo en esta oportunidad? ¿Por qué?*

Indicadores de logro

- **Construye** triángulos diversos usando la regla y el compás.

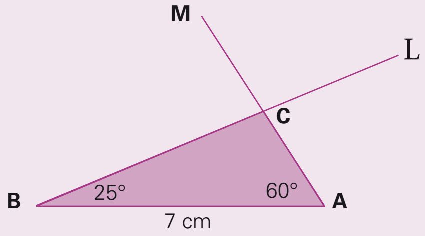
Competencias fundamentales

Competencia comunicativa

Construcción de un triángulo conocidos un lado y sus ángulos adyacentes

Para construir un triángulo con un lado que mide 7 cm y ángulos adyacentes que miden de 25° y 60° de amplitud, respectivamente.

- Se traza un segmento de 7 cm que se tomará como base del triángulo.
- Sobre sus extremos, usando el transportador, se dibujan los dos ángulos de 25° y 60°.
- Con la regla se prolongan los lados de los ángulos y en el punto donde se cruzan dichos lados, se obtiene el tercer vértice.



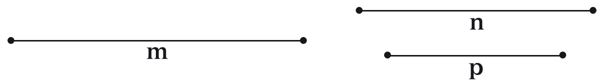
RECUPERACIÓN

Explica en qué consiste la desigualdad triangular y, luego, pon un ejemplo en el que esta se cumpla y otro, en el que no se cumpla.

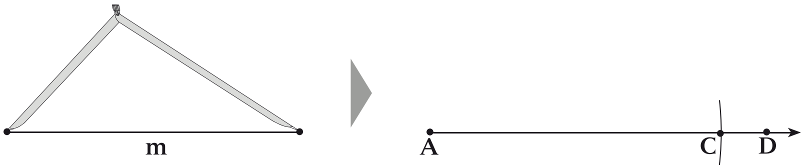
Comparte tu respuesta y tus ejemplos con tus compañeros de curso.

1 Construcción de un triángulo de lados conocidos

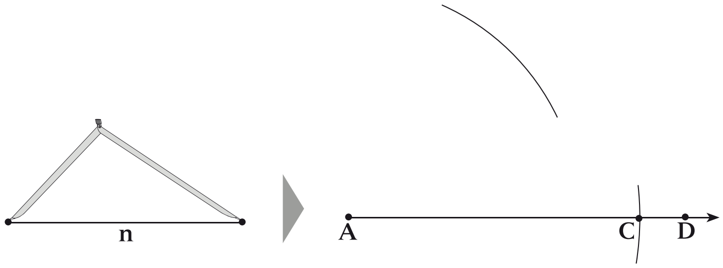
Para construir un triángulo cuyos lados sean los segmentos **m**, **n** y **p** siguientes, se procede como se muestra abajo.



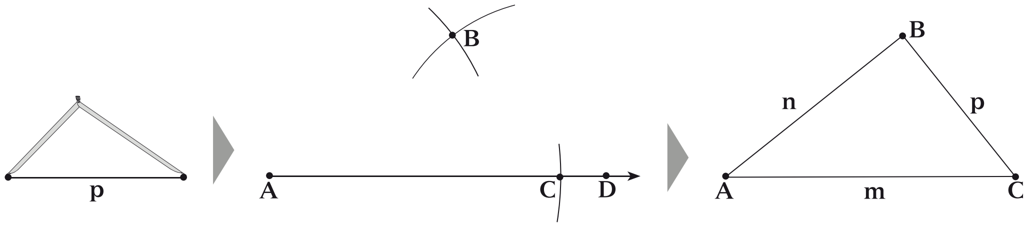
1.º Se traza un rayo **AD**. Se abre el compás tanto como lo requiera la longitud de **m**, y con esa abertura, y apoyando su punta metálica en **A**, se traza un arco que corte al rayo **AD** en **C**. Con la operación anterior se ha trasladado al segmento **m** sobre **AD**:



2.º Se abre el compás tanto como sea necesario para que sus puntas toquen los extremos del segmento **n**, se apoya con esta abertura en **A** y se traza un arco.



3.º Se hace lo mismo con el segmento **p**, apoyando el compás en el punto **C** y trazando otro arco que corte al anterior en **B**. Al unir los puntos **A** y **C** con **B** se obtiene el triángulo de lados **m**, **n** y **p**.

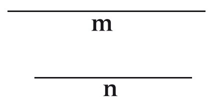


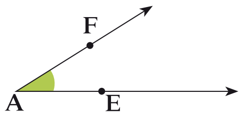
Sugerencias didácticas

- **Inicio:** Oriente a sus estudiantes para que lean y resuelvan en el aula la actividad vinculada a la recuperación de experiencias previas propuesta en el apartado *Recuperación*, en la que explicarán en qué consiste la desigualdad triangular y pondrán un ejemplo en el que esta se cumpla.
- **Desarrollo:** Pídales que lean el contenido de la doble página, que observen las representaciones gráficas y el desarrollo de los procedimientos para realizar la construcción de un triángulo de lados conocidos y dos lados y un ángulo. Haga que reproduzcan las construcciones en sus cuadernos.

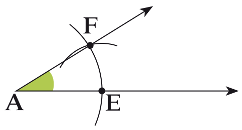
2 Construcción de un triángulo dados dos lados y el ángulo comprendido

Para construir un triángulo conocidos dos lados, los segmentos $\overline{\mathbf{m}}$ y $\overline{\mathbf{n}}$, y el ángulo **A** comprendido entre ellos:

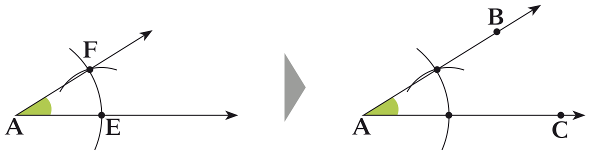




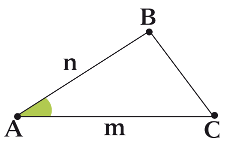
1.º Con una abertura del compás que vaya del vértice **A** del ángulo dado al punto **E** del rayo $\overrightarrow{\mathbf{AE}}$, se traza un arco que corte al otro rayo en un punto **F**. Luego, con una abertura, $\overline{\mathbf{EF}}$, del compás y apoyando en **E**, se traza un arco que corte al anterior en **F**.



2.º Se traslada, con el compás, el segmento $\overline{\mathbf{m}}$ sobre el rayo $\overrightarrow{\mathbf{AE}}$ y se marca sobre este rayo el punto **C**. Luego, se traslada con el compás el segmento $\overline{\mathbf{n}}$ sobre el rayo $\overrightarrow{\mathbf{AF}}$ y se marca el punto **B**.



Finalmente, uniendo los puntos **A**, **B** y **C** se obtiene el triángulo buscado.



Construcción imposible

Cuando las longitudes de los segmentos no cumplen con la desigualdad triangular, no es posible la construcción del triángulo empleando la regla y el compás.

INTELIGENCIA COLABORATIVA

Construcción de un triángulo conocidos dos ángulos y el lado entre ellos

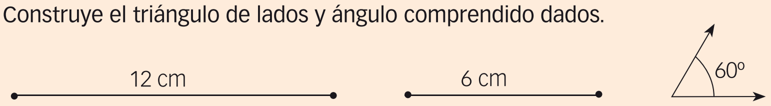
- Investiguen cómo se construye un triángulo conocidos dos de sus ángulos y el lado comprendido entre ellos.
- Luego, construyan un triángulo, dados $\overline{\mathbf{AB}}$ = 10 cm, m ∢**A** = 80º y m ∢**B** = 30º:
- Socialicen los resultados de la actividad.

ACTIVIDADES

11 Construye los triángulos siguientes.

- Un triángulo de lados 6 cm, 9 cm y 10 cm.
- Un triángulo equilátero de lado 12 cm.

12 Construye el triángulo de lados y ángulo comprendido dados.



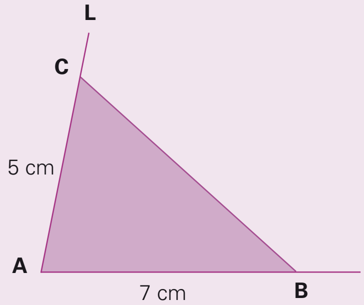
Competencias fundamentales

Competencia comunicativa

Construcción de un triángulo conocidos dos de sus lados y un ángulo

Para construir un triángulo cuyos lados miden 5 cm y 7 cm, respectivamente, y un ángulo comprendido entre ellos que mide 80°.

- Se dibuja, con el transportador, el ángulo de 80°.
- Los rayos de este ángulo serán los dos segmentos de 5 y 7 cm, respectivamente.
- Se unen los extremos de dichos segmentos por un tercer segmento que será el tercer lado del triángulo construido.



Forme en grupos a sus estudiantes y con sus instrumentos a la mano: hojas blancas, regla, compás y transportador, motíveles para que construyan los diversos triángulos trabajados en esta doble página.

Ficha 21.

- **Desarrollo:** Muestre a sus estudiantes los procedimientos para construir los triángulos trabajados en esta doble página. Pídales que lean y comenten el contenido del apartado *Construcción imposible*. Haga que realicen la actividad propuesta en el apartado *Inteligencia colaborativa* que trata sobre la construcción de un triángulo, conocidos dos ángulos y el lado entre ellos. Pídales que realicen las construcciones de triángulos en hojas blancas o papel de construcción.
- **Cierre:** Motive a sus estudiantes a realizar los ejercicios propuestos en el apartado *Actividades*. En la actividad 11, construirán los triángulos cuyas medidas se especifican. En la actividad 12, construirán el triángulo de lados y ángulo comprendido dados.

Aprender a aprender

Pregunte al grupo: *¿Tuvieron alguna dificultad en los procedimientos aplicados en la construcción de triángulos? ¿Qué pasos dieron para superarla?*

Competencias

- Comunicativa.
- Usa algoritmos.
- Resolución de problemas.

Indicadores de logro

- **Identifica** el concepto de *triángulo* y su clasificación. **Identifica** los ángulos internos y externos de un triángulo y **resuelve** problemas.
- **Reconoce** y **traza** segmentos, rectas y puntos notables del triángulo. **Conoce** y **aplica** los criterios de semejanza y congruencia de triángulos. **Construye** triángulos semejantes y congruentes usando la regla y el compás.
- **Conoce** y **aplica** el teorema de Tales en la resolución de problemas. **Identifica** triángulos rectángulos y sus propiedades métricas. **Construye** triángulos diversos usando la regla y el compás. **Resuelve** problemas del contexto que involucran triángulos y sus propiedades.

Competencias específicas

Competencia comunicativa

Es necesario que los estudiantes adquieran las habilidades necesarias para identificar y clasificar los diversos triángulos y, además, reconocer los procedimientos para construir triángulos usando la regla, el transportador y el compás y, al mismo tiempo, puedan desarrollar las competencias comunicativas que les permitan expresar estos conocimientos.

Usa algoritmos

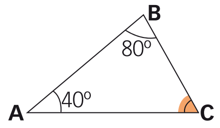
Las reglas y procedimientos en la resolución de operaciones aritméticas son vitales para la persecución de resultados correctos. Por ejemplo, en las operaciones que involucran los pasos para calcular longitudes de los lados de los triángulos y segmentos.

ACTIVIDADES

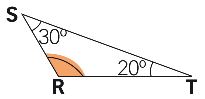
13 Identifica, dadas sus longitudes, la terna de segmentos con los que puedes construir un triángulo.

- 12 cm ; 18 cm ; 35 cm. *Sí.*
- 20 cm ; 15 cm ; 20 cm. *Sí.*
- 15 cm ; 16 cm ; 33 cm. *No.*
- 65" ; 45" ; 18". *No.*

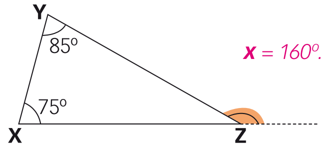
14 Obtén la medida del ángulo coloreado.



x *= 60°.*

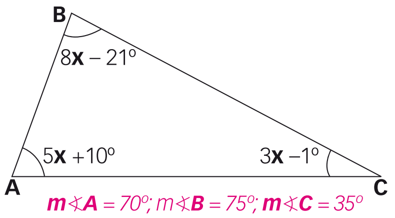


x *= 130°.*

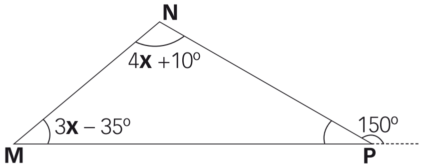


x *= 160°.*

15 Observa los triángulos y determina cuánto miden sus ángulos internos.



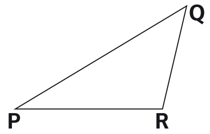
m∢A = 70°; m∢B = 75°; m∢C = 35°



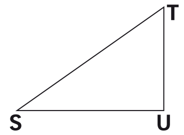
m∢M = 40°; m∢N = 110°; m∢P = 30°

16 Haz lo que se te pide.

- Calca el triángulo **PQR** y, luego, determina su ortocentro.



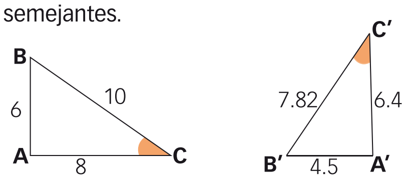
- Calca el triángulo **STU** y, luego, determina su circuncentro.



- Apoya la punta metálica del compás en el circuncentro y la punta banda en cualquiera de los vértices (**S**, **T** o **U**) y traza una circunferencia. ¿Qué observas?

Todos los vértices son puntos de una circunferencia.

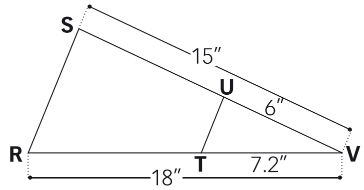
17 Averigua si los triángulos **ABC** y **A'B'C'** son semejantes.



- Describe qué procedimiento utilizaste para concluir del modo en que lo hiciste.

No son semejantes porque: $\overline{AC}/\overline{A'C'} \neq \overline{AB}/\overline{A'B'}$ *(o* $\overline{BC}/\overline{B'C'}$*).*

18 Observa la figura siguiente y, luego, determina la longitud del segmento **UV**. $\overline{UV}$ *= 6".*

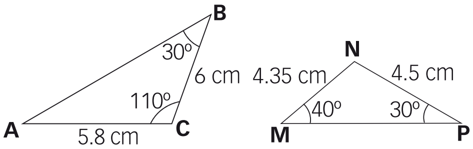


- ¿Puedes calcular la longitud del segmento $\overline{RS}$?
No es posible.
- Si tu respuesta es negativa, justifícala empleando argumentos geométricos.
No se conoce la longitud del segmento $\overline{UT}$.

Sugerencias didácticas

- Las actividades propuestas en esta página están estrechamente vinculadas a los conceptos y procedimientos desarrollados a lo largo de la unidad. Haga que lean cuidadosamente las instrucciones y, después, verifique los resultados obtenidos.
- Es importante observar de cerca que los estudiantes utilizan correctamente la regla, el compás y el transportador al realizar las construcciones de triángulos estudiadas en esta unidad.

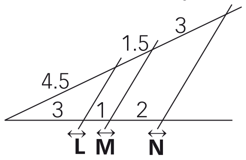
19 Analiza y, luego, di si los triángulos siguientes son semejantes.



- Si los triángulos son semejantes, ¿cuál es su razón de semejanza?

*Son semejantes, con **r** = 0.75.*

20 Investiga si las rectas $\overleftrightarrow{L}$, $\overleftrightarrow{M}$ y $\overleftrightarrow{N}$ son paralelas.

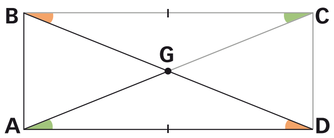


- ¿Qué hiciste para saberlo?

21 Investiga si un triángulo de lados **m**, **n** y **p** es semejante a un triángulo de lados …

- 3**m**, 3**n** y 3**p**. *Sí.*
- **m** + 5, **n** + 5 y **p** + 5. *No.*
- Prueba que tus respuestas son válidas para cualquier número que multiplique o se sume a las longitudes **m**, **n** y **p** de los lados del triángulo.

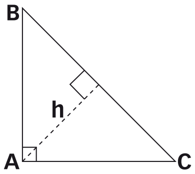
22 Observa y, luego, responde las preguntas.



- ¿Son congruentes los triángulos **ABD** y **CBD**? Justifica tu respuesta.
- ¿La longitud de la mediana trazada desde la hipotenusa es la mitad de la longitud de esa hipotenusa: **AG** = **BD**/2? Pruébalo.
- ¿Socializa tus respuestas en el aula y comenta las de tus compañeros de curso.

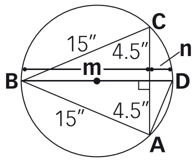
23 Prueba la afirmación, a partir del teorema de la altura de un triángulo rectángulo.

En un triángulo rectángulo isósceles, la altura sobre la hipotenusa es a la mitad de la longitud de la hipotenusa.



24 Determina el radio de la circunferencia circunscrita al triángulo isósceles **ABC**.

r = 7.86”.



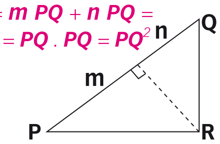
- Explica el procedimiento que usaste para determinar el radio.

25 Infiere el teorema de Pitágoras usando, para cada uno de los catetos del triángulo, el teorema de los catetos.

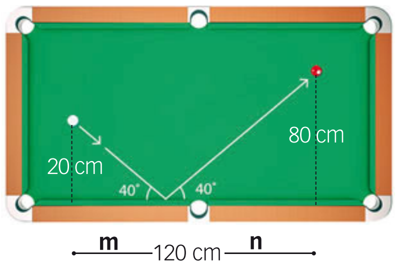
$PR^2 = m\ PQ;\ QR^2 = n\ PQ$

$PR^2 + QR^2 = m\ PQ + n\ PQ =$

$(m + n)\ PQ = PQ\ .\ PQ = PQ^2$



26 Obtén las distancias **m** y **n** requeridas para que la bola blanca golpee a la roja.



m = 24 cm; n = 96 cm.

Sugerencias didácticas

Resolución de problemas

- Proponga a sus estudiantes que lean detenidamente las instrucciones de los problemas propuestos en las actividades 13, 14, 15, 16, 17 y 18. Estos problemas son aplicaciones cotidianas de los diversos tipos de triángulos y sus construcciones. Acompáñelos en la realización de estas actividades y ofrézcales las orientaciones necesarias.

Competencias fundamentales

Pensamiento lógico, creativo y crítico

Los conocimientos adquiridos por los estudiantes son necesarios para identificar las alternativas más convenientes en la persecución de la solución de problemas que forman parte de su diario vivir. En este aspecto radica la importancia de que los estudiantes adquieran las destrezas necesarias para resolver problemas que involucren las construcciones de triángulos y el cálculo de longitudes de sus lados desconocidos.

Criterios de evaluación

Competencia comunicativa:

- Adaptación de las representaciones gráficas, simbólicas y numéricas a la situación de comunicación.

Competencia algoritmo:

- Seguimiento de las reglas, instrucciones y procedimientos.

Competencia pensamiento lógico, creativo y crítico

- Selecciona una estrategia, la aplica y evalúa su efectividad.

Aprender a aprender

Motive a sus estudiantes para que inventen ejemplos de las aplicaciones cotidianas de los conceptos desarrollados en la unidad. Por ejemplo, pregunte al grupo: *¿Qué pasos deben seguir para construir una pieza triangular, si conocen el valor de uno de sus ángulos y dos de sus lados?* Discuta las diversas respuestas con el grupo.

Indicadores de logro de la evaluación

- **Identifica** el concepto de *triángulo* y su clasificación. **Identifica** los ángulos internos y externos de un triángulo y **resuelve** problemas.
- **Reconoce** y **traza segmentos,** rectas y puntos notables del triángulo. **Conoce** y **aplica** los criterios de semejanza y congruencia de triángulos. **Construye** triángulos semejantes y congruentes usando la regla y el compás.
- **Conoce** y **aplica** el teorema de Tales en la resolución de problemas. **Identifica** triángulos rectángulos y sus propiedades métricas. **Construye** triángulos diversos usando la regla y el compás. **Resuelve** problemas del contexto que involucran triángulos y sus propiedades. **Utiliza** recursos virtuales y electrónicos: computadora, software educativo, juegos interactivos y otros, en la búsqueda de información.

Competencias específicas

- Comunica.
- Razona y argumenta.
- Modela y representa.
- Usa algoritmos.
- Conecta.
- Resuelve problemas.

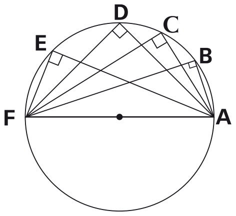
Aprender a aprender

Plantear al grupo: *¿Qué pasos deben dar para construir un triángulo, conocidos sus tres lados? ¿Y conocidos dos lados y un ángulo?*

EVALUACIÓN

Comunica

27 Observa la figura y describe una o más de una propiedad que presente en la misma.



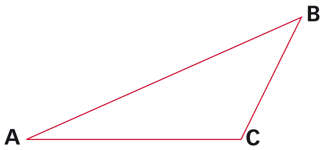
Razona y argumenta

28 Piensa y, luego, responde dando razones.

- Si la base y la altura de dos triángulos cualesquiera son segmentos proporcionales, ¿los triángulos son semejantes?
- ¿Y si los triángulos fueran rectángulos y tomáramos como altura uno de sus catetos?

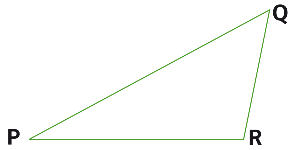
Modela y representa

29 Copia el triángulo **ABC** y traza sus circunferencias inscrita y circunscrita.



30 Copia y, luego, construye sobre una hoja de papel lo que se te pide.

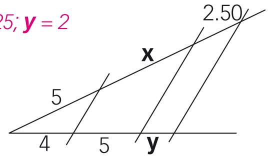
- Un triángulo semejante al siguiente, cuya razón de semejanza sea **r** = 2 y otro congruente.



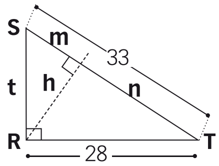
Usa algoritmos

31 Determina los valores de **x** e **y**.

x = 6.25; y = 2



32 Calcula las longitudes desconocidas.



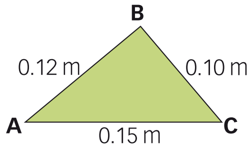
$t = \sqrt{305} \approx 17.46$; $m = 305/33 \approx 9.24$;

$n = 784/33 \approx 23.76$; $h \approx 14.81$.

Conecta

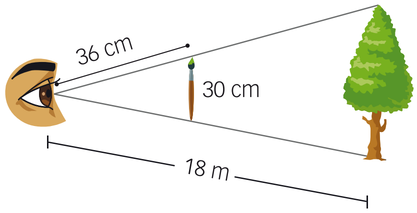
33 Resuelve el problema.

Un modelo de pieza triangular tiene la forma y dimensiones de la figura siguiente.



Se quiere construir una pieza semejante al modelo que tenga un perímetro de 5.55 m. ¿Qué longitud habrá que dar a cada uno de los lados de la pieza? *1.8 m; 1.5 m; 2.25 m.*

34 Calcula la altura del pino. *h = 15 m.*



Sugerencias didácticas para la evaluación

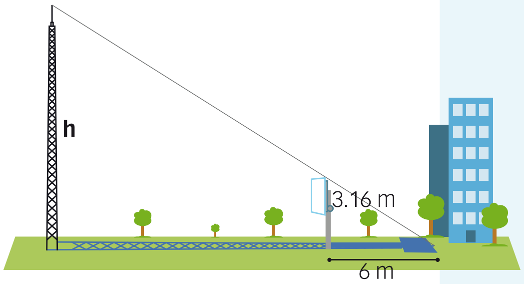
- Es importante verificar, antes de dar inicio a las actividades de evaluación, que sus estudiantes identifican y clasifican los triángulos. Observar que determinan correctamente el valor de lados y segmentos desconocidos en triángulos y segmentos formados por líneas paralelas y perpendiculares.

SABER HACER

35 **Resolución de problemas**. Observa la ilustración, lee y, luego, responde las preguntas.

Se planea instalar una antena que, por recomendación técnica, debe estar a una distancia de 1.8 veces su altura de una valla metálica de 3.16 m de altura. La sombra de la antena sobrepasa 6 m a la distancia de seguridad y estos 6 m son, justamente, el largo de la sombra, a la misma hora del día, de la valla.

- ¿Cómo ayudarías a los técnicos a calcular la altura de la antena que cumple con las condiciones del problema?
- ¿Cuál deberá ser la altura aproximada de la antena a ser instalada? *h = 61 m.*



36 Responde las preguntas.

- ¿Qué relaciones guardan los inventos y descubrimientos con la satisfacción de las necesidades humanas?
- ¿En qué sentido la técnica es un factor que multiplica las capacidades naturales del ser humano? Señala tres ejemplos.
- ¿Qué logros o ingenios técnicos son los representativos de la época actual? Señala los que más llaman tu atención.

APRENDIZAJE AUTÓNOMO

37 Marca según tus logros.

	Iniciado	En proceso	Logrado
• Identifico ángulos de un triángulo y resuelvo problemas.			
• Reconozco y trazo segmentos y puntos notables del triángulo.			
• Identifico y aplico los criterios de semejanza y congruencia.			
• Construyo triángulos semejantes y congruentes.			
• Identifica triángulos rectángulos y sus propiedades métricas.			

38 Reflexiona sobre tu aprendizaje.

- ¿Cuáles de los contenidos estudiados en esta unidad podrías aplicar a la vida diaria?
- ¿En qué situaciones o problemas cotidianos los aplicarías?

Sugerencias didácticas para la evaluación

- Pregunte a sus estudiantes:
  - — *¿Cómo se define el triángulo?*
  - — *¿Cómo se clasifican los triángulos?*
  - — *¿Cuáles son los segmentos y puntos notables?*
  - — *¿Cuándo decimos que dos triángulos son congruentes? ¿Y semejantes?*

Saber hacer

En la actividad 35, *Saber hacer, se apica la estrategia* de evaluación *Resolución de problemas*. Formados en grupos, observarán la ilustración, luego, leerán el texto y después, responderán las preguntas. En este caso, ayudarán a los técnicos a determinar a qué altura se colocará una antena que cumpla con las condiciones especificadas por los miembros de la urbanización donde se instalará y, además, calcularán cuál deberá ser la altura aproximada de la antena a ser instalada.

Actitudes y valores

Creatividad

En la sección destinada a *Actitudes y valores*, actividad 36, responderán, qué relación guardan los inventos y descubrimientos con la satisfacción de las necesidades humanas. Expresarán en qué sentido la técnica es un factor que multiplica las capacidades naturales del ser humano. Señalarán tres ejemplos. Por último, dirán qué logros o ingenios técnicos son los representativos de la época actual. Señalarán los que más llaman su atención.

Aprendizaje autónomo

En el apartado *Aprendizaje autónomo*, actividad 37, evaluarán por ellos mismos si los conceptos y procedimientos que trabajaron en la unidad se encuentran en estado de iniciación, en proceso o logrado. En la actividad 38, reflexionarán sobre su proceso de aprendizaje.

Aprender a aprender

Haga que sus estudiantes apliquen los conceptos aprendidos en la unidad en situaciones de la cotidianidad, por ejemplo, preguntar: *¿Cuáles son los pasos para reproducir una pieza de forma triangular, si se conocen las medidas de sus tres lados?*

5 La circunferencia

Propuesta de programación

COMPETENCIAS	CONTENIDOS
Específicas • **Razona y argumenta**: **Justifica** los pasos dados en las demostraciones relacionadas con la circunferencia. • **Comunica**: **Define**, **describe** y **diferencia** los elementos de la circunferencia. **Grafica** situaciones de la vida cotidiana usando la circunferencia. • **Modela y representa**: **Usa** la circunferencia para construir gráficos, polígonos regulares, figuras estrelladas, etc. • **Usa algoritmos**: **Sigue** las reglas que le permiten obtener un resultado al resolver problemas que involucran la circunferencia y sus propiedades. • **Conecta**: **Relaciona** la circunferencia, sus elementos y propiedades con situaciones de la cotidianidad. • **Resuelve problemas**: **Resuelve** y **elabora** problemas de su entorno cotidiano, utilizando la circunferencia, sus elementos y sus propiedades, sus diferentes posiciones y teoremas relacionados. • **Utiliza herramientas tecnológicas**: **Utiliza** soportes tecnológicos como la Internet, la calculadora científica y otros dispositivos. **Fundamentales** **Resolución de problemas**: **Identifica** y **utiliza** estrategias, y **genera** alternativas de solución.	**Conceptos** • Circunferencia. • Líneas y segmentos en una circunferencia. • Ángulos en una circunferencia. • Posiciones relativas de dos circunferencias. • Longitud de un arco de circunferencia. • Polígonos inscritos y circunscritos a una circunferencia. • Construcciones geométricas. **Procedimientos** • Identificación de la circunferencia y el círculo y establecimiento de la diferencia entre una y otro. • Reconocimiento de líneas y segmentos relativos a la circunferencia. • Identificación y determinación de los ángulos en una circunferencia. • Identificación de las distintas posiciones relativas de dos circunferencias. • Conocimiento y demostración de algunos teoremas fundamentales de la circunferencia. • Identificación de polígonos inscritos y circunscritos en una circunferencia. • Construcciones diversas sobre la circunferencia usando la regla y el compás. **Actitudes y valores** • Valoración del ingenio humano. • Apreciación del papel de la geometría en el desarrollo del conocimiento y la tecnología.

Tiempo estimado de trabajo: 2 semanas

INDICADORES DE LOGRO

- **Identifica** los conceptos de *circunferencia* y *círculo* y **establece** la diferencia entre una y otro.
- **Identifica** las regiones interior y exterior de una circunferencia.
- **Identifica** posiciones relativas de una recta y una circunferencia.
- **Identifica** segmentos relativos a una circunferencia.
- **Identifica** los ángulos en una circunferencia y **los determina**.
- **Identifica** las distintas posiciones relativas de dos circunferencias.
- **Conoce** y **demuestra** algunos de los teoremas fundamentales de la circunferencia.
- **Identifica** polígonos inscritos y circunscritos en una circunferencia.
- **Realiza** construcciones diversas sobre la circunferencia usando la regla y el compás.
- **Resuelve** problemas del contexto que involucran la circunferencia, el círculo y sus propiedades.
- **Utiliza** recursos virtuales y electrónicos: computadora, programas educativos, juegos interactivos y otros, en la búsqueda de información.

Valor transversal: Ciencia y tecnología

Recursos digitales

Plataforma digital

CD

BIBLIOTECA DEL DOCENTE

- DOCUMENTOS PARA LA PLANIFICACIÓN
- EVALUACIÓN PRIMER SEMESTRE
- GUÍA DE RECURSOS TIC

CUADERNO DE ACTIVIDADES

UNIDAD 5	La circunferencia

RECURSOS DE REFUERZO Y AMPLIACIÓN

LibroMedia

ACTIVIDADES INTERACTIVAS

PÁGINA 73	Elementos de la circunferencia y el círculo I
PÁGINA 76	Elementos de la circunferencia y el círculo II
PÁGINA 84	Polígonos regulares

CD DE RECURSOS DIGITALES: PLAN REGULAR

Pleno: PRUEBA DE EVALUACIÓN FORMATIVA DE LA UNIDAD

Estrategias pedagógicas

- Recuperación de experiencias previas.
- Trabajo en equipo.
- Aprendizaje basado en problemas (ABP).

Unidad 5

Competencias de la unidad

- **Lee** y **comenta** las informaciones expuestas en el apartado *Punto de partida*.
- **Responde** preguntas relacionadas con las informaciones expuestas en el apartado *Punto de partida*.
- **Recupera** experiencias vividas mediante la observación de las imágenes de la ilustración.
- **Analiza** un problema de la vida cotidiana vinculado a los conceptos y procedimientos que desarrollarán en la unidad en el apartado *Analiza el problema*.
- **Plantea** soluciones al problema leído y analizado anteriormente, en el apartado *Plantea una solución*.

Apertura de la unidad

Dentro de los objetivos principales de la apertura de esta unidad se encuentran el plantear una situación de aprendizaje, una problemática o un texto que sirve para contextualizar el tema de la unidad. Todo esto con la finalidad de motivar y despertar la curiosidad de los estudiantes.

A partir de la situación o texto planteado, el problema a analizar y las imágenes de la ilustración se conecta al estudiante con el tema a tratar, a la vez que vincula con la realidad o cotidianidad los temas que se van a desarrollar.

Todos los elementos que conforman la portada promueven la recuperación de experiencias o conocimientos previos y la motivación o el interés por los conocimientos que adquirirán en la unidad.

5 La circunferencia

Conceptos

- Circunferencia.
- Líneas, segmentos y ángulos en una circunferencia.
- Posiciones relativas de dos circunferencias.
- Longitud de un arco de circunferencia.
- Polígonos inscrito y circunscrito a una circunferencia.
- Construcciones geométricas.

Procedimientos

- Resolución de problemas.
- Construcción de diversas figuras geométricas.

Actitudes y valores

- Valoración del ingenio y la creatividad humana.
- Aprecio el papel de la Geometría en el desarrollo.

Punto de partida

Las primeras versiones de lo que hoy es una rueda se inventaron hace casi 10 mil años. Por lo que es casi seguro que los problemas relacionados con la longitud de una circunferencia nacieran en el contexto de la aplicación de prácticas asociadas al transporte empleando carretas, a los artefactos de alfarería y las construcciones. Las primeras noticias acerca del cálculo de circunferencias se sitúan en Mesopotamia y Egipto y datan de unos 40 siglos de antigüedad.

Para aquellas sociedades antiguas, la circunferencia era vista como una figura relacionada con el movimiento de los astros en el firmamento y los procesos cíclicos asociados a la naturaleza. Siglos más tarde, los griegos relacionaron a la circunferencia con la perfección, dándole así un carácter divino. El impacto de esa idea sobre la astronomía actuó como un obstáculo que retrasó en muchos siglos la aparición de modelos realistas del movimiento de los planetas.

- ¿Cómo la rueda contribuyó con el avance de la civilización? Pon tres ejemplos.

Petroglifo. Dibujo primitivo de una rueda radiada en una caverna.

ANALIZA EL PROBLEMA

Un odómetro es un aparato como el que se muestra, para medir longitudes de recorridos. Se quiere construir un odómetro que registre 2 metros recorridos, por cada vuelta de la rueda.

- ¿Cuánto deberá medir diámetro de la rueda del odómetro para que cumpla con el requisito de construcción?

Trabajo colectivo de apertura

- **Punto de partida:** Guíe a sus estudiantes a leer y comentar en el grupo las informaciones expuestas en el apartado *Punto de partida*, que trata sobre la historia de la aparición de la rueda desde épocas remotas y el impacto y consecuencias generadas en sociedades antiguas.
- **Analiza el problema:** En este apartado se plantea que se quiere construir un odómetro que registre dos metros recorridos por cada vuelta de la rueda.
- **Plantea una solución:** En este apartado responderán preguntas relacionadas con el odómetro y, luego, reflexionarán para descubrir el modo de determinar el radio de la rueda del odómetro del problema planteado en el apartado anterior.

Mecanismo interior de un reloj. Las ruedecillas conservan y transmiten el movimiento necesario para el desplazamiento de las agujas.

PLANTEA UNA SOLUCIÓN

- Piensa y, luego, responde. Reflexiona sobre tus respuestas.
  - ¿Cómo se relaciona la circunferencia de la rueda con la distancia que desea medirse con el odómetro?
  - Si se tienen dos odómetros con ruedas de radios distintos, ¿ambas necesitan dar igual número de vueltas para medir el mismo recorrido? ¿Por qué?
- A partir de las reflexiones que hiciste, descubre un modo de determinar el radio de la rueda del odómetro que en una vuelta recorre 2 metros. Socializa tu solución. *$2\pi \mathbf{r} = 2$ m, luego: $\mathbf{r} = 2/2\pi = 0.3183$ m.*

Rueda de piedra. Fue empleada antiguamente en los molinos de cereales.

Esquema conceptual de la unidad

La circunferencia

La Geometría se ocupa de estudiar

La circunferencia y el círculo

- Líneas, segmentos y ángulos
- Posiciones relativas
- Polígonos inscritos y circunscritos

que son objeto de

Construcciones con regla y compás

Actividad de motivación

Pida a sus estudiantes que lean en la sección: *Conceptos y procedimientos*, los temas que trabajarán en la unidad y las actitudes y valores que estarán presentes en el desarrollo de la misma. Luego, para que interioricen la importancia de conocer los conceptos de *circunferencia* y *círculo* y sus propiedades, formúleles preguntas como las siguientes: *¿Cómo impactó el invento de la rueda a las sociedades? ¿Qué beneficios proporcionó la rueda a la agricultura y la ganadería? ¿Qué importancia tuvo la rueda en el surgimiento de los medios de transporte? ¿Cómo calificarían el invento de la rueda en relación a la importancia de la misma para nuestras sociedades?*

Actividad interactiva

Elementos de la circunferencia y el círculo I

Actividad interactiva de recuperación de experiencias, en la que identificarán los elementos de la circunferencia seleccionando, entre varias opciones, la respuesta correcta.

Actitudes y valores

Ciencia y tecnología

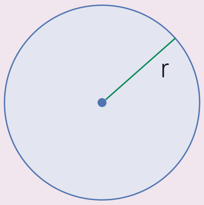
Aproveche la situación planteada en el apartado *Punto de partida* y en las imágenes de la ilustración para conversar con sus estudiantes acerca del papel del ingenio y el desarrollo alcanzado por las diversas civilizaciones. Pregunte al grupo: *¿Podrían dar algunos ejemplos en los que se manifieste el crecimiento en la tecnología?*

Indicadores de logro

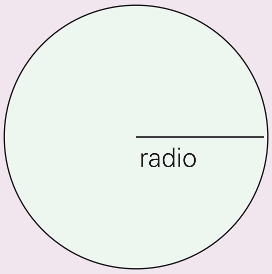
- **Identifica** los conceptos de *circunferencia* y *círculo* y **establece** la diferencia entre una y otro.
- **Identifica** las regiones interior y exterior de una circunferencia.

Más información

La circunferencia es una curva plana y cerrada en la que todos sus puntos están a igual distancia del centro.



El círculo es la figura plana comprendida en el interior de una circunferencia.



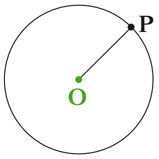
RECUPERACIÓN

Construye con un compás las circunferencias cuyos radios son …

- 5 cm.
- 6.5 cm.
- 8 cm.
- 9.8 cm.

1 Concepto de circunferencia

Una circunferencia, $\mathcal{C}$, es el lugar geométrico de los puntos, **P**, de un plano, que están a una distancia constante, **r**, de un punto dado, **O**.



$\mathcal{C} = \{\mathbf{P} | \mathbf{d}(\mathbf{P}, \mathbf{O}) = \mathbf{r}\}$

La distancia del punto **O**, llamado centro de la circunferencia, y un punto cualquiera **P** es el radio de la circunferencia.

La longitud de una circunferencia, $\mathcal{C}$, es una función lineal de su radio, **r**, y se obtiene con: $\mathcal{C} = 2\pi\mathbf{r}$.

EJEMPLO RESUELTO

- Obtener la cantidad de metros de alambre que se necesitan para cercar, con tres cuerdas, un jardín circular de 8 m de radio.

  La circunferencia del jardín es: $\mathcal{C} = 2\pi\mathbf{r} = 2\pi\,(8\text{ m}) = 50.265$ m.

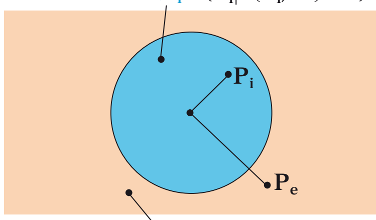
  Para cercar el jardín se usarán 3 x 50.265 m = 150.795 m de alambre.

2 Regiones interior y exterior de una circunferencia

La región interior de una circunferencia, $\mathcal{R}_i$, es el conjunto de puntos $\mathbf{P_i}$ del plano al que pertenece la circunferencia, cuya distancia a su centro es menor que su radio, $\mathbf{d}(\mathbf{P_i}, \mathbf{O}) < \mathbf{r}$.

La región exterior de una circunferencia, $\mathcal{R}_e$, es el conjunto de puntos $\mathbf{P_e}$ del plano al que pertenece la circunferencia, cuya distancia a su centro es mayor que su radio, $\mathbf{d}(\mathbf{P_e}, \mathbf{O}) > \mathbf{r}$.

$\mathcal{R}_i = \{\mathbf{P_i} | \mathbf{d}(\mathbf{P_i}, \mathbf{O}) < \mathbf{r}\}$



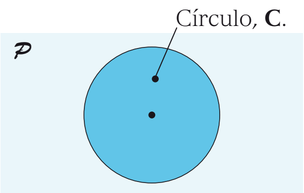
$\mathcal{R}_e = \{\mathbf{P_e} | \mathbf{d}(\mathbf{P_e}, \mathbf{O}) > \mathbf{r}\}$

Sugerencias didácticas

- **Inicio:** Oriente a sus estudiantes para que lean y realicen la actividad vinculada a la recuperación de experiencias previas propuesta en el apartado *Recuperación*, en la que construirán, con el compás, las circunferencias de radios especificados.
- **Desarrollo:** Pida a sus estudiantes que lean cuidadosamente el contenido de la doble página, que observen las representaciones gráficas y el desarrollo de los conceptos relacionados con la circunferencia y el círculo. Haga que reproduzcan en sus cuadernos el ejemplo resuelto en el que se aplica el cálculo de la longitud de la circunferencia en una situación de la cotidianidad.

3 Círculo

Un **círculo** **C** es el conjunto de puntos, **P**, del plano que pertenecen a la unión de una circunferencia, $\mathscr{C}$ y su región interior.



$\mathbf{C} = \{\mathbf{P} | \mathbf{P} \in \mathscr{C} \vee \mathbf{P} \in \mathscr{R}_i\}$

Cualquier punto, **P**, perteneciente a un círculo de radio **r**, cumple con: $\mathbf{d}(\mathbf{P}, \mathbf{O}) \leq \mathbf{r}$.

La circunferencia es el perímetro de un círculo.

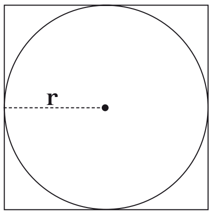
EJEMPLO RESUELTO

- Un artista prepara la maqueta de una instalación que proyecta para una exposición en el Museo de Arte Moderno. Trata de confeccionar con hilo una figura como la que se muestra a la derecha. ¿Qué porcentaje de la cantidad de hilo empleado en hacer el cuadrado empleará en hacer la circunferencia del interior?

  Los perímetros del cuadrado y del círculo interior son, respectivamente: $\mathbf{P} = 8\mathbf{r}$ y $\mathbf{C} = 2\pi\mathbf{r}$.

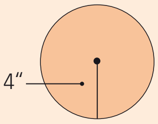
  El porcentaje se obtiene multiplicando la razón **C**/**P** por 100:

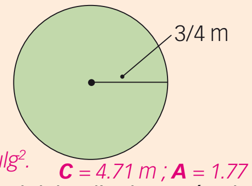
  $$(2\pi\mathbf{r}/8\mathbf{r}) \times 100 = 100\pi/4 = 78.54\%.$$

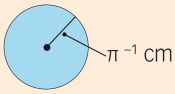


ACTIVIDADES

1 Obtén la longitud de cada una de las circunferencias siguientes.







C = 2 cm ; A = 0.32 cm².

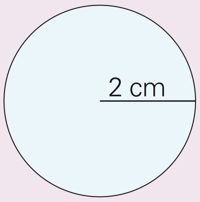
C = 25.13" ; A = 50.26 pulg². *C = 4.71 m ; A = 1.77 m²*.

2 Determina la longitud del radio de un círculo, cuya circunferencia mide 120 cm. *r = 19.1 cm.*

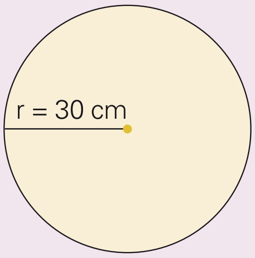
- **Desarrollo:** Muéstreles ejemplos de los conceptos y procedimientos desarrollados en la doble página. Pídales que desarrollen los ejemplos resueltos en sus cuadernos y diseñe otros más sobre el cálculo de la longitud de la circunferencia. Con relación al ejemplo resuelto de esta página, aclare a sus estudiantes que el diámetro de la circunferencia inscrita en un cuadrado es equivalente al lado del cuadrado y dicho diámetro es igual al doble de su radio, por lo tanto, cada lado del cuadrado es 2r y su perímetro 8r.
- **Cierre:** Motive a sus estudiantes a realizar los ejercicios del apartado *Actividades*. En la actividad 1, obtendrán la longitud de cada una de las circunferencias representadas. En la actividad 2, determinarán la longitud del radio de un círculo, cuya circunferencia mide 120 cm. Justificarán sus respuestas.

Atención a la diversidad

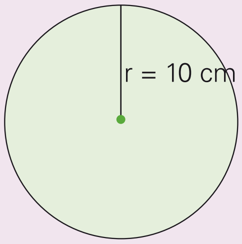
Actividades de refuerzo: Motive a sus estudiantes para que calculen la longitud de cada una de las siguientes circunferencias.



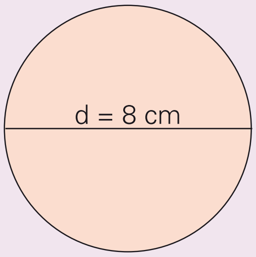
Longitud = (2)(3.1416)(2) = 12.57 cm.



Longitud = (2)(3.1416)(30) = 188.50 cm.



Longitud = (2)(3.1416)(10) = 62.83 cm.



Longitud = (2)(3.1416)(4) = 25.13 cm.

Ficha 22.

Aprender a aprender

Pregunte a sus estudiantes: *¿Qué conocimientos previos sobre la circunferencia y el círculo tenían antes de trabajar esta doble página? ¿Creen que esos conocimientos facilitaron el trabajo? ¿Por qué?*

Indicadores de logro

- **Identifica** diferentes posiciones relativas de una recta y una circunferencia.
- **Identifica** segmentos relativos a una circunferencia.

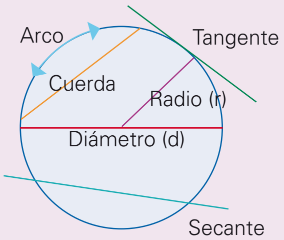
Actividad interactiva

Elementos de la circunferencia y el círculo II

Actividad interactiva en la que responderán preguntas de selección relacionadas con los elementos de la circunferencia, afirmando o negando cada expresión.

Más información

- La circunferencia es una curva plana y cerrada donde todos sus puntos están a igual distancia del centro.



- **Centro**: Punto interior a una distancia constante de todos los puntos de la circunferencia.
- **Radio**: Segmento que une cualquier punto de la circunferencia con su centro.
- **Diámetro**: Es el segmento que une dos puntos de la circunferencia que pasa por el centro de esta.
- **Cuerda**: Es un segmento que une dos puntos de la circunferencia. El diámetro es la cuerda de mayor longitud.
- **Recta secante**: Es la recta que corta a la circunferencia en dos puntos.
- **Recta tangente**: Es la recta que toca a la circunferencia en un solo punto.

RECUPERACIÓN

Completa.

- 40º = ... rad. *2π/9*
- 108º = ... rad. *3π/5*
- .... = 5/6 rad. *150º*
- .... = 2 rad. *114º 35′ 29.6″*

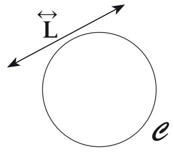
1 Posiciones relativas de una recta y una circunferencia

La circunferencia y la línea recta pueden ser interpretadas como conjuntos infinitos de puntos.

Dada una circunferencia, $\mathcal{C}$, cualquier recta, $\overleftrightarrow{L}$, que pertenezca al mismo plano que la circunferencia, es:

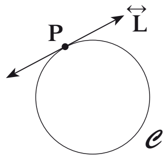
- Exterior a la circunferencia, si no tienen ningún punto en común:

$$C \cap \overleftrightarrow{L} = \varnothing$$



- Tangente a la circunferencia, si tienen un punto en común y sólo uno:

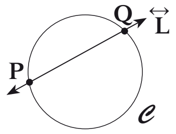
$$C \cap \overleftrightarrow{L} = \{P\}$$



P se llama punto de tangencia.

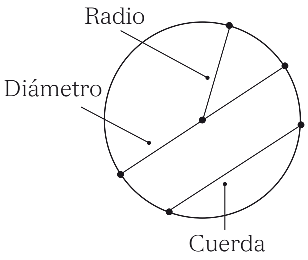
- Secante a la circunferencia si tienen dos puntos en común:

$$C \cap \overleftrightarrow{L} = \{P, Q\}$$



2 Segmentos en la circunferencia

Segmentos notables



En una circunferencia se destacan tres clases de segmentos: el radio, la cuerda y el diámetro.

Además de la distancia de **O** a **P** ∈ **C**, llamaremos radio de la circunferencia a cualquier segmento $\overline{OP}$.

Una cuerda de circunferencia es cualquier segmento que una dos puntos distintos, **P** y **Q**, de la circunferencia.

Un diámetro es la cuerda de mayor longitud que pueda ser trazada en una circunferencia.

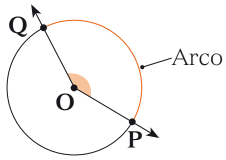
El punto medio del diámetro de una circunferencia es su centro **O** y su longitud es constante e igual a dos veces la longitud del radio.

Sugerencias didácticas

- **Inicio:** Oriente a sus estudiantes para que lean y realicen en el aula la actividad vinculada a recuperación de experiencias previas propuesta en el apartado *Recuperación*, en la que completarán medidas angulares expresadas en radianes.
- **Desarrollo:** Pida a sus estudiantes que lean cuidadosamente el contenido de la doble página y que observen las representaciones gráficas de las diferentes posiciones relativas de una recta y una circunferencia. Es necesario que lleven al aula su regla y su compás para que reproduzcan los gráficos correspondientes. Pídales que observen los segmentos notables de la circunferencia ubicada en el margen izquierdo de la página.

3 Arco de circunferencia. Longitud

Un arco de circunferencia es una parte de la circunferencia comprendida entre dos puntos distintos de la misma.



El arco $\overset{\frown}{PQ}$ es un subconjunto de la circunferencia de centro **O**, formado por sus puntos extremos, **P** y **Q**, y todos los puntos de la circunferencia que están en la región interior del ángulo **POQ**.

La longitud del arco $\measuredangle(\overset{\frown}{PQ})$ se obtiene multiplicando la medida en radianes del ángulo **POQ** por el radio, **r**, de la circunferencia:

$$\measuredangle(\overset{\frown}{PQ}) = m(< POQ)\ r$$

Si **m**(∢**POQ**) está dada en unidades del sistema sexagesimal, entonces la longitud de un arco de circunferencia se obtiene con:

$$\measuredangle(\overset{\frown}{PQ}) = \frac{m(< POQ)\ \pi r}{180^\circ}$$

El arco determinado por el ángulo **POQ** se denomina arco interceptado por dicho ángulo.

EJEMPLO:

- Determinar la longitud del arco interceptado por un ángulo de 60° en una circunferencia de radio 2.5 m.

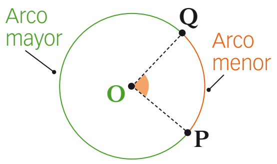
  Aquí: $\measuredangle = 60^\circ\ \pi r/180^\circ = \pi r/3 = 2.618$ m.

  Pudo usarse la otra fórmula con la medida de 60° equivalente a $\pi/3$ radianes.

SABER MÁS

Arcos menor y mayor

Dos puntos distintos de una circunferencia determinan dos arcos, uno de menor longitud, llamado arco menor y otro de mayor longitud, llamado arco mayor.



ACTIVIDADES

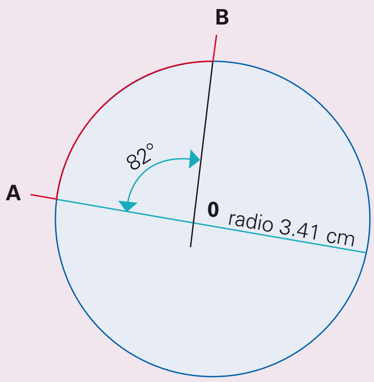
3 Obtén las longitudes de los arcos interceptados por los ángulos indicados en las circunferencias de radios dados, en centímetros.

- **m**(∢**POQ**) = $\pi/2$; **r** = 10. *∡ = 5π cm*
- **m**(∢**POQ**) = $\pi/5$; **r** = 4.3. *∡ = 0.86π cm*
- **m**(∢**POQ**) = $2\pi/3$; **r** = 12. *∡ = 8π cm*
- **m**(∢**POQ**) = 30°; **r** = 5.2. *∡ = 0.867π cm*
- **m**(∢**POQ**) = 135°; **r** = 8. *∡ = 6π cm*
- **m**(∢**POQ**) = 40° 15'; **r** = 18. *∡ = 4.025π cm*

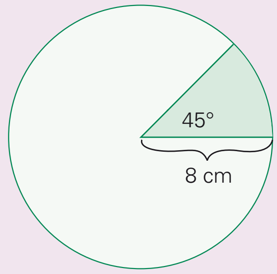
4 Determina la medida sexagesimal del ángulo que intercepta un arco de 12 cm de longitud en una circunferencia de 16 cm de diámetro. ***m** ∢(**POQ**) = 85° 56' 37"*

Atención a la diversidad

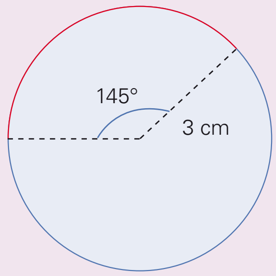
Actividades de refuerzo: Motive a sus estudiantes para que calculen la longitud del arco de las siguientes circunferencias.



Respuesta:
Longitud del arco **AB** = 4.88 cm.



Respuesta:
Longitud del arco **AB** = 6.28 cm.



Respuesta:
Longitud del arco **AB** = 7.59 cm.

Ficha 23.

- **Desarrollo:** Haga que sus estudiantes grafiquen en sus cuadernos las distintas posiciones relativas de una recta y una circunferencia. Diseñe ejercicios similares a los vistos en esta página a fin de que los resuelvan en sus cuadernos. Motíveles para que lean y reproduzcan en sus cuadernos el contenido del apartado *Saber más*, que muestra los conceptos de *arcos menor* y *mayor*.
- **Cierre:** Motive a sus estudiantes a realizar los ejercicios del apartado *Actividades*. En la actividad 3, obtendrán las longitudes de los arcos interceptados por los ángulos indicados en las circunferencias y los radios dados en centímetros. En la actividad 4, determinarán la medida sexagesimal del ángulo que intercepta un arco de 12 cm de longitud en una circunferencia de 16 cm de diámetro.

Aprender a aprender

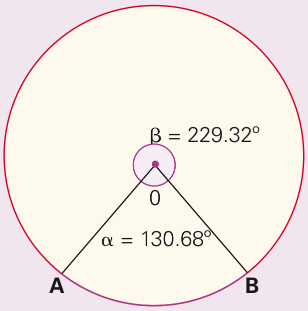
Pregunte a sus estudiantes: *¿Tuvieron alguna dificultad en el procedimiento para calcular la longitud del arco de la circunferencia? ¿En qué consistió el problema?*

Indicadores de logro

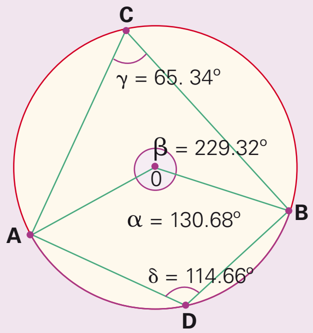
- **Identifica** los ángulos en una circunferencia y **los determina**.

Más información

Comente al grupo que dos puntos, **A** y **B**, sobre una circunferencia determinan dos arcos y, en consecuencia, dos ángulos centrales, en este caso: uno cóncavo (α = 130.68°) y uno convexo (β = 229.32°) y ambos suman 360°.



Los ángulos inscritos γ = 65. 34° y δ = 114.66 en la siguiente figura son suplementarios, pues suman 180°.



RECUPERACIÓN

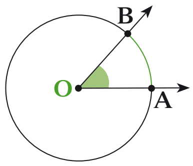
Efectúa las operaciones.

- 32° 45′ 12″ + 15° 36′
  48° 21′ 12″
- 19° 26′ 32″ – 5° 45′ 41″
  13° 40′ 51″
- 3 x (15° 18′ 12″)
  45° 54′ 36″
- (105° 15′ 36″) ÷ 2
  52° 37′ 48″
- (40° + 65°) ÷ 3
  35°

1 Ángulos central, inscrito y semiinscrito

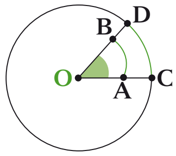
Un ángulo central está constituido por dos rayos con un origen común en el centro, **O**, de una circunferencia.

El ∢**AOB** de vértice **O** es un ángulo central.



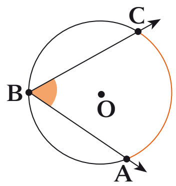
Un arco interceptado admite una medida angular igual a la del ángulo central que lo determina. Arcos de longitudes distintas podrían tener la misma medida angular.

$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$ = **m** ∢**AOB**



Un ángulo inscrito tiene su vértice en un punto de la circunferencia y sus rayos cortan a la circunferencia en dos puntos.

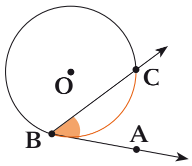
∢**ABC** es un ángulo inscrito.



La medida de un ángulo inscrito es la mitad de la medida angular de su arco interceptado: **m** ∢**ABC** = $\overset{\frown}{AC}$/2

Un ángulo semiinscrito tiene su vértice en la circunferencia y solo uno de sus rayos corta a la circunferencia en un punto distinto al vértice.

∢**ABC** es un ángulo semiinscrito.

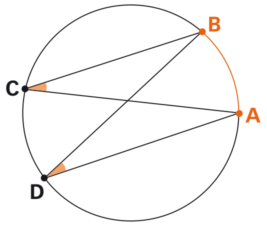


Su medida también es la mitad de la medida angular de su arco interceptado: **m** ∢**ABC** = $\overset{\frown}{BC}$/2

SABER MÁS

Ángulos inscritos congruentes

Dos ángulos inscritos son congruentes si tienen el mismo arco interceptado.



∢**ACB** ≅ ∢**ADB**

Sugerencias didácticas

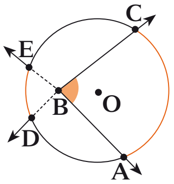
- **Inicio:** Oriente a sus estudiantes para que resuelvan en el aula la actividad de recuperación de experiencias previas propuesta en el apartado *Recuperación*, en la que efectuarán diversas operaciones con ángulos.
- **Desarrollo:** Haga que lean cuidadosamente el contenido de la doble página, que observen las representaciones gráficas y el desarrollo de los conceptos. Motíveles para que lean y reproduzcan en sus cuadernos el contenido del apartado *Saber más*, que trata sobre los ángulos inscritos congruentes.

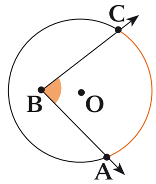
2 Ángulos interior y exterior

Un ángulo interior tiene su vértice en un punto interior de la circunferencia.

La medida de un ángulo interior es la mitad de la suma de las medidas angulares de los arcos interceptados por el ángulo y su opuesto por el vértice:

$m\measuredangle ABC = (\overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{DE})/2$

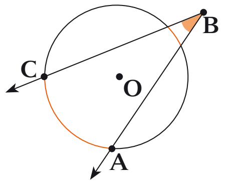




El $\measuredangle$**ABC** es un ángulo interior de vértice **B**.

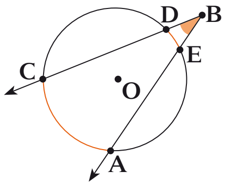
Un ángulo exterior tiene su vértice en un punto exterior a la circunferencia.

El $\measuredangle$**ABC** es un ángulo exterior.



La medida de un ángulo exterior es la mitad de la diferencia de las medidas angulares de los arcos interceptados por sus rayos:

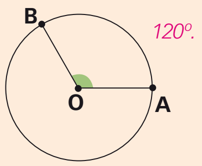
$m\measuredangle ABC = (\overset{\frown}{AC} - \overset{\frown}{DE})/2$



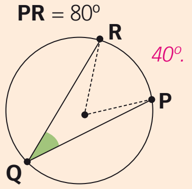
ACTIVIDADES

5 Determina las medidas de los ángulos siguientes, dadas las de sus arcos interceptados.

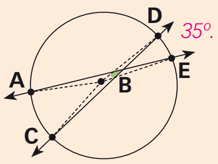
$\overset{\frown}{AB} = 120°$



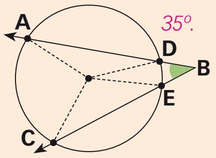
$\overset{\frown}{PR} = 80°$



$\overset{\frown}{AC} = 40°$; $\overset{\frown}{DE} = 30°$



$\overset{\frown}{AC} = 90°$; $\overset{\frown}{DE} = 20°$



6 Responde la pregunta.

- ¿Un ángulo central es un ángulo interior? ¿Por qué?

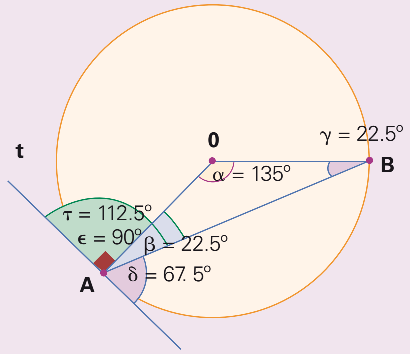
  Sí. De acuerdo a la definición su vértice está en el interior de la circunferencia.

Más inforamción

Un ángulo semiinscrito tiene el vértice **A** en la circunferencia, siendo sus lados la recta **t** tangente en **A** y la cuerda **AB**.

La tangente, que es perpendicular al radio, es lado de dos ángulos semiinscritos formando arcos distintos.

El ángulo semiinscrito δ = 67. 5° que es la mitad del ángulo del central α = 135° que forma el arco **AB**.



Actividad grupal

Forme varias agrupaciones de estudiantes con su regla y el compás a la mano y, luego, pídales que construyan en hojas blancas, circunferencias con ángulos central, inscrito, semiinscrito, inscritos congruentes, interior y exterior.

Ficha 24.

- **Desarrollo:** Pida a sus estudiantes que reproduzcan en sus cuadernos las circunferencias y sus respectivos ángulos desarrollados en esta doble página. Muéstreles el ejemplo resuelto para que observen cómo determinar la medida de ángulos y diseñe otros más para trabajarlos en el cuaderno y la pizarra.
- **Cierre:** Motive a sus estudiantes a realizar los ejercicios del apartado *Actividades*. En la actividad 4, determinarán las medidas de los ángulos representados, dadas las medidas de sus arcos interceptados. En la actividad 5, expresarán cómo probarían que un ángulo central es un ángulo interior.

Aprender a aprender

Pregunte al grupo: *¿Les parecieron importantes los conceptos estudiados en esta oportunidad? ¿Qué utilidad para la cotidianidad tienen estos conceptos?*

Indicadores de logro

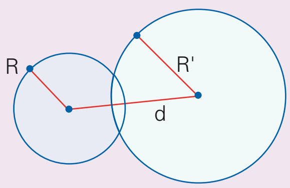
- **Identifica** las distintas posiciones relativas de dos circunferencias dadas.

Más información

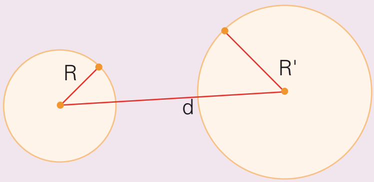
Comente a sus estudiantes que las posiciones relativas entre dos circunferencias vienen determinadas por la distancia entre sus centros y la longitud de sus radios R y R'.

Por ejemplo:

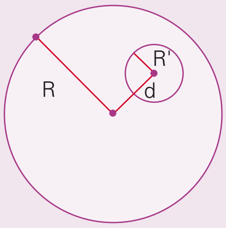
Circunferencias secantes



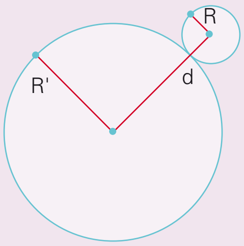
Circunferencias exteriores



Circunferencias interiores



Circunferencias tangentes exteriores



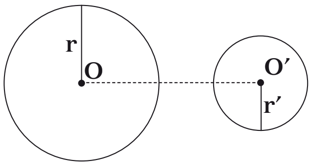
RECUPERACIÓN

Responde la pregunta: ¿En cuántos puntos como máximo se pueden cortar dos circunferencias?

1 Circunferencias interior y exterior

Una circunferencia es exterior respecto a otra, si no tiene puntos comunes con esa otra y está situada en su región exterior.

Las circunferencias de centro **O** y radio **r** y de centro **O′** y radio **r′**, son exteriores una respecto a la otra.

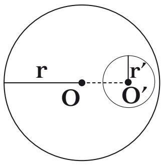


Para dos circunferencias exteriores una en relación con la otra, como las anteriores, se cumple que:

$$\mathbf{d(O, O') > r + r'}$$

Una circunferencia es interior respecto a otra, si no tiene puntos comunes con esa otra y está situada en su región interior.

La circunferencia de centro **O** y radio **r** es interior en relación con la circunferencia de centro **O′** y radio **r′**.

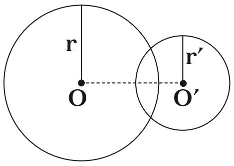


En este caso se cumple: $0 < \mathbf{d(O, O') < r - r'}$.

2 Circunferencias secantes

Dos circunferencias son secantes si dos puntos cualesquiera de ellas son comunes.

Las siguientes circunferencias de centro **O** y radio **r** y de centro **O′** y radio **r′**, son secantes.



Para estas circunferencias: $\mathbf{r - r' < d(O, O') < r + r'}$.

Sugerencias didácticas

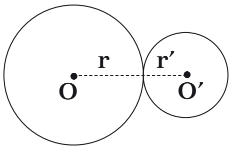
- **Inicio:** Oriente a sus estudiantes para que lean y resuelvan en el aula la situación vinculada a la recuperación de experiencias previas planteada en el apartado *Recuperación*, en la que explicarán por qué bastan solo dos ángulos congruentes, en dos triángulos, para que estos sean semejantes.
- **Desarrollo:** Pídales que lean el contenido de la doble página, que observen las representaciones gráficas y los pasos para construir triángulos semejantes y congruentes. Haga que realicen las construcciones en sus cuadernos o en hojas blancas utilizando la regla y el compás.

3 Circunferencias tangentes

Dos circunferencias son tangentes si tienen solo un punto en común.

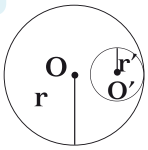
Una circunferencia puede ser o tangente exterior, o tangente interior a otra circunferencia.

La circunferencia de centro **O′** y radio **r′** es tangente exterior a la circunferencia de centro **O** y radio **r**.



Para estas circunferencias: $\mathbf{d(O, O') = r + r'}$

La circunferencia de centro **O′** y radio **r′** es tangente interior a la circunferencia de centro **O** y radio **r**.

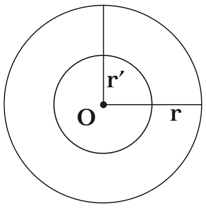


En este caso se cumple que: $\mathbf{d(O, O') = r - r'}$

4 Circunferencias concéntricas

Dos circunferencias son concéntricas si tienen solo un centro común.

Las siguientes circunferencias son concéntricas.

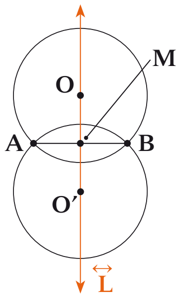


Para las circunferencias concéntricas: $\mathbf{d(O, O') = 0}$.

SABER MÁS

Propiedad de la recta que une los centros de dos circunferencias secantes

La línea recta $\overleftrightarrow{L}$ que pasa por los centros **O** y **O′** de dos circunferencias secantes es la mediatriz de la cuerda **AB**.



En la figura se muestra que $\overleftrightarrow{L}$ es la recta perpendicular que pasa por el punto medio de **AB**: **AM** = **MB.**

ACTIVIDADES

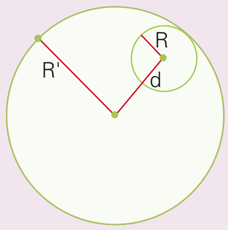
7 Construye en una hoja suelta de papel y, luego, haz lo que se te pide.

- Dos circunferencias exteriores de radios 4 cm y 5 cm y centros separados por una distancia de 12 cm.
- Una circunferencia de 8 cm de radio y otra interior de 2 cm radio y cuyos centros están separados por una distancia de 2 cm.

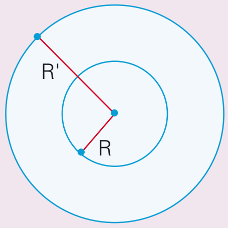
8 Comprueba las relación de la distancia de los centros y los radios en ambos casos.

Más información

Circunferencias tangentes interiores



Circunferencias concéntricas



Atención a la diversidad

Actividades de refuerzo: Motive al grupo para que construyan en hojas blancas, usando la regla y el compás y siguiendo los pasos correspondientes, las diversas posiciones relativas de la circunferencia desarrolladas en la doble página.

Ficha 25.

- **Desarrollo:** Haga que sus estudiantes, utilizando la regla y el compás, construyan las diversas posiciones relativas de la circunferencia desarrolladas en esta doble página. Propóngales que lean y comenten en el grupo el contenido del apartado *Saber más*, que trata sobre la propiedad de la recta que une los centros de dos circunferencias secantes.
- **Cierre:** Motive a sus estudiantes a realizar los ejercicios propuestos en el apartado *Actividades*. En la actividad 6, construirán en una hoja suelta de papel, las posiciones relativas de las circunferencias que se especifican en cada caso. En la actividad 7, comprobarán las relaciones de la distancia de los centros y los radios en ambos casos. Acompáñeles en la realización de estas actividades.

Aprender a aprender

Pregunte al grupo: *¿Creen que los conocimientos previos hicieron más fácil el trabajo en esta oportunidad? ¿Por qué?*

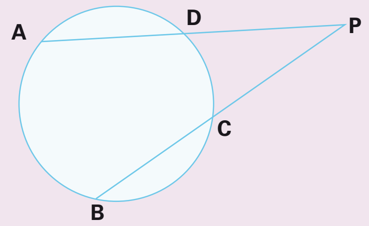
Indicadores de logro

- **Conoce** y **demuestra** algunos teoremas fundamentales de la circunferencia.

Otras actividades

Teorema de las secantes

PA y **PB** son dos rectas secantes.

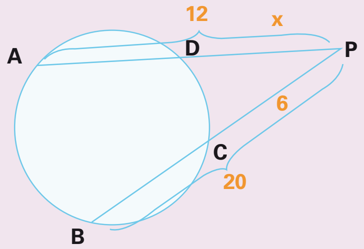


$\overline{PA}.\ \overline{PD} = \overline{PB}\ .\ \overline{PC}$

Ejemplo:

PA = 12 **PB** = 20 **PC** = 6

¿Cuál es el valor de PD?



PA . **PD** = **PB**. **PC**

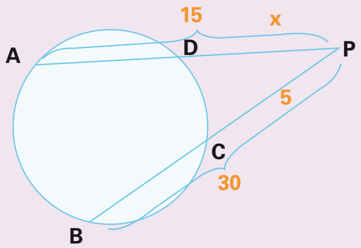
(12)(**x**) = (20)(6)

x = 120 ÷ 12

PD = 10.

- Pídales que calculen el valor de **PD**.

PA = 15 **PB** = 30 **PC** = 5



PA . **PD** = **PB**. **PC**

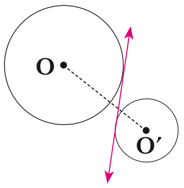
(15)(**x**) = (30)(5)

x = 150 ÷ 15

PD = 10.

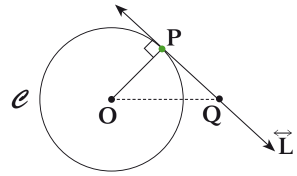
RECUPERACIÓN

Reproduce las siguientes circunferencias y traza una tangente común a ambas, que corte al segmento que une a los centros, **OO'**.



1 Teorema del radio y la tangente

Este teorema muestra que: *Si una recta tiene en común con el radio el punto que pertenece a la circunferencia y es, además, perpendicular a dicho radio, dicha recta es tangente a la circunferencia.*



Hipótesis: $\overleftrightarrow{L}$ es una recta perpendicular al radio **OP**, que pasa por el extremo **P** perteneciente a la circunferencia $\mathcal{C}$.

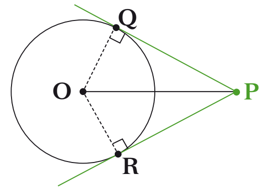
Tesis: $\overleftrightarrow{L}$ es tangente a $\mathcal{C}$ en el punto **P**.

Demostración: Sea **Q** un punto de $\overleftrightarrow{L}$, distinto de **P**. $\overline{OQ}$ será tal que $\overline{OQ} > \overline{OP}$, porque la perpendicular es el menor segmento que puede trazarse entre una recta y un punto exterior a ella.

El punto **Q** no pertenece a $\mathcal{C}$ y **P** es el único punto común que tienen la recta $\overleftrightarrow{L}$ y $\mathcal{C}$. Luego, por definición, $\overleftrightarrow{L}$ es tangente a $\mathcal{C}$ en **P**.

2 Teorema de las tangentes

Este teorema reza que: *Si por un punto exterior a una circunferencia se trazan dos tangentes, los segmentos tangentes que van del punto exterior a los puntos de intersección son congruentes.*



Hipótesis: $\mathcal{C}$ es una circunferencia de centro **O** y **P**, un punto exterior.

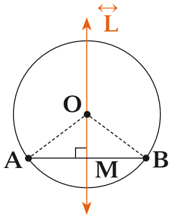
Tesis: $\overline{PQ} \cong \overline{PR}$.

Demostración: $\overline{OQ} \cong \overline{OR}$, por ser radios de la circunferencia $\mathcal{C}$ y $\overline{OP} \cong \overline{OP}$. De acuerdo con el teorema anterior, ∢**PQO** y ∢**PRO** son ángulos rectos y, por tanto, congruentes. De acuerdo al criterio **LAL,** los triángulos rectángulos **PQO** y **PRO** son congruentes y $\overline{PQ} \cong \overline{PR}$.

SABER MÁS

Mediatriz de una cuerda

La línea recta $\overleftrightarrow{L}$ que pasa por el centro **O** de una circunferencia y es perpendicular a una cuerda, es mediatriz de la cuerda.

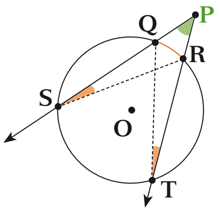


Sugerencias didácticas

- **Inicio:** Oriente a sus estudiantes para que lean y resuelvan en el aula la actividad vinculada a la recuperación de experiencias previas propuesta en el apartado *Recuperación*, en la que reproducirán las circunferencias representadas y, luego, trazarán la tangente con las especificaciones indicadas.
- **Desarrollo:** Pídales que lean el contenido de la doble página, que observen las representaciones gráficas y el desarrollo de los ejemplos resueltos. Haga que reproduzcan los ejemplos resueltos y los diversos gráficos en sus cuadernos. Pídales que lean y comenten en el grupo el contenido del apartado *Saber más*, que trata sobre la mediatriz de una cuerda.

3 Teorema de las secantes

El teorema dice que: *Si* **L** *y* **M** *son secantes a una circunferencia,* $\mathcal{C}$*, que pasan por un punto exterior* **P***, el producto de los dos segmentos que unen a* **P** *con los puntos de intersección con* $\mathcal{C}$ *es el mismo para ambas secantes.*



Hipótesis: $\mathcal{C}$ es una circunferencia de centro **O** y **P**, un punto exterior. Las rectas $\overleftrightarrow{L}$ y $\overleftrightarrow{M}$ son secantes a la circunferencia que pasan por **P**.

Tesis: $\overline{PQ}\,.\,\overline{PS} = \overline{PR}\,.\,\overline{PT}$.

Demostración: Los triángulos **PSR** y **PTQ**, tienen dos de sus ángulos congruentes, el $\measuredangle$**TPS**, común a ambos triángulos y los ángulos **QSR** y **RTQ**, que interceptan el mismo arco $\overset{\frown}{QR}$.

A partir del criterio de semejanza **AA** (derivado del criterio AAA), se infiere que los triángulos **PSR** y **PTQ** son semejantes.

Puesto que los triángulos **PSR** y **PTQ** son semejantes:

$$\frac{\overline{PS}}{\overline{PT}} = \frac{\overline{PS}}{\overline{PT}}$$

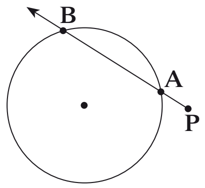
De la proporción anterior se obtiene: $\overline{PQ}\,.\,\overline{PS} = \overline{PR}\,.\,\overline{PT}$.

Los producto a ambos lados de la igualdad anterior definen una magnitud llamada potencia, $\mathcal{P}$, del punto **P** en relación con la circunferencia $\mathcal{C}$.

La potencia de **P** respecto a $\mathcal{C}$ es constante, independientemente de la secante trazada.

EJEMPLO RESUELTO:

- Obtener la potencia del punto **P** si el segmento $\overline{PA}$ mide 1.5 unidades y la cuerda $\overline{AB}$, 3.2 unidades.



$\overline{PA} = 1.5$

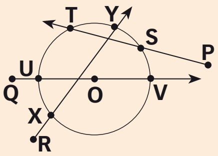
$\overline{PB} = \overline{PA} + \overline{AB} = 4.7$

$\mathcal{P} = (1.5)(4.7) = 7.05$

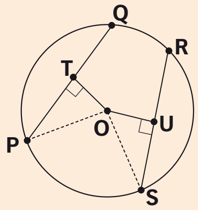
ACTIVIDADES

9 Determina la potencia de los puntos **P**, **Q** y **R**.

- $\overline{PS} = 3.2$; $\overline{ST} = 2.5$
  $\mathcal{P}$ = 18.24
- $\overline{QU} = 3.0$; $\overline{QV} = 6.3$
  $\mathcal{P}$ = 18.90
- $\overline{RX} = 1.4$; $\overline{RY} = 4.3$
  $\mathcal{P}$ = 6.02



10 Observa la figura de la derecha y, luego, prueba que dos cuerdas iguales de una circunferencia están a igual distancia de su centro.
Debe probarse que los triángulos rectángulos ***PTO*** *y* ***SUO*** *son congruentes.*

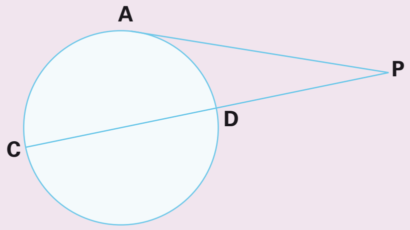


Atención a la diversidad

Actividades de ampliación:

Teorema de la tangente y la secante

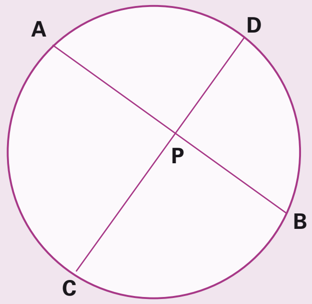
PA es una recta tangente a la circunferencia y **PC** una secante a la misma, entonces, el cuadrado de la longitud de **PA** es equivalente al producto de **PC** por **PD**.



$(\overline{PA})^2 = \overline{PC}\,.\,\overline{PD}$

Teorema de las cuerdas

AB y **DC** son dos cuerdas de la circunferencia que se cortan en el punto **P**, entonces, el producto de **AP** por **PB** es equivalente al producto de **CP** por **PD**.



$\overline{AP}\,.\,\overline{PB} = \overline{CP}\,.\,\overline{PD}$

Motíveles a aplicar estos teoremas diseñando ejemplos similares a los de la página 82. Haga que grafiquen las circunferencias con las longitudes de las rectas correspondientes y, finalmente, apliquen los teoremas.

Ficha 26.

- **Desarrollo:** Haga que sus estudiantes comprueben los teoremas relativos a la circunferencia y determinen la potencia de puntos como fueron trabajados en esta doble página. Diseñe ejercicios similares para que los resuelvan en el cuaderno y en la pizarra. Motíveles para que lean y reproduzcan en sus cuadernos el ejemplo resuelto en el margen derecho de la página 83.
- **Cierre:** Motive a sus estudiantes a realizar los ejercicios propuestos en el apartado *Actividades*. En la actividad 8, determinarán la potencia de los puntos **P**, **Q** y **R** identificados en la circunferencia representada. En la actividad 9, observarán la figura en la derecha de la página y, luego, probarán que dos cuerdas iguales de una circunferencia están a igual distancia de su centro.

Aprender a aprender

Pregunte al grupo: *¿Hubo alguna actividad en la que tuvieron alguna dificultad? ¿En qué consistió el problema?*

Indicador de logro

- **Identifica** los polígonos inscritos y circunscritos en una circunferencia

Actividad interactiva

Polígonos regulares

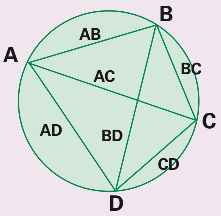
En esta interesante actividad interactiva, con ayuda del deslizador, podrán elegir el número de lados del polígono inscrito en la circunferencia. En cada caso, observarán cómo se acerca el área del polígono a la del círculo según aumentan los lados de este último.

Competencias fundamentales

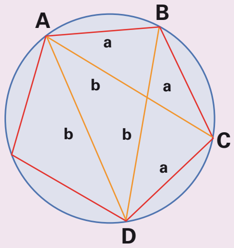
Competencia comunicativa

Un cuadrilátero es cíclico:

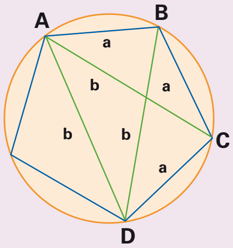
- Si sus cuatro vértices están sobre la misma circunferencia.



- Si sus diagonales forman ángulos opuestos que son suplementarios.

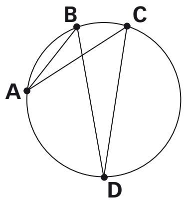


- Si sus lados opuestos y sus diagonales forman ángulos iguales.



RECUPERACIÓN

Observa la figura y, luego, responde.

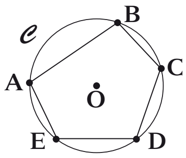


- ¿Son semejantes los triángulos **ABE** y **DCE**? *Sí, lo son.*
- Justifica tu respuesta. *Por el criterio AAA.*

1 Polígonos inscritos y circunscritos

Los vértices de un polígono inscrito son puntos de una circunferencia y sus lados son segmentos secantes.

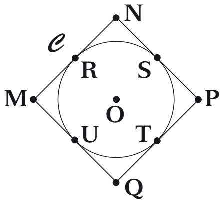
Los vértices del siguiente pentágono inscrito son los puntos **A**, **B**, **C**, **D** y **E** y sus lados los segmentos secantes $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$ y $\overline{ED}$.



$\{A, B, C, D, E\} \subset \mathcal{C}$

Los lados de un polígono circunscrito son segmentos tangentes a una circunferencia.

Los lados del cuadrilátero circunscrito siguiente son los segmentos **MN**, **NP**, **PQ** y **QM** tangentes a la circunferencia.

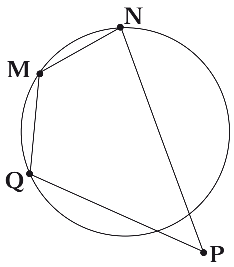


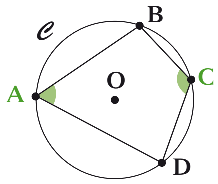
$\{R, S, T, U\} \subset \mathcal{C}$

No todo polígono puede ser inscrito o circunscrito en una circunferencia. Los polígonos que lo admiten se llaman inscriptibles y circunscriptibles, respectivamente.

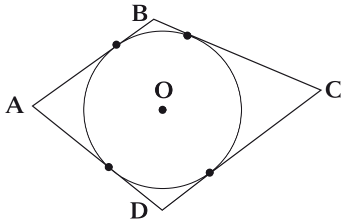
Un cuadrilátero es inscriptible, o cíclico, solo si sus pares de ángulos opuestos son suplementarios y circunscriptibles, solo si la suma de dos de sus lados opuestos es igual a la suma de sus otros dos lados opuestos.

Cuadrilátero no inscriptible





$A + C = B + D = 180°$



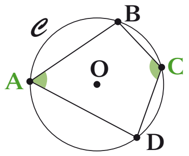
$\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{BC} + \overline{AD}$

Sugerencias didácticas

- **Inicio:** Oriente a sus estudiantes para que lean y resuelvan en el aula la actividad vinculada a la recuperación de experiencias previas propuesta en el apartado *Recuperación*, en la que observarán la circunferencia y, luego, responderán las preguntas.
- **Desarrollo:** Pídales que lean el contenido de la doble página, que observen las repre e reproduzcan los gráficos y sus conceptos correspondientes en sus cuadernos. Pídales que observen el cuadrilátero no inscriptible o no cíclico ubicado en el margen izquierdo de esta página y, luego, motíveles para que expresen por qué tiene esta característica.

2 Demostración del teorema de la suma de los ángulos opuestos de un cuadrilátero cíclico

El teorema dice que: *Los ángulos opuestos de un cuadrilátero cíclico son suplementarios.*



Hipótesis: $\measuredangle$**A** y $\measuredangle$**C** son ángulos opuestos de un cuadrilátero cíclico en una circunferencia $\mathscr{C}$ de centro **O**.

Tesis: $\mathbf{m}\ \measuredangle \mathbf{A} + \mathbf{m}\ \measuredangle \mathbf{C} = 180^\circ$.

Demostración:

Puesto que $\mathbf{m}\ \measuredangle \mathbf{A} = \overset{\frown}{\mathbf{BCD}}/2$ y $\mathbf{m}\ \measuredangle \mathbf{C} = \overset{\frown}{\mathbf{BAD}}/2$, entonces:

$$\overset{\frown}{\mathbf{BCD}} = 2\mathbf{m}\ \measuredangle \mathbf{A}\ ;\ \overset{\frown}{\mathbf{BAD}} = 2\mathbf{m}\ \measuredangle \mathbf{C}$$

Como los arcos $\overset{\frown}{\mathbf{BCD}}$ y $\overset{\frown}{\mathbf{BAD}}$ completan una circunferencia, cuya medida angular es 360º:

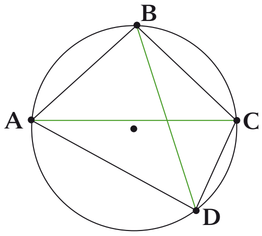
$$\overset{\frown}{\mathbf{BCD}} + \overset{\frown}{\mathbf{BAD}} = 2\mathbf{m}\ \measuredangle \mathbf{A} + 2\mathbf{m}\ \measuredangle \mathbf{C} = 2(\mathbf{m}\ \measuredangle \mathbf{A} + \mathbf{m}\ \measuredangle \mathbf{C}) = 360^\circ$$

$$\mathbf{m}\ \measuredangle \mathbf{A} + \mathbf{m}\ \measuredangle \mathbf{C} = 360^\circ/2 \longrightarrow \mathbf{m}\ \measuredangle \mathbf{A} + \mathbf{m}\ \measuredangle \mathbf{C} = 180^\circ$$

3 Teorema de Ptolomeo

La suma de los productos de los lados opuestos de un cuadrilátero cíclico es equivalente al producto de sus diagonales.

La afirmación anterior es el teorema de Ptolomeo.



$$\overline{AB}.\overline{CD} + \overline{BC}.\overline{AD} = \overline{AC}.\overline{BD}$$

SABER MÁS

Longitud de una diagonal de un polígono cíclico

Si se conocen las longitudes de los lados de un polígono cíclico y la de una de sus diagonales, la longitud desconocida de la otra diagonal se obtiene dividiendo la suma de los productos de los lados opuestos por la longitud de la diagonal conocida.

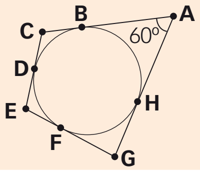
De acuerdo a lo anterior, la longitud de la diagonal **AC** es:

$$\overline{AC} = \frac{\overline{AB}.\overline{CD} + \overline{BC}.\overline{AD}}{\overline{BD}}$$

ACTIVIDADES

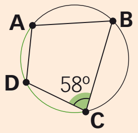
11 Observa las figuras y, luego, determina lo que se te pide en cada caso.

- La medida angular de los arcos $\overset{\frown}{\mathbf{BH}}$ y $\overset{\frown}{\mathbf{BDH}}$.



$\overset{\frown}{BH}$ = 120º; $\overset{\frown}{BDH}$ = 240º

- La medida de los ángulos **A**, **B** y **D**, si $\mathbf{m}\ \measuredangle \mathbf{C} = 58^\circ$ y $\overset{\frown}{\mathbf{ADC}} = 160^\circ$.



m $\measuredangle$A = 122º; m $\measuredangle$B = 80º; m $\measuredangle$D = 100º

- **Desarrollo:** Motíveles para que grafiquen en sus cuadernos polígonos inscritos y circunscritos a la circunferencia. Haga que determinen medidas angulares de arcos y ángulos similares a las de las actividades realizadas en esta doble página. Pídales que lean y comenten en el grupo el contenido del apartado *Saber más*, que trata sobre la longitud de una diagonal de un polígono cíclico.
- **Cierre:** Motive a sus estudiantes a realizar los ejercicios propuestos en el apartado *Actividades*. En la actividad 10, observarán las figuras y, luego, determinarán las medidas angulares de los arcos y de los ángulos que se les especifican.

Más información

Comente a sus estudiantes que el teorema de *Ptolomeo* es una relación en geometría euclidiana entre los cuatro lados y las dos diagonales de un cuadrilátero cíclico o inscriptible.

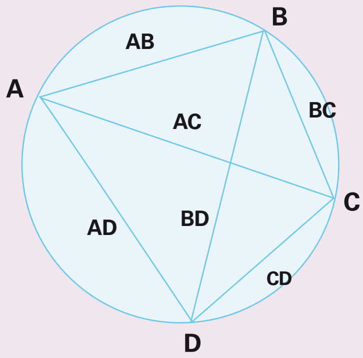
El teorema recibe su nombre de su autor, el astrónomo y matemático griego *Claudio Ptolomeo*.

Si un cuadrilátero está dado por sus cuatro vértices **A**, **B**, **C**, **D**, este teorema expresa que:

A C . B D = A B . C D + B C . A D

Esta relación puede ser enunciada de la siguiente forma:

En todo cuadrilátero inscriptible o cíclico en una circunferencia, la suma de los productos de los pares de lados opuestos es igual al producto de sus diagonales.



Ficha 27.

Aprender a aprender

Pregunte al grupo: *¿Creen que los conocimientos previos hicieron más fácil el trabajo con la circunferencia? ¿Por qué?*

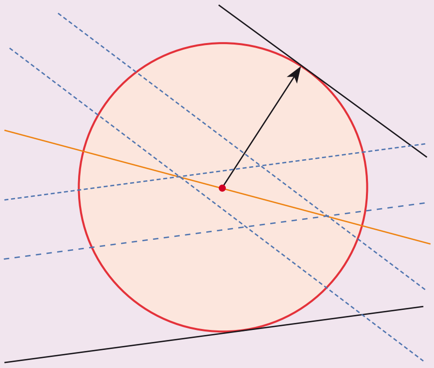
Indicadores de logro

- **Realiza** construcciones diversas sobre la circunferencia usando la regla y el compás.

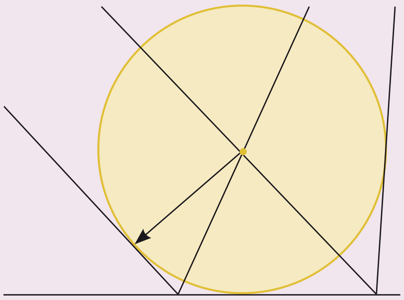
Competencias fundamentales

Competencia comunicativa

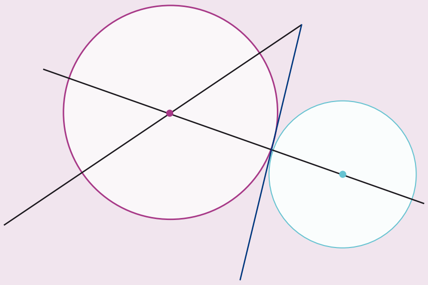
Circunferencia tangente a dos rectas



Circunferencia tangente a tres rectas

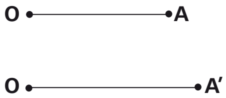


Circunferencia tangente a otra en un punto y una recta



RECUPERACIÓN

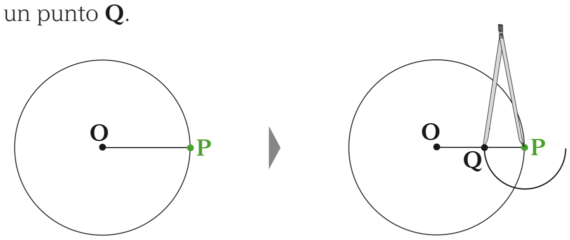
Construye circunferencias concéntricas cuyos radios sean los segmentos $\overline{OA}$ y $\overline{OA'}$ siguientes.



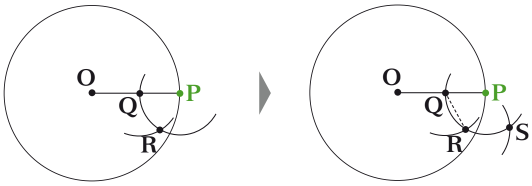
1 Construcción de una recta tangente que pasa por un punto de la circunferencia

Para construir la recta tangente que pasa por un punto **P** (punto de tangencia) de una circunferencia, se emplea el procedimiento descrito a continuación.

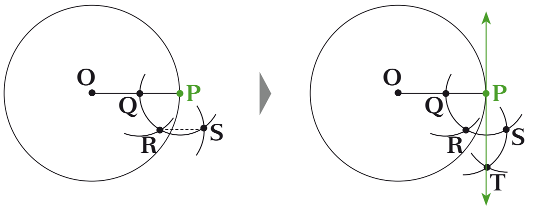
1.º Se abre el compás y apoyando su punta metálica en el punto de tangencia **P**, se traza un arco que corte al radio **OP** en un punto **Q**.

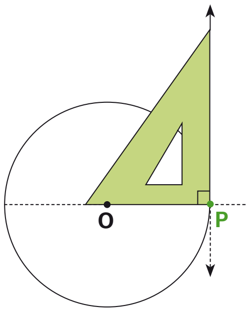


2.º Con la misma abertura del compás y apoyándolo en **Q**, se traza otro arco que corte al anterior en **R**. Luego, se abre el compás con abertura **QR** y apoyándolo en **R**, se traza otro arco que corte al primero en el punto **S**.



3.º Tomando $\overline{\mathbf{RS}}$ como abertura del compás y apoyando su punta metálica en **S** se traza otro arco que corta al último trazado en el paso anterior en el punto **T**. La recta que une los puntos **T** y **P** es la tangente que buscaba construirse.





Otro procedimiento para trazar la tangente que pasa por un punto dado de una circunferencia utiliza una escuadra o un cartabón, como se muestra en la figura del margen izquierdo.

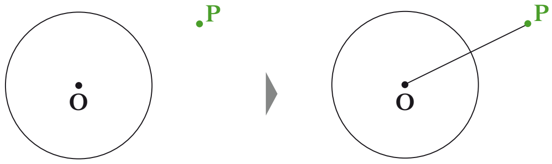
Sugerencias didácticas

- **Inicio:** Oriente a sus estudiantes para que lean y resuelvan en el aula la actividad vinculada a la recuperación de experiencias previas propuesta en el apartado *Recuperación*, en la que construirán circunferencias concéntricas cuyos radios sean los segmentos representados.
- **Desarrollo:** Pídales que lean el contenido de la doble página, que observen las representaciones gráficas y el desarrollo de los procedimientos para realizar las construcciones de las circunferencias y sus tangentes. Haga que reproduzcan las construcciones en sus cuadernos.

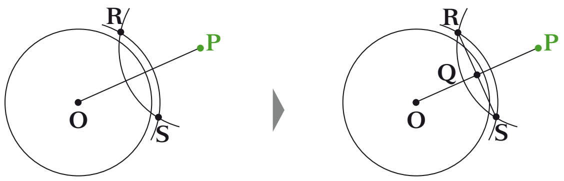
2 Construcción de las rectas tangentes que pasan por un punto exterior a una circunferencia

Desde un punto exterior a una circunferencia pueden trazarse dos tangentes distintas. El procedimiento para construirlas se muestra a continuación.

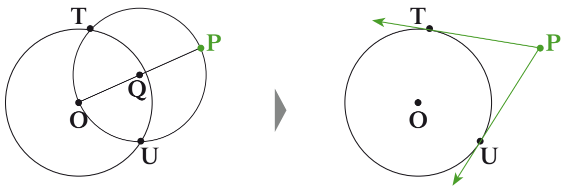
1.° Desde el centro **O** de la circunferencia se traza un segmento hasta el punto exterior **P**.



2.° Con una abertura del compás mayor que la mitad de **OP** y apoyando, sin cambiar la abertura, la punta metálica en **O** y luego en **P**, se trazan dos arcos que se cortarán en los puntos **R** y **S**. Se traza un segmento $\overline{\mathbf{RS}}$, que determina el punto medio, **Q** de $\overline{\mathbf{OP}}$.



3.° Con una abertura del compás igual a $\overline{\mathbf{OQ}} = \overline{\mathbf{QP}}$ y con centro en **Q**, se traza una circunferencia que pasará por **O** y **P**. Esta circunferencia cortará a la circunferencia original en dos puntos, **T** y **U**. Las rectas $\overleftrightarrow{\mathbf{TP}}$ y $\overleftrightarrow{\mathbf{UP}}$ son las tangentes buscadas.



INTELIGENCIA COLABORATIVA

Construcción de tangentes a dos circunferencias.

- Investiguen cómo se trazan tangentes a dos circunferencias exteriores de radios distintos.
- Luego, trácenlas sobre una cartulina y socialicen sus resultados en el aula.

ACTIVIDADES

12 Haz lo que se te pide.

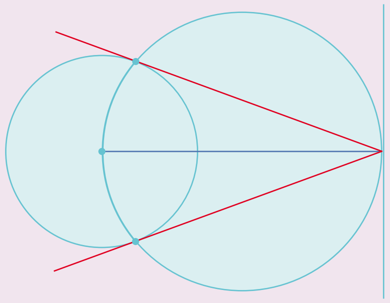
- Traza las tangentes que pasan por dos puntos de una circunferencia de radio 5 cm.
- Traza las tangentes que pasan por dos puntos exteriores a una circunferencia de 6.5 cm.

- **Desarrollo:** Muestre a sus estudiantes los procedimientos para construir las circunferencias trabajadas en esta doble página. Haga que realicen la actividad propuesta en el apartado *Inteligencia colaborativa* que trata sobre la construcción de tangentes a dos circunferencias. Pídales que realicen las construcciones de circunferencias en hojas blancas o papel de construcción.
- **Cierre:** Motive a sus estudiantes a realizar los ejercicios propuestos en el apartado *Actividades*. En la actividad 11, copiarán las circunferencias representadas y, luego, trazarán las tangentes que se les indican. Acompáñeles en la realización de estos ejercicios.

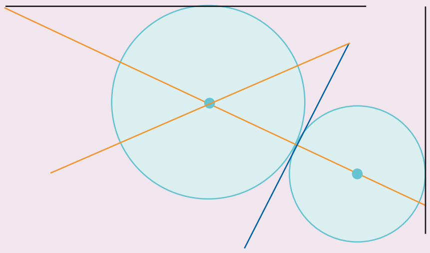
Competencias específicas

Competencia comunicativa

Rectas tangentes a una circunferencia pasando por un punto exterior



Circunferencia tangente a otra en un punto y una recta



Ficha 28.

Aprender a aprender

Pregunte al grupo: *¿Tuvieron alguna dificultad en los procedimientos aplicados en la construcción de las circunferencias? ¿Qué pasos dieron para superarla?*

Competencias

- Comunicativa.
- Usa algoritmos.
- Pensamiento lógico, creativo y crítico.
- Resolución de problemas.

Indicadores de logro

- **Identifica** los conceptos de *circunferencia* y *círculo* y **establece** la diferencia entre una y otro.
- **Identifica** las regiones interior y exterior de una circunferencia. **Identifica** posiciones relativas de una recta y una circunferencia. **Identifica** segmentos relativos a una circunferencia.
- **Identifica** los ángulos en una circunferencia y **los determina**. **Identifica** las distintas posiciones relativas de dos circunferencias. **Conoce** y **demuestra** algunos de los teoremas fundamentales de la circunferencia. **Identifica** polígonos inscritos y circunscritos en una circunferencia. **Realiza** construcciones diversas sobre la circunferencia usando la regla y el compás. **Resuelve** problemas del contexto que involucran la circunferencia, el círculo y sus propiedades.

Competencias específicas

Competencia comunicativa

Es necesario que los estudiantes adquieran las habilidades para identificar las líneas, segmentos y ángulos en la circunferencia y, además, reconocer los procedimientos para construir las diversas posiciones relativas de la circunferencia usando la regla y el compás.

Usa algoritmos

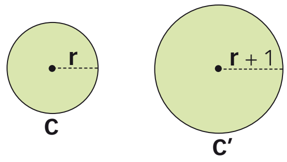
Las reglas y procedimientos en la resolución de operaciones aritméticas son vitales para la persecución de resultados correctos. Por ejemplo, en las operaciones que involucran los pasos para calcular las medidas de los ángulos y las cuerdas en la circunferencia.

ACTIVIDADES

12 Marca con ✓ las proposiciones verdaderas.

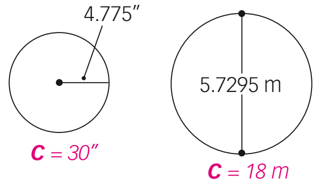
- ☐ Algunos puntos de una circunferencia equidistan de su centro.
- ☑ Un punto **P** de un círculo de radio **r** y centro **O** cumple con **OP** ⩽ **r**.
- ☐ Un punto **P** de una circunferencia de radio **r** y centro **O** cumple con **OP** > **r**.
- ☑ El diámetro de una circunferencia es la mayor de sus cuerdas.

13 Piensa y, luego, responde fundamentando tu respuesta matemáticamente.



- Un disco de radio r unidades aumenta este radio en una unidad. ¿Cuánto aumenta la circunferencia con el aumento de radio?
  2π unidades.
- ¿Este aumento es el mismo para cualquier circunferencia cuyo radio aumente la misma unidad?
  *Sí. **C′** – **C** = 2π (**r** + 1) – 2π **r** = 2π unidades.*

14 Determina la longitud de cada una de las circunferencias siguientes.

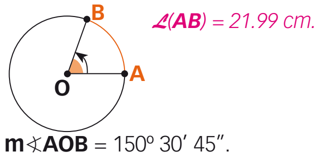


15 Completa la tabla.

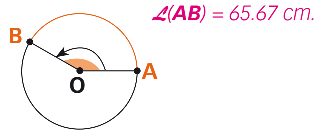
Radio	Diámetro	Circunferencia
4	*8*	25.133
12	*24*	*75.398*
8.95	17.90	*56.2345*
10	*20*	62.832
2.8648	5.7296	*18*

16 Obtén la longitud de cada uno de los arcos de circunferencia coloreados.

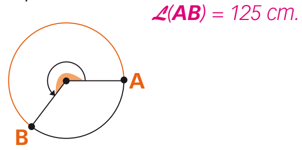
- **r** = 18 cm ; **m** ∡**AOB** = 70º.



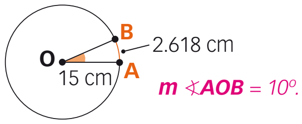
- **r** = 25 cm ; **m**∡**AOB** = 150º 30′ 45″.

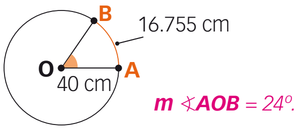


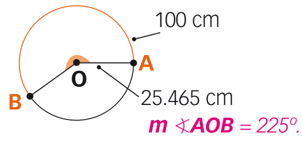
- **r** = 100/π cm ; **m**∡**AOB** = 5π/4.



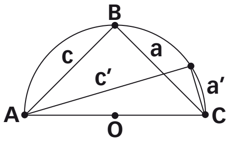
17 Calcula, en grados, la medida del ángulo central que intercepta el arco de longitud dada en cada circunferencia.







18 Prueba la propiedad siguiente.



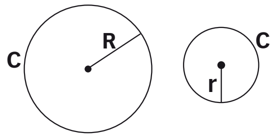
$a^2 + c^2 = a'^2 + c'^2 = \ldots =$ constante.

Sugerencias didácticas

- Las actividades propuestas en esta página están estrechamente vinculadas a los conceptos y procedimientos desarrollados a lo largo de la unidad. Haga que lean cuidadosamente las instrucciones y, después, verifique los resultados obtenidos.
- Es importante observar de cerca que los estudiantes utilizan correctamente la regla y el compás al realizar las construcciones relacionadas con la circunferencia estudiadas en esta unidad.

19 Prueba que para dos circunferencias cualesquiera, se cumple la siguiente igualdad.

C r = c R

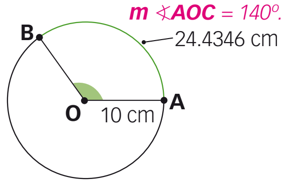


C/R = c/r = 2π.

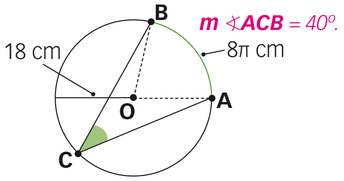
- ¿En qué te fundaste para probarlo?

20 Obtén la medida de los ángulos coloreados de cada circunferencia.

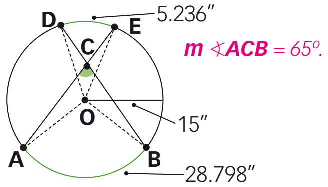
m ∢AOC = 140º.



m ∢ACB = 40º.

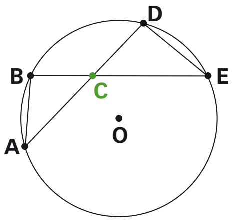


m ∢ACB = 65º.



21 Observa la figura siguiente y, luego, demuestra la expresión que aparece en el recuadro.

ΔACB semejante ΔECD.

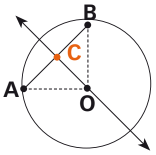


AC . CD = BC . CE

22 Demuestra la proposición siguiente.

*La recta perpendicular **L** a una cuerda y que pasa por el centro **O** de la circunferencia, divide a la cuerda en dos partes iguales.*

Se reduce a probar que: ΔACO congruente ΔBCO.



$\overline{AC} = \overline{CB}$

23 Resuelve el problema.

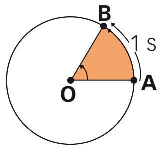
La junta de vecinos de un complejo habitacional quiere reacondicionar la piscina circular que tiene el área de recreo. La piscina tiene un radio de 5 m y la junta quiere poner en su borde adoquines de 14.96 cm de largo. Calcula con cuántos adoquines se rodea la piscina.

Con 210 adoquines.

24 Resuelve el problema.

Una rueda que da **n** revoluciones por minuto (rpm) barre 2π **n**/60 radianes por segundo (rad/s). Calcula el número de rad/s de una rueda que da 1 200 rpm.

125.66 rad/s.



25 Lee y, luego, responde las preguntas.

*La rapidez con que un punto de la periferia de una rueda da una vuelta completa es su velocidad tangencial. El número de radianes barridos por segundo es la velocidad angular, ω, de la rueda. La relación entre estas velocidades es: **v** = ω**R**.*

La velocidad de avance de un vehículo es la velocidad tangencial de sus ruedas.

- ¿Cuál es la velocidad angular de una rueda que gira a razón de 1 800 rpm?
  188.496 rad/s.
- Si la rueda tiene 70 cm de diámetro, ¿cuál es su velocidad tangencial en m/s?
  131.95 m/s.
- ¿Qué distancia, en m, recorre el vehículo en un lapso de tiempo de 15 segundos?
  1 979.25 m.

Competencias fundamentales

Pensamiento lógico, creativo y crítico

Los conocimientos adquiridos por los estudiantes son necesarios para identificar las alternativas más convenientes en la persecución de la solución de problemas que forman parte de su diario vivir. En este aspecto radica la importancia de que adquieran las destrezas necesarias para resolver problemas que involucren las construcciones relacionadas con la circunferencia y el cálculo de las medidas de ángulos y arcos desconocidos.

Criterios de evaluación

Competencia comunicativa:

- Adaptación de las representaciones gráficas, simbólicas y numéricas a la situación de comunicación.

Competencia algoritmo:

- Seguimiento de las reglas, instrucciones y procedimientos.

Pensamiento lógico, creativo y crítico

- Rigurosidad al ordenar y jerarquizar conceptos.

Competencia pensamiento lógico, creativo y crítico

- Selecciona una estrategia, la aplica y evalúa su efectividad.

Sugerencias didácticas

Resolución de problemas

- Proponga a sus estudiantes que lean detenidamente las instrucciones de los problemas propuestos en las actividades 19, 20, 21, 22, 23, 24 y 25. Estos problemas son aplicaciones cotidianas de los conceptos relacionados con la circunferencia y sus construcciones. Acompañe a sus estudiantes en la realización de estas actividades y ofrézcales las orientaciones necesarias.

Aprender a aprender

Motive a sus estudiantes para que inventen ejemplos de las aplicaciones cotidianas de los conceptos desarrollados en la unidad. Por ejemplo, pregunte al grupo: *¿Qué pasos deben seguir para construir una pieza cuadrada encajada en una circunferencia?* Discuta las diversas respuestas con el grupo.

Indicadores de logro de la evaluación

- **Identifica** los conceptos de *circunferencia* y *círculo* y **establece** la diferencia entre una y otro.
- **Identifica** las regiones interior y exterior de una circunferencia. **Identifica** posiciones relativas de una recta y una circunferencia. **Identifica** segmentos relativos a una circunferencia.
- **Identifica** los ángulos en una circunferencia y **los determina**. **Identifica** las distintas posiciones relativas de dos circunferencias. **Conoce** y **demuestra** algunos de los teoremas fundamentales de la circunferencia. **Identifica** polígonos inscritos y circunscritos en una circunferencia. **Realiza** construcciones diversas sobre la circunferencia usando la regla y el compás. **Resuelve** problemas del contexto que involucran la circunferencia, el círculo y sus propiedades. **Utiliza** recursos virtuales y electrónicos: computadora, programas educativos, juegos interactivos y otros, en la búsqueda de información.

Competencias específicas

- Comunica.
- Razona y argumenta.
- Modela y representa.
- Usa algoritmos.
- Conecta.
- Resuelve problemas.

Aprender a aprender

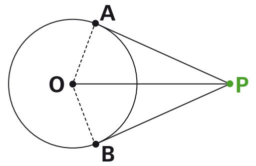
Plantear al grupo: *¿Qué datos requieren para construir dos circunferencias exteriores?*

EVALUACIÓN

Comunica

26 Observa detenidamente la figura y, luego, escribe en tu cuaderno la propiedad que aparece en el recuadro.

$\overline{PA} = \overline{PB}$

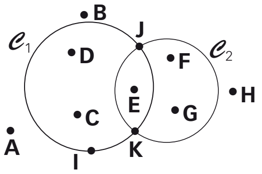


Razona y argumenta

27 La propiedad anterior es un teorema. Escribe su hipótesis, su tesis y haz su prueba.

Modela y representa

28 Observa las circunferencias $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_1$ y, luego, escribe en forma conjuntista.



- El conjunto de puntos de $\mathcal{C}_1$ y los conjuntos de puntos interiores y exteriores a $\mathcal{C}_1$. *{I, J, K}; {C, D, E}; {A, B, F, G, H}.*
- El conjunto de puntos comunes a las circunferencias $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$. *{J, K}.*
- El conjunto de puntos en el exterior de ambas circunferencias, $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$. *{A, B, H}.*

29 Traza una circunferencia de 5 cm de diámetro y, luego, haz lo que se te indica.

- Traza dos rectas secantes y dos tangentes.
- Dos segmentos secantes con un punto en común en la circunferencia.
- Dos segmentos secantes con un punto común en la región exterior de la circunferencia.
- Dos segmentos secantes con un punto común en la región interior de la circunferencia.

Usa algoritmos

30 Calcula la circunferencia, de radio o diámetro dados a continuación.

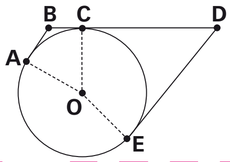
- **r** = 15.8 cm. *C = 99.27 cm.*
- **d** = $12\sqrt{2}$ cm. *C = 53.315 cm.*
- **r** = 0.75 m. *C = 4.71 m.*
- **d** = 2.54648 dm. *C = 8 dm.*

31 Determina la longitud de los arcos de circunferencia interceptados por los ángulos centrales en cada circunferencia.

$\overset{\frown}{AB}$ = 17.45". *$\overset{\frown}{CD}$ = 47.124 cm.*

32 Demuestra que si **AB**, **BD** y **DE** son segmentos tangentes a la circunferencia, entonces se cumple la igualdad dada.

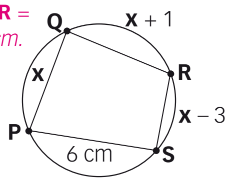
$\overline{BD} = \overline{AB} + \overline{DE}$



$\overline{BC} = \overline{AB}$ y $\overline{CD} = \overline{DE}$, luego: $\overline{BC} + \overline{CD} = \overline{BD} = \overline{AB} + \overline{DE}$

33 Determina las longitudes desconocidas de los lados del cuadrilátero cíclico.

$\overline{PQ}$ = 10 cm; $\overline{QR}$ = 11 cm; $\overline{RS}$ = 7 cm.



Conecta

34 Resuelve.

Una bicicleta, diseñada en Francia en 1870, tenía ruedas de radios distintos. Al desplazarse la bicicleta ambas ruedas debían tener la misma velocidad tangencial.

- ¿Ambas ruedas tendrán el mismo número de revoluciones por minuto? *No.*
- ¿Cómo se relacionan los radios con el número de revoluciones por minuto? *$\omega_1 r_1 = \omega_2 r_2$ (ω es omega).*

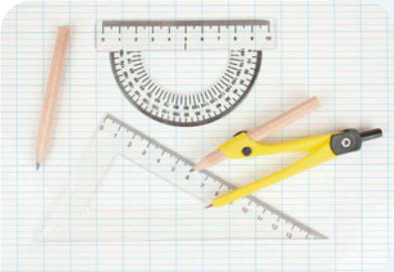
Sugerencias didácticas para la evaluación

- Es importante verificar, antes de dar inicio a las actividades de evaluación, que sus estudiantes identifican y trazan líneas, segmentos y ángulos en la circunferencia. Observar que identifican y construyen las diversas posiciones relativas de la circunferencia.

SABER HACER

35 Portafolios. Lean las instrucciones para construir su portafolios.

- Diseñen una carpeta de cartulina en cuya portada pondrán, arriba, el nombre de la escuela, el título del trabajo, el curso y los integrantes del grupo con sus nombres y sus apellidos completos. Al pie de la portada, colocarán el nombre de la ciudad y la fecha de presentación del trabajo.
- Redacten una tabla de contenidos para la segunda página del portafolios, donde deberán colocar un índice de las diferentes construcciones recopiladas. Además, incluyan al final un glosario con los términos geométricos usados.
- El portafolios deberá ser expuesto y comentado en el curso junto con los elaborados por los demás compañeros.



36 Responde las preguntas.

- ¿Qué relaciones puedes establecer entre la Geometría y el desarrollo de la ciencia y la tecnología?
- ¿Qué ejemplos podrías dar que pongan de manifiesto esas relaciones entre Matemática y avance científico y técnico?

APRENDIZAJE AUTÓNOMO

37 Marca según tus logros.

	Iniciado	En proceso	Logrado
• **Identifico** circunferencia y círculo y **establezco** su diferencia.			
• **Reconozco** líneas y segmentos relativos a la circunferencia.			
• **Identifico** y **determino** los ángulos en una circunferencia.			
• **Reconozco** las posiciones relativas de dos circunferencias.			
• **Conozco** y **demuestro** teoremas básicos de la circunferencia.			
• **Identifico** polígonos inscritos y circunscritos.			
• **Realizo** construcciones usando regla y compás.			

38 Reflexiona sobre tu aprendizaje.

- ¿Cómo valoras del 1 al 5 tu desempeño en el trabajo con la unidad?
- ¿Qué temas te parecieron más interesantes y cuáles mayores aplicaciones en la vida?

Sugerencias didácticas para la evaluación

- Pregunte a sus estudiantes:
  - *¿Cómo se definen la circunferencia y el círculo?*
  - *¿Cómo se clasifican las líneas y los segmentos de la circunferencia?*
  - *¿Cuáles son las principales posiciones relativas de la circunferencia?*
  - *¿Cuándo decimos que un polígono está inscrito en la circunferencia? ¿Y cuándo está circunscrito?*

Saber hacer

En la actividad 35, *Saber hacer*, se aplica la estrategia de evaluación *Portafolios*. Formados en grupos, observarán la ilustración, luego, leerán las instrucciones para construir sus portafolios. En este caso, diseñarán una carpeta de cartulina con las especificaciones señaladas y, además, redactarán una tabla de contenidos para la segunda página del portafolios, aplicando las recomendaciones de lugar. Finalmente, expondrán y comentarán el portafolios en el curso junto con los elaborados por los demás compañeros.

Actitudes y valores

Ciencia y tecnología

En la sección destinada a *Actitudes y valores*, actividad 36, responderán qué relaciones pueden establecer entre la Geometría y el desarrollo de la ciencia y la tecnología. Expresarán qué ejemplo podrían dar que ponga de manifiesto esas relaciones entre Matemática y avance científico y técnico.

Aprendizaje autónomo

En el apartado *Aprendizaje autónomo*, actividad 37, evaluarán por ellos mismos si los conceptos y procedimientos que trabajaron en la unidad se encuentran en estado de iniciación, en proceso o logrado. En la actividad 38, reflexionarán sobre su proceso de aprendizaje.

Aprender a aprender

Haga que sus estudiantes apliquen los conceptos aprendidos en la unidad en situaciones de la cotidianidad, por ejemplo, preguntar: *¿Cuáles son los pasos para reproducir una pieza formada por circunferencias concéntricas?*

Indicadores de logro

- **Conoce** el concepto de *ciudad* y sus características principales.
- **Reconoce** la importancia de concebir y ofrecer ideas para mejor las condiciones de la ciudad en que vive.
- **Identifica** los pasos a seguir para elaborar un proyecto encaminado a alcanzar la ciudad que aspiramos.
- **Identifica** los componentes de una ciudad que facilite el acceso y el diario vivir de sus habitantes.

SABER HACER **Duración**: 4 semanas de clase.

Proyecto

El empleo de proyectos en la enseñanza de las matemáticas favorece el desarrollo de las competencias fundamentales y propias del área del nuevo modelo curricular.

El trabajo con el proyecto podría ser desarrollado individual o grupalmente y discutido tras su realización en el aula.

Sugerencias didácticas

En este proyecto, *La ciudad que soñamos*, los estudiantes pondrán en práctica conocimientos adquiridos hasta ahora, en un contexto distinto vinculado a la vida cotidiana.

Es importante acompañarles durante todo el proceso de trabajo y ofrecerles las explicaciones que requiera cada caso.

Propongamos un modelo de ciudad

Sugerencias didácticas

- **Inicio:** Es importante que este proyecto se realice formando distintos equipos y, luego, se expongan los resultados en clase. Es importante comunicar a los estudiantes que en este proyecto construirán un modelo o maqueta de una urbanización, un área comercial, una zona industrial, etc,, de acuerdo a la que entiendan es una solución satisfactoria a algunos problemas de su ciudad. Los modelos de edificios deberán se cuerpos geométricos como los estudiados por la Geometría.

¿A qué ciudad aspiramos?

Introducción

La ciudad es el lugar de establecimiento permanente de una gran población y la sede de organizaciones con funciones diversas, en el ámbito de la política y la administración, la producción y distribución de bienes, los servicios y las actividades financieras, el recreo y esparcimiento y las prácticas religiosas.

En tanto que espacio donde grupos humanos se desplazan y realizan sus actividades cotidianas, la ciudad debe reunir y promover un conjunto de condiciones para el desenvolvimiento favorable de la vida. Se debe aspirar a construir una ciudad con facilidades para desplazarnos por ella, ambientalmente sana, segura, organizada y debidamente equipada.

Intención del proyecto

Las ciudades donde vivimos no carecen de problemas. Su rapidez de expansión territorial y su crecimiento poblacional superan, en muchos casos, la capacidad de respuesta de los organismos oficiales y privados encargados del planeamiento, la oferta eficiente de servicios y el ornato.

En el presente proyecto los estudiantes tendrán oportunidad, junto a profesores, familiares y vecinos, de concebir y ofrecer ideas para mejorar la ciudad en que viven; ideas para una ciudad agradable, segura y que garantice la movilidad de sus pobladores. Es un proyecto en el que confluyen las Ciencias Sociales, la Matemática y el arte.

Las ideas para una mejor ciudad serán plasmadas en el diseño y la construcción de la maqueta de algún espacio comunitario o área de la ciudad que consideren.

¿Cómo iniciar nuestro proyecto?

- Recogiendo información acerca de qué es una ciudad habitable y cuáles soluciones se han dado a problemas similares a los nuestros.
- Consultando a compañeros, familiares, vecinos y urbanistas sobre aspectos de su ciudad que desearían cambiar para mejorarla.
- Haciendo un listado de los aspectos identificados, ordenándolos según su prioridad y evaluando sus posibilidades de solución.
- Discutiendo ideas y llegando a conclusiones abiertas y flexibles que actuarán como guías para la construcción de la maqueta, que será el elemento tangible del modelo de ciudad a que aspiramos.

Otras sugerencias

Es importante explicar a los estudiantes en qué consiste el Proyecto, *La ciudad que soñamos*. Hacer un breve comentario acerca de la presencia de las matemáticas en la vida cotidiana y en aspectos relacionados con las construcciones y el diseño de las edificaciones.

Oriénteles y organice los grupos que recopilarán las informaciones consultando a los compañeros, familiares, amigos y vecinos.

Al concluir la recopilación de las informaciones, propóngales realizar el listado de los aspectos identificados, ordenándolos por orden de prioridad y evaluando las posibilidades de solución.

El siguiente paso es discutir las ideas para llegar a conclusiones flexibles que serán las guías para la construcción de la maqueta, que será el elemento tangible del modelo de ciudad al que aspiramos.

Acompáñeles y oriénteles en el proceso de realización de las actividades involucradas en este proyecto.

- **Desarrollo:** Haga que sus estudiantes lean y comenten en el grupo la introducción que trata de los aspectos relacionados con la ciudad que aspiramos. Luego, motíveles para que lean y comenten la intención del proyecto que resume la idea de una mejor ciudad.
- **Cierre:** En esta oportunidad leerán y comentarán los pasos acerca de cómo iniciar un proyecto. Determinarán cómo los grupos formados recopilarán las informaciones, cómo organizarán los datos recopilados y cómo organizarán las discusiones y las conclusiones.

Indicadores de logro

- **Conoce** el concepto de *ciudad* y sus características principales.
- **Reconoce** la importancia de concebir y ofrecer ideas para mejor las condiciones de la ciudad en que vive.
- **Identifica** los pasos a seguir para elaborar un proyecto encaminado a alcanzar la ciudad que aspiramos.
- **Identifica** los componentes de una ciudad que facilite el acceso y el diario vivir de sus habitantes.
- **Construye** una maqueta que representa el modelo de una ciudad habitable.

Sugerencias didácticas

En la continuación del proceso de desarrollo de este proyecto en que construirán una maqueta representativa del modelo para una ciudad habitable, los estudiantes llenarán una tabla con máximo de cuatro preguntas por dimensión. Comentarán dichas preguntas en el grupo y las misma servirán de gruía para dar soluciones a los problemas planteados. Estas soluciones quedarán reflejadas en la maqueta construida.

Es importante acompañarles durante todo el proceso de trabajo y ofrecerles las orientaciones que requiera cada caso.

Tema general: **Modelo para una ciudad habitable**

Justificación del proyecto

El tema de la ciudad que queremos es de importancia capital dado que atañe al desenvolvimiento de la vida en el espacio que compartimos a diario con las demás personas. Las características de la ciudad donde vivimos impactan de manera significativa en nuestras posibilidades de desarrollo personal y en la riqueza de nuestras interacciones sociales.

Una ciudad que facilite la movilidad; con escuelas, bibliotecas, cines, parques, centros de salud, establecimientos deportivos, oficinas administrativas y de servicios, industrias, etc. en lugares adecuados y de fácil acceso favorece el diario vivir. Pensar sobre la ciudad es hacerlo sobre la vida de sus pobladores.

Propósitos del proyecto

Los propósitos del presente proyecto deberán estar enmarcados en las siguientes tres dimensiones, relacionadas entre sí:

- Dimensión científica: Indagar, de modo organizado, sobre los rasgos físicos de la ciudad donde vivimos (accesibilidad, ubicación de sus pobladores, instituciones, industrias, comercios, etc.); su medio ambiente; la seguridad y la inclusión, etc.
- Dimensión valorativa: Qué actitudes adoptar frente a las situaciones que, a nuestro juicio, deberán cambiarse en la ciudad.
- Dimensión política: Buscar en forma colectiva soluciones posibles para corregir o eliminar las situaciones que impiden que vivamos en una mejor ciudad y buscar que sean aplicadas por las autoridades.

Preguntas problematizadoras

El punto de partida de cualquier proyecto participativo son las preguntas formuladas en torno a las situaciones problema identificadas. Observen los ejemplos de pregunta para cada dimensión y, luego, llenen el modelo de tabla con las suyas.

Dimensión:	Científica	Valorativa	Política
Preguntas:	¿Qué características presenta nuestra ciudad?	¿Cómo impactan nuestra calidad de vida?	¿Con cuales acciones iniciaríamos su solución?

94

Sugerencias didácticas

- **Inicio:** Es importante que los estudiantes lean y discutan la justificación del proyecto, que muestra las característica de una ciudad que facilite la movilidad y la convivencia de sus habitantes y que cuente con servicios y comercios de fácil acceso a sus pobladores.
- **Desarrollo:** Puesto en marcha el proyecto, los estudiantes identificarán las dificultades o males que afectan el desenvolvimiento de la vida cotidiana en la ciudad. Como se indicó anteriormente, realizarán un listado con los problemas identificados, si existe la posibilidad, con soportes gráficos o fotográficos. Para la construcción de la maqueta utilizarán cartulina, cartón, hielo seco, palitos, pegamentos, etc.

Puesta en marcha del proyecto

Acopio de la información

El proyecto deberá ser iniciado constatando, mediante la observación directa o entrevistas, las dificultades o males que afectan el desenvolvimiento de la vida cotidiana de la ciudad.

Como se indicó inicialmente, se hará un listado con los problemas identificados, si fuere posible con soportes gráficos o fotografías y una investigación acerca de las soluciones dadas por los urbanistas a problemas similares.

Los datos recogidos se analizarán de manera colectiva y las decisiones tomadas debidamente recogidas por escrito.

Recursos y elaboración

En la construcción de las maquetas se utilizarán:

- Cartulina
- Cartón
- Hielo seco
- Foamboard
- Pali
- Pegamento
- Cinta adhesiva
- Escarcha
- Piedrecitas

Muchos de los elementos para la construcción de maquetas se encuentran en tiendas especializadas de artículos para diseñadores y arquitectos (figuras humanas, arbolitos, carros, etc.). Puede ser útil, consultar en la internet videos que muestren el proceso de construcción de una maqueta en la escuela.

Presentación de las propuestas a la comunidad

Cada una de las maquetas será presentada por el grupo responsable de su construcción en un salón habilitado para la ocasión. Allí se referirán a la situación problema elegida y la solución que proponen.

A la exposición se invitarán autoridades del cabildo, juntas de vecinos, urbanistas y familiares. Podría plantearse la elaboración de una carta a las autoridades para que atiendan las demandas de los pobladores.

EVALUACIÓN DEL PROYECTO

Marca según tus logros.	Sobresaliente (95-100)	Muy buena (85-95)	Buena (75-85)	Insuficiente (60-75)
• Contenido.	▢	▢	▢	▢
• Planificación.	▢	▢	▢	▢
• Trabajo en equipo.	▢	▢	▢	▢

Otras sugerencias

Es importante explicar a los estudiantes que sigan al pie de la letra los procedimientos para obtener o recolectar las informaciones que darán forma al proyecto de la representación de una ciudad habitable.

Oriénteles y organice los grupos que recopilarán las informaciones consultando a los compañeros, familiares, amigos y vecinos.

Al concluir la recopilación de las informaciones, propóngales realizar el listado de los aspectos identificados, ordenándolos por orden de prioridad y evaluando las posibilidades de solución.

El siguiente paso es obtener los materiales indicados que se requieren para la construcción de la maqueta. Muchos de estos artículos se encuentran en tiendas especializadas para diseñadores y arquitectos (figuras humanas, arbolitos, carros, etc.).

Acompáñeles y oriénteles en el proceso de realización de cada maqueta.

- **Cierre:** Cada una de las maquetas será presentada por el grupo responsable de su elaboración. Aquí se referirá la situación problema identificada y las posibles soluciones. A la exposición se invitarán distintas personalidades de la ciudad, padres, amigos y familiares.

Indicadores de logro

- **Conoce** las funciones de un ingeniero.
- **Reconoce** la importancia de la ingeniería en el desarrollo de las sociedades.
- **Identifica** las variantes de la carrera de Ingeniería.
- **Identifica** el perfil profesional de un ingeniero.
- **Sabe** cuál debe ser la ética profesional de un ingeniero.
- **Identifica** las fuentes de trabajo o las oportunidades de empleos de un ingeniero.
- **Aprecia** el trabajo del ingeniero en sus distintas vertientes.

COMPETENCIAS LABORALES Y PROFESIONALES

Ser ingeniero

¿Qué es un ingeniero?

Un ingeniero proyecta, diseña, ejecuta, supervisa y evalúa soluciones técnicas a una variada gama de necesidades sociales relacionadas con la intervención del entorno físico con fines diversos.

El ingeniero cuenta con obstáculos que limitan sus intervenciones en el medio y asume que, con sus recursos técnicos, deberá hacerles frente para obtener los mejores resultados posibles.

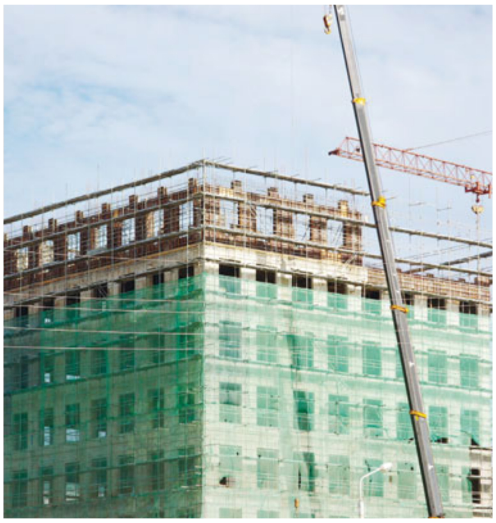
Importancia de la ingeniería

La ingeniería combina conocimientos científicos y tecnológicos, de los que no se disponía en el pasado. La ingeniería es una profesión moderna, sus primeras escuelas datan de finales del siglo XVIII.

La importancia actual de la ingeniería reside en que proporciona un conjunto de instrumentos técnicos de probada eficacia para la resolución de problemas de la vida social. La ingeniería es capaz de evaluar sus resultados y hacer proyecciones para la solución de problemas futuros.

Gran Muralla China (arriba) y un acueducto romano (abajo). Dos obras impresionantes de la ingeniería antigua.

Desempeño profesional



Construcción de un edificio. Obra de ingeniería civil.

La ingeniería tiene muchas vertientes, entre las cuales se cuentan:

- La ingeniería civil, dedicada a las construcciones y sus instalaciones eléctricas y sanitarias; al diseño y mantenimiento de caminos y carreteras y al cálculo estructural.
- La ingeniería electrónica, vinculada al diseño y puesta en funcionamiento de sistemas y programas informáticos, redes y comunicaciones.
- La ingeniería agrícola, que tiene que ver con el diseño y la construcción de instalaciones para la producción agroindustrial y el procesamiento de alimentos del agro y la pecuaria.
- La ingeniería química y la ingeniería de minas, asociadas a los procesos de las industrias químicas, de alimentos y de combustibles fósiles, la primera y a la explotación de minerales en el subsuelo, la segunda.

Sugerencias didácticas

Comente a los estudiantes que las competencias laborales y profesionales son las capacidades y destrezas que permiten desempeñar eficientemente una labor determinada.

En la ingeniería, además de la capacidad y la destreza, la responsabilidad es vital, no puede existir ningún margen de error en sus diseños y construcciones, por las consecuencias que representaría, en cualquier caso.

Sugerencias didácticas

- **Inicio:** Es importante que los estudiantes lean y discutan en el aula el texto *Ser ingeniero*, las secciones: *¿Qué es un ingeniero?*, *Importancia de la ingeniería* y *Desempeño profesional*. Motíveles para que observen las ilustraciones y para que lean y comenten las informaciones al pie de las mismas.
- **Desarrollo:** A continuación, inicie una discusión con sus estudiantes sobre los temas leídos y anímeles a externar sus opiniones y si tienen preferencia por alguna de las ramas de esta carrera. Es conveniente que expresen el porqué de su preferencia.

Perfil del ingeniero

El perfil profesional o laboral del ingeniero es el conjunto de conocimientos científicos y técnicos necesarios para el ejercicio cotidiano de la profesión; de las habilidades para emplear y procesar las informaciones, ejercer racionalmente el liderazgo en sus equipos de trabajo, reaccionar de modo adecuado frente a imprevistos, trazar planes y darle seguimiento a sus ejecuciones y evaluar los resultados obtenidos y de actitudes que orientan correctamente su conducta, entre las que cabe destacar la preocupación por el rigor y la calidad, el manejo correcto de los recursos y la atención a los problemas de su entorno social.

Ética profesional de la ingeniería

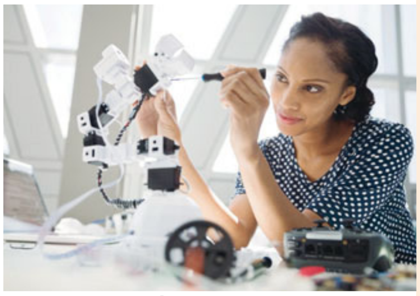
En el desenvolvimiento de sus actividades laborales, el profesional de la ingeniería deberá estar adornado por valores que demuestren su atención por la seguridad de la población y su calidad de vida y por la salud de las personas y de su entorno social y natural.

Oportunidades laborales

El ingeniero tiene oportunidades de ser empleado en una gran diversidad de organizaciones:

- En empresas de construcción privadas o públicas.
- En las compañías de telecomunicaciones y en instituciones del Estado que requieran esos servicios.
- En el diseño, puesta en marcha, supervisión y evaluación de procesos en las industrias.
- En los organismos relacionados con el manejo correcto de recursos naturales diversos (mineros, agroforestales, agua, etc.).

Ingeniería topográfica. Construcción de una carretera.



Ingeniera en robótica industrial. Diseño de un robot para uso en la industria.

Embalse de una presa. La ingeniería hidráulica diseña, ejecuta y supervisa obras relacionadas con el recurso agua.

VALORACIÓN PERSONAL

1 Responde las preguntas.

- ¿En qué distingues a un constructor y un ingeniero? Avala tu respuesta con algunos ejemplos.
- ¿En cuáles situaciones la seguridad ciudadana y el cuidado del entorno son competencia del ingeniero?
- ¿Por qué se afirma de la ingeniería que es una profesión propia de la modernidad?
- ¿Por qué es importante que un ingeniero ajuste su conducta profesional a la ética? Ejemplifica tres acciones éticas en ingeniería.

Más información

Octavio Augusto Acevedo Camarena

Es considerado uno de los primeros grandes ingenieros dominicanos. Graduado en 1904 de Ingeniero Civil y de Caminos, en el North Carolina State College, el cual estaba adscrito a la Universidad de Carolina del Norte. Volvió al país e instaló sus oficinas en su ciudad natal San Pedro de Macorís.

El ingeniero llegó a esa urbe en su momento de pleno apogeo cuando la industria de la caña de azúcar impulsó el desarrollo de la misma y la convirtió en una de las más importantes del país. Escribía constantemente en diversos diarios del país donde exponía sus ideas acerca de diversos tópicos de ciencia e ingeniería. Entre sus obras más destacadas están la Catedral de San Pedro, y el Cuartel de Bomberos de San Pedro de Macorís. Acevedo fue quien trajo al país la novedosa técnica del hormigón armado, y también fue un gran propulsor del asfaltado. El historiador e investigador Andrés Blanco Díaz hace unos años logró recopilar los diferentes escritos del ingeniero y los publicó en dos tomos. Se destaca entre los escritos recopilados por Blanco Díaz, el *Viaje oficial al interior de la República*.

Esta información fue publicada en octubre del 2017, por Ángel Manuel Ruiz Domínguez.

Sugerencias didácticas

- **Inicio:** A continuación, pida a sus estudiantes que lean y discutan en el aula el contenido de las secciones: *Perfil del ingeniero, Ética profesional de la ingeniería y Oportunidades laborales*. Motíveles para que observen las ilustraciones y para que lean y comenten las informaciones al pie de las mismas.
- **Desarrollo:** En la sección: Valoración personal, responderán preguntas en el grupo relacionadas con los temas desarrollados en esta doble página. Motíveles, en cada caso, a justificar el porqué de su respuesta y a comentar, si es necesario, las respuestas de sus compañeros.

A Creatividad, arte y matemática

Propuesta de programación

ÁREAS	COMPETENCIAS ESPECÍFICAS	CONTENIDOS		
		Concepto	**Procedimientos**	**Actitudes y valores**
Matemática	■ **Razona y argumenta**: **Clasifica** las rectas, los segmentos y los polígonos atendiendo a sus características. ■ **Comunica**: **Interpreta** y **explica** los tipos de ángulos en el espacio. ■ **Modela y representa**: **Construye** y **representa** situaciones de la vida cotidiana a través de los diferentes polígonos. ■ **Usa algoritmos**: **Sigue** las reglas que le permiten obtener un resultado al resolver problemas. ■ **Conecta: Identifica** diferentes tipos de rectas, segmentos, ángulos y polígonos. ■ **Resuelve problemas: Resuelve** y **elabora** problemas relacionados con el círculo y secciones circulares. ■ **Utiliza herramientas tecnológicas: Utiliza** soportes tecnológicos.	■ Rectas, segmentos y ángulos. ■ Ángulos en el espacio. ■ Polígonos.	■ Reconocimiento de rectas, segmentos, rayos, ángulos y triángulos semejantes. ■ Identificación y resolución de problemas relativos a círculos y secciones.	■ Valoración del vínculo entre la matemática y el arte. ■ Apreciación de la belleza y la diversidad de expresiones artísticas.
Educación Artística	■ **Plasma** en obras escénicas y visuales, temas y formas que refieren al realismo o la ficción.	■ Transformaciones reales e imaginarias del espacio (plástico-visual y escénico).	■ Exploración en diferentes manifestaciones artísticas, a partir de temas o formas del realismo y la ficción.	■ Valoración de distintas manifestaciones artísticas, realistas o de ficción.

INDICADORES DE LOGRO

- **Traza** la manera en que se reflejan los rayos en espejos convexos.
- **Prueba** que un objeto y su imagen reflejada en un espejo convexo, son semejantes.
- **Prueba** que la ley de reflexión implica que la luz toma el camino más corto al reflejarse.
- **Demuestra** la semejanza de dos triángulos representados en un diseño artístico.
- **Determina** la longitud de la circunferencia y de cualquiera de los círculos centrales en una obra de arte en la que se representan estas formas.
- **Determina** la longitud de un arco interceptado al inscribirse un cuadrado en un círculo.
- **Identifica** y **resuelve** problemas relacionados con el círculo y secciones circulares.
- **Utiliza** diferentes recursos virtuales y electrónicos: computadora, softwares educativos, juegos interactivos y otros, en la búsqueda de información.

- **Reconoce** características de obras artísticas realistas y de obras artísticas de ficción.

Competencias fundamentales

Resolucion de problemas: **Identifica** y **utiliza** estrategias, y **genera** alternativas de solución.

Valor transversal

Creatividad

Recursos digitales

Plataforma digital CD

BIBLIOTECA DEL DOCENTE
- DOCUMENTOS PARA LA PLANIFICACIÓN
- GUÍA DE RECURSOS TIC

RECURSOS DE REFUERZO Y AMPLIACIÓN

LibroMedia

ACTIVIDAD INTERACTIVA

PÁGINA 99	Clasificación de triángulos.

CD DE RECURSOS DIGITALES: PLAN REGULAR

Pleno: PRUEBA DE EVALUACIÓN FORMATIVA DE LA UNIDAD

Tiempo estimado de trabajo

Dos semanas

Estrategias pedagógicas

- Recuperación de experiencias previas.
- Trabajo en equipo.
- Aprendizaje basado en problemas (ABP).

Unidad A

Competencias

- **Lee** y **comenta** las informaciones expuestas en el apartado *Situación de aprendizaje*.
- **Responde** preguntas relacionadas con las informaciones expuestas en el apartado *Situación de aprendizaje*.
- **Recupera** experiencias vividas mediante la observación de las imágenes de la ilustración.
- **Analiza** un problema de la vida cotidiana vinculado a los conceptos y procedimientos que desarrollarán en la unidad, en el apartado *Analiza la situación*.
- **Plantea** soluciones al problema leído y analizado anteriormente, en el apartado *Plantea una solución*.

Esquema de la unidad

Creatividad, arte y matemática

En las manifestaciones artísticas junto a la creatividad y la imaginación, está presente la matemática, con objetos tales como:

- Rectas, segmentos y ángulos
- Ángulos en el espacio
- Polígonos
- Construcciones

A Creatividad, arte y matemática

Conceptos

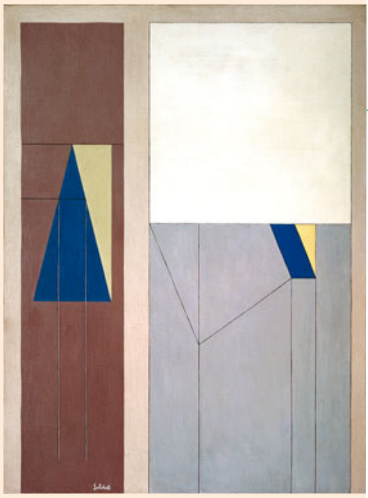
- Rectas, segmentos y ángulos.
- Ángulos en el espacio.
- Polígonos.

Procedimientos

- Resolución de problemas.
- Construcciones.

Actitudes y valores

- Valoración del vínculo entre la matemática y el arte.
- Aprecio por la belleza y la diversidad de expresiones artísticas.



Pintura (1935). Obra del pintor italiano Atanasio Soldati (1896-1953).

Situación de aprendizaje

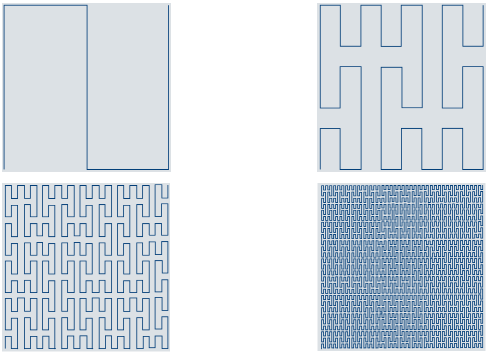
En la clase de Educación Artística, Jaime hizo alusión a la relación que, desde su punto de vista, podía establecer entre ciertas ideas matemáticas y algunas producciones del arte moderno. La intervención produjo una interesante discusión.

Rita le respondió a Jaime que la Matemática es el modelo de saber basado en la demostración lógica y que, en cambio, las expresiones artísticas son el resultado de la pura fantasía sin los requisitos de las pruebas rigurosas. Carmen, de acuerdo con Rita, dijo: "¡No imagino a nuestro poeta Manuel Rueda justificando, paso a paso, cada uno de los versos de sus poesías!?"

La discusión se hizo larga hasta que el profesor se dirigió a todos con estas palabras: "Muchachos, la clase se ha terminado. *¡Afinen sus argumentos para la próxima sesión de clases!"*

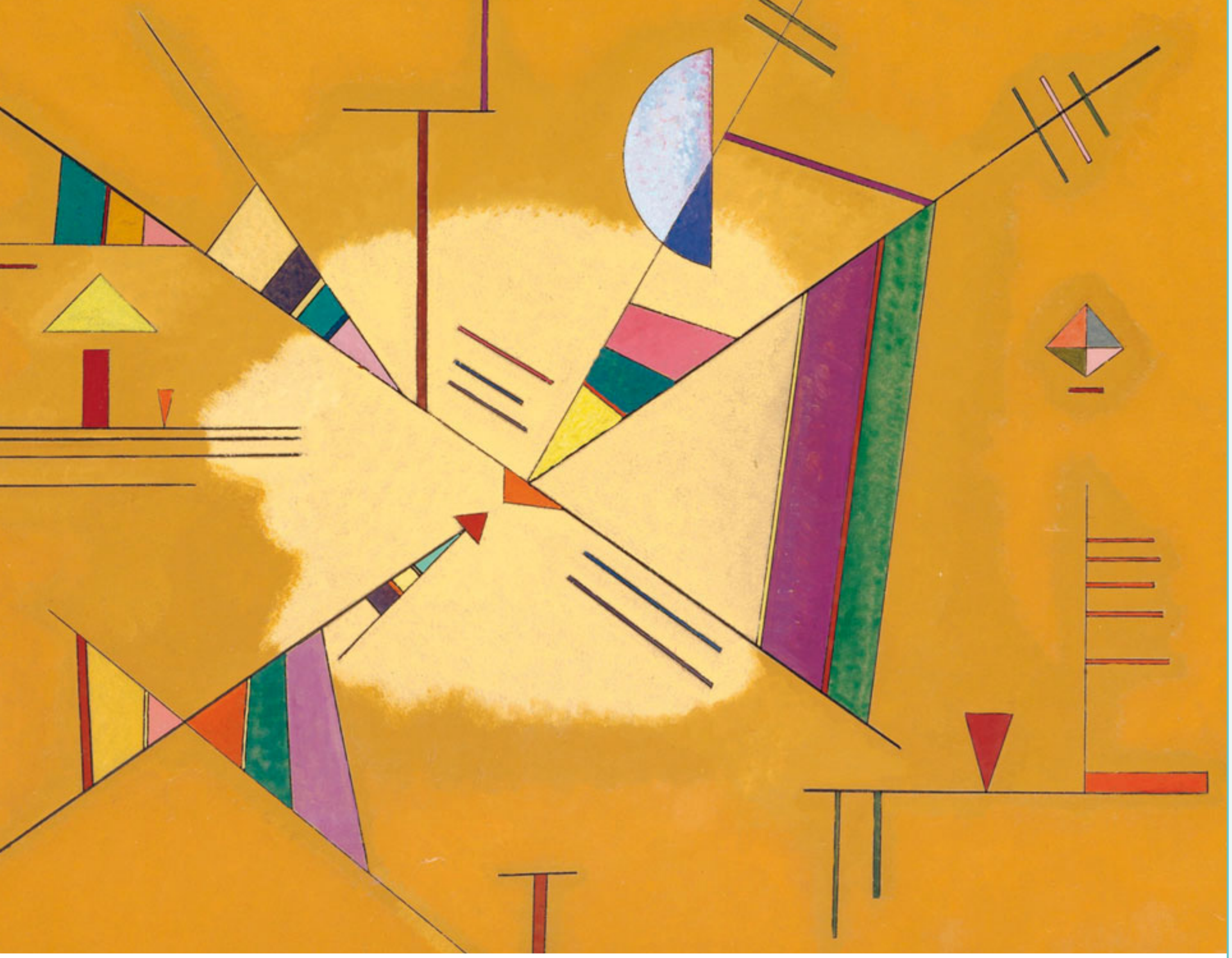
ANALIZA LA SITUACIÓN

Fíjate cómo se construye una curva de Peano. ¿Esta curva acaba llenando por completo la región interior del cuadrado?



Trabajo colectivo de apertura

- **Situación de aprendizaje:** Guíe a sus estudiantes a leer y comentar en el grupo las informaciones expuestas en el apartado *Situación de aprendizaje*, que narra acerca de las alusiones y la discusión generada por dos estudiantes, Jaime y Rita, acerca de las matemáticas y algunas producciones artísticas.
- **Analiza el problema:** Observarán la representación de cómo se construye una curva de peano y, luego, responderán si la misma acaba de llenar por completo la región interior del cuadrado.



Diagonal (1930). Cuadro del pintor ruso Vassily Kandinsky (1866-1944).

PLANTEA UNA SOLUCIÓN

- Piensa, antes de responder.
  - ¿La línea curva de Peano es abierta o cerrada? *Abierta.*
  - ¿Qué ocurre con la longitud de la curva conforme aumenta el número de pasos dados en su construcción? *Crece muy rápidamente.*
  - Si los puntos de la curva están siempre en el interior del cuadrado, ¿cómo concilias esta afirmación con el hecho de que su longitud crece constantemente? *La curva ocupa cada vez más espacio del interior del cuadrado.*
- Responde, argumentando, la pregunta de la página anterior utilizando tu intuición.

Recuerdo de un jardín **(1919)**. Cuadro del pintor de origen alemán Paul Klee (1879-1940).

- **Plantea una solución:** En este apartado responderán preguntas relacionadas con la curva de peano y, luego, responderán, con argumentos, la pregunta anterior. Aclare al grupo que si la curva está limitada por perímetro del cuadrado y su longitud aumenta indefinidamente en cada paso de su construcción, necesariamente la curva terminará por cubrir todo el interior del cuadrado.

Actividades de motivación

Pida a sus estudiantes que lean en la sección: *Conceptos y procedimientos*, los temas que trabajarán en esta unidad de aprendizaje y las actitudes y valores que estarán presentes en el desarrollo de la misma. Luego, explique a sus estudiantes que la intuición no proporciona un conocimiento seguro, sino conjetural y provisional. Acláreles que su función se limita a dar una idea de conjunto antes de que el análisis lógico pueda intervenir confirmando o rechazando lo intuido. La intuición es necesaria porque orienta en un terreno donde no hay nada lo suficientemente claro.

Analizar: "La lógica y la intuición tienen cada una su papel. La lógica es la única que puede dar certeza, es el instrumento de la demostración; la intuición es el instrumento de la invención". (**Henri Poincaré**, matemático francés).

Actividad interactiva

Clasificación de triángulos

Actividad interactiva de aplicación al concepto de triángulo, su clasificación y sus propiedades, en la que completarán expresiones relacionadas con los triángulos y sus ángulos, seleccionando las opciones correctas.

Cultivamos valores

Creatividad

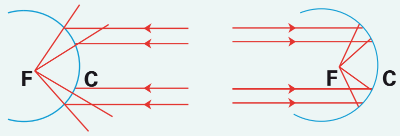
Aproveche la situación planteada en el apartado *Situación de aprendizaje* y en las imágenes de la ilustración para conversar con sus estudiantes acerca de la presencia de la matemática en el arte. Pregunte al grupo: *¿Qué formas geométricas identifican en la obra del pintor italiano Atanasio Soldati que muestra la ilustración? ¿Y en el cuadro del pintor ruso Vassily Kandinsky?* Motíveles para que justifiquen sus respuestas.

Indicadores de logro

- **Traza** la manera en que se reflejan los rayos en espejos convexos.
- **Prueba** que un objeto y su imagen reflejada en un espejo convexo, son semejantes.
- **Prueba** que la ley de reflexión implica que la luz toma el camino más corto al reflejarse.
- **Demuestra** la semejanza de dos triángulos representados en un diseño artístico.

Más información

Espejo convexo   Espejo cóncavo



Los espejos cóncavos convergen o juntan los rayos luminosos paralelos.

Se usan en los focos de los vehículos. Al colocar un bombillo en el foco, los rayos salen paralelos.

Se pueden producir imágenes reales y virtuales, dependiendo de la ubicación del objeto.

Una imagen real se forma por intersección de los rayos reflejados.

Una imagen virtual se forma en la intersección de las proyecciones de los rayos reflejados.

Los espejos convexos divergen o separan los rayos luminosos paralelos.

Se suelen usar en supermercados y plazas como una manera de tener una vista de amplio espacio.

En un espejo convexo solo se forman imágenes virtuales.

1 Lee y, luego, haz lo que se te pide.

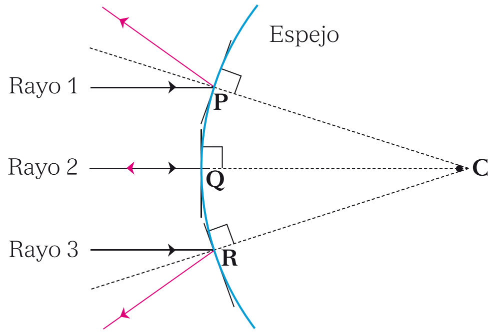
El estudio de fenómenos de la luz, como los de su propagación en línea recta y la reflexión, data de la antigüedad. El geómetra Euclides llegó a escribir una *Óptica*.

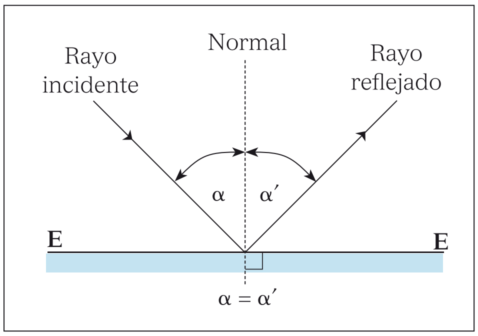
La pintura entre los siglos XV y XVI, usando la geometría de los rayos luminosos, logró que sus producciones dieran la impresión de una tercera dimensión tras inventar la perspectiva.

Entrado el siglo XX la pintura se libera de la figura para convertir en objeto del arte a los colores y los elementos geométricos como las líneas y los polígonos. También se emplea la distorsión de los objetos representados como recurso visual.

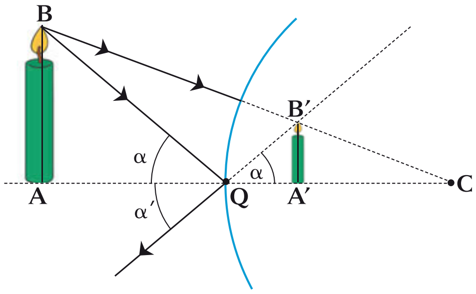
Reflexión múltiple en un espejo.

- En el recuadro de la derecha se muestra la ley de la reflexión de la luz en un espejo. A partir de ella, traza cómo se reflejan en el espejo convexo los rayos 1, 2 y 3.





- Prueba que los triángulos **ABQ** y **A’B’Q** de la figura siguiente, que muestra un objeto y su imagen en un espejo convexo, son semejantes.



Puerta de la nube **(2006)**. Escultura con superficie reflectante convexa que deforma las imágenes del entorno.

Sugerencias didácticas

- **Inicio:** Forme a sus estudiantes en grupos pequeños, luego, pídales que lean y comenten el texto relacionado con el estudio de los fenómenos de la luz y su propagación en línea recta y la reflexión y la pintura entre los siglos XV y XVI usando la geometría de los rayos luminosos.
- **Desarrollo:** Motive a los grupos para que lean las instrucciones y para que observen el recuadro de la derecha que muestra la ley de reflexión de la luz en un espejo. A continuación, a partir de las imágenes trazarán cómo se reflejan en el espejo convexo los rayos 1, 2 y 3. Finalmente, probarán que los triángulos representados en la figura que muestra un objeto y su imagen en un espejo convexo, son semejantes. Al terminar, pregunte al grupo: *¿Se han visto en espejos convexos o cóncavos? ¿Cómo son las imágenes?*

2 Lee y, luego, haz lo que se te indica.

La fotografía se inicia con Louis Daguerre en 1839, unos quince años después de los resultados obtenidos por Niepce en la captura de imágenes. A principios de la década de 1840, el pintor escocés David Hill hizo las primeras fotografías artísticas.

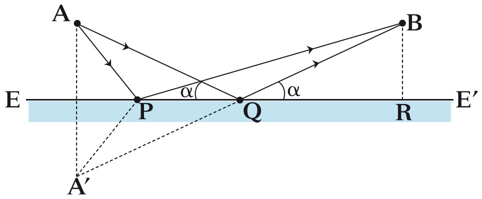
El arte fotográfico está fundamentado en las propiedades físicas de la luz que son la materia prima de la óptica geométrica. La ley de la reflexión es uno de esos fundamentos físicos en que se basa la fotografía.

- La figura muestra dos caminos posibles de un rayo de luz que se refleja en un espejo EE′. Prueba que la ley de la reflexión implica que la luz toma el camino más corto al reflejarse.

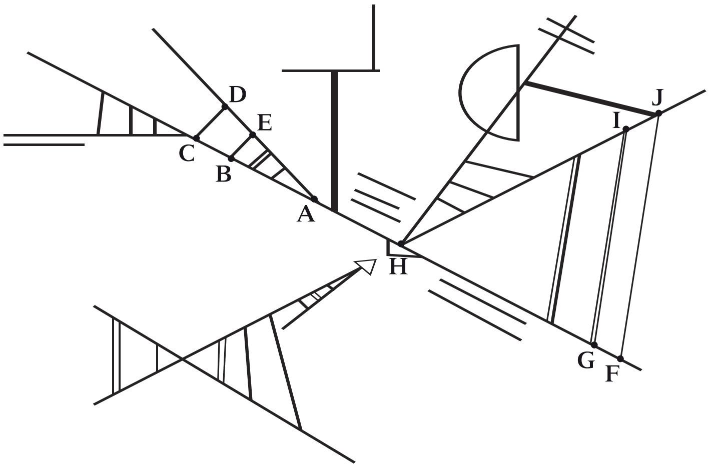
*Como la distancia más corta entre los dos puntos, **A′** y **B**, es la longitud del segmento que los une: **A′QB** < **A′PB**. Luego, el camino **AQB** es el más corto y es el que responde a la ley de la reflexión.*

APB y **AQB** son dos caminos posibles del rayo de luz que se refleja en el espejo **EE′**.

$\overline{AP} = \overline{A'P}$; $\overline{AQ} = \overline{A'Q}$.



3 Demuestra que los triángulos FHJ y GHI son semejantes.



Double (1940). Paul Klee.

- Obtén las medidas de $\overline{AB}$, $\overline{FJ}$ y $\overline{HI}$ si $\overline{AC}$ = 4.5, $\overline{CD}$ = 1.6, $\overline{BE}$ = 1.2, $\overline{FH}$ = 8.2, $\overline{HJ}$ = 9.5, $\overline{GH}$ = 7.3 y $\overline{GI}$ = 9. ***AB** = 3.375 ; **FJ** = 10.11 ; **HI** = 8.46.*

Atención a la diversidad

Refuerzo: Formados en grupos pequeños, leerán y comentarán el texto sobre el arte fotográfico y sus inicios y sus fundamentos en las propiedades físicas de la luz que son la materia prima de la óptica geométrica.

Pida a los integrantes de los grupos que observen la figura ubicada en el margen derecho de la página y, luego, describan qué observan en esta imagen.

Comente a sus estudiantes que la imaginación y las matemáticas no se contraponen: se complementan como la cerradura y la llave. (*Jorge Luis Borge*, escritor argentino).

Ampliación: Pida a sus estudiantes que investiguen acerca de ley de la reflexión, que es uno de los fundamentos físicos en los que se basa el arte fotográfico. Después, organice una discusión con los resultados de esta investigación.

- **Desarrollo:** Motive a los grupos formados anteriormente para que lean las instrucciones y el texto de la actividad 2, que trata sobre el inicio de la fotografía por Louis Daguerre y los resultados obtenidos por Niepce en la captura de imágenes y los fundamentos del arte de la fotografía. Demostrarán que la ley de reflexión implica que la luz toma el camino más corto al reflejarse.
- **Cierre:** En la actividad 3, observarán las ilustraciones y, luego, demostrarán que los triángulos **EGI** y **FGH** son semejantes. Ofrézcales las orientaciones necesarias.

Aprender a aprender

Pregunte a sus estudiantes: *¿Necesitaron de ayuda adicional para realizar alguna de las actividades propuestas? ¿En qué consistió la ayuda?*

Indicadores de logro

- **Determina** la longitud de la circunferencia y de cualquiera de los círculos centrales en una obra de arte en la que se representan estas formas.
- **Determina** la longitud de un arco interceptado al inscribirse un cuadrado en un círculo.
- **Identifica** y **resuelve** problemas relacionados con el círculo y secciones circulares.

Más información

Comente a sus estudiantes que la longitud de la circunferencia se puede de determinar de dos maneras:

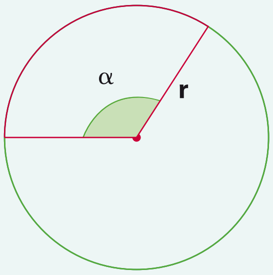
- Multiplicando pi por el diámetro.
- El peso de la carga de un camión depende de su capacidad.

$$L = \pi D$$

- Multiplicando dos veces el pi por el radio.

$$L = 2\pi r$$

Longitud de un arco de circunferencia



La longitud del arco de la circunferencia se obtiene multiplicando dos veces el pi por el radio y por el ángulo y se divide este producto entre 360°.

$$L = \frac{2 \cdot \pi \cdot r \cdot \alpha}{360°}$$

1 **Lee y, luego, haz lo que se te indica.**

Tondo Doni (1504). Pintura de Miguel Ángel (1475-1564).

El círculo, antes que una figura geométrica, fue un símbolo de la perfección. Asociado a la divinidad, el círculo sirvió de modelo al movimiento aparente de las estrellas alrededor de la Tierra, a la recurrencia del día y la noche y a las estaciones del año.

En el arte la presencia del círculo es notable. Es utilizado tanto para enmarcar en un ambiente de clausura a las obras, como elemento figurativo de la obra misma. En el *Tondo Doni* de Miguel Ángel, pintor y escultor italiano del Renacimiento, el círculo no solo enmarca la escena sino que ayuda al movimiento circular que se percibe en la acción sus personajes centrales.

- Resuelve los problemas.

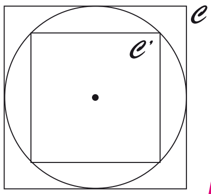
La tabla de la derecha mide 139.8 cm de ancho y 119.5 cm de alto. El diámetro del círculo central mide 86 cm y el de los círculos de cada esquina 33 cm.

- ¿Cuál es la circunferencia del círculo central y de cualquiera de los círculos menores de las esquinas? *270.18 cm y 103.67 cm, respectivamente.*
- Si uno de los ángulos centrales del círculo mayor mide 65°, ¿qué longitud tendría el arco interceptado por sus rayos? *48.78 cm.*

La mesa de los pecados capitales (alrededor de 1508). Obra de Jerónimo Bosch (1450-1516).

La pintura mural de la mujer que sostiene en su mano izquierda el libro está formada por un cuadrado que circunscribe a una circunferencia.

- Si se inscribe un cuadrado en el círculo de la pintura mural, ¿cuál sería la razón de los perímetros **P**($\mathcal{C}$)/ **P**($\mathcal{C}'$) de los cuadrados?



P($\mathcal{C}$)/ P($\mathcal{C}'$) = $\sqrt{2}$.

La poetisa de la casa de Libanio (Siglo I a.e.c.). Pintura mural romana de Pompeya.

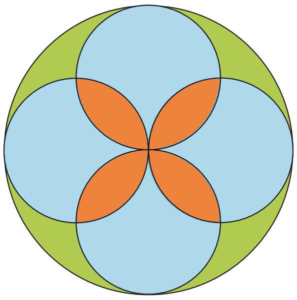
Sugerencias didácticas

- **Inicio:** Forme a sus estudiantes en grupos pequeños, luego, pídales que lean y comenten las instrucciones y las informaciones sobre el significado del círculo antes de ser considerado una figura geométrica. Haga que observen las ilustraciones y, después, anímeles a leer y comentar las posibles soluciones de los problemas planteados.
- **Desarrollo:** Motive a los grupos para que lean la situación planteada y los datos disponibles para calcular la longitud de la circunferencia del círculo central y los círculos menores de la obra de Jerónimo Bosch. A continuación, determinarán cuál sería la razón de los perímetros, si se inscribe un cuadrado en el círculo que contiene la figura de la mujer en la pintura romana de Pompeya.

2 **Observa abajo el modelo de una pintura moderna con círculos en distintas posiciones relativas. Traza sobre una cartulina las circunferencias indicadas y, luego, coloréalas.**

- Secantes, ambas con un radio de 5 cm y cuyos centros estén separados 8 cm.
- Tangentes exteriores, una de ellas con un radio de 10 cm y cuyos centros estén a 15 cm uno de otro.
- Tangentes interiores, con radios de 8 cm y 5 cm.
- Exteriores con radios de 12 cm y 15 cm.
- Tres circunferencias de radio 7 cm, tangentes entre sí y cuyos centros sean vértices de un triángulo equilátero.

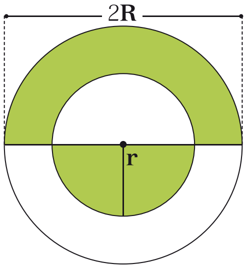
3 **Prueba que las partes anaranjada y verde del vitral tienen igual área.**



■ ¿Qué procedimiento empleaste para probar la igualdad de las áreas? Compártelo en el aula.

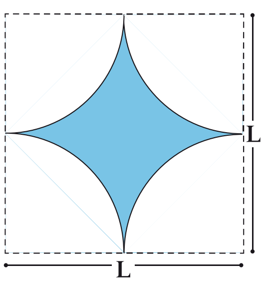
Ritmos (1934). Obra de Robert Delaunay.

4 **Calcula el perímetro de los motivos decorativos coloreados.**



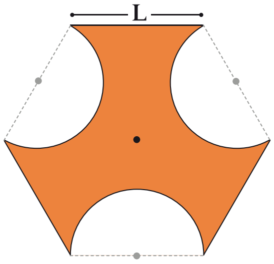
R = 18 cm; **r** = 10 cm.

155.38 cm.



R = 15 cm.

16π cm.



L = 12 cm.

92.55 cm.

- **Desarrollo:** Motive a los grupos formados anteriormente para que lean y comenten las instrucciones y el problema planteado en la actividad 2 y para que observen las ilustraciones. Después, motíveles para que observen la imagen de la pintura moderna formada por círculos diversos. Trazarán sobre una cartulina las circunferencias que se les indican y, luego, las colorearán. Sería interesante que los resultados de esta actividad se presentaran en el grupo de estudiantes.
- **Cierre:** En la actividad 3, observarán el vitral denominado *Ritmos*, obra de *Robert Delaunay*. Probarán que las partes anaranjada y verde del vitral tienen la misma área. En la actividad 4, calcularán el perímetro de los motivos decorativos representados. Acompáñeles en el proceso de realización de estas actividades

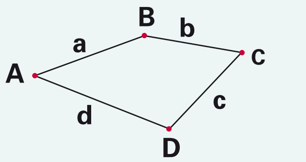
Atención a la diversidad

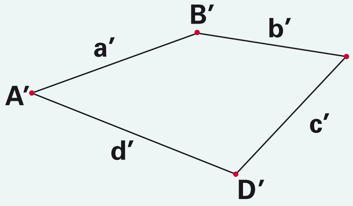
Refuerzo: Razón de los perímetros de dos polígonos semejantes.

La razón de los perímetros de dos polígonos semejantes es igual a la razón de semejanza de ambos polígonos.

Tomando como referencia los polígonos semejantes:

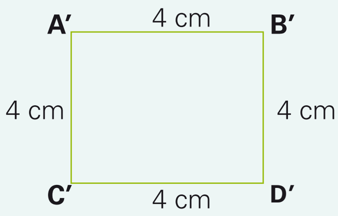
ABCD y **A′B′C′D′**.

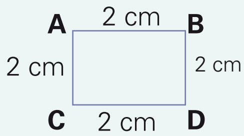




Sea **r** la razón de semejanza. Entonces:

r = **a**/**a′** = **b**/**b′** = **c**/**c′** = **d**/**d′**





La razón de semejanza de estos dos cuadrados es 2.

La razón de los perímetros es $\frac{16}{8} = 2$.

Aprender a aprender

Pregunte a sus estudiantes: *¿Hubo alguna dificultad que superar al trabajar con las actividades de estas páginas? ¿Qué pasos dieron para superarlas?* Discuta las respuestas con el grupo.

Indicadores de logro

- **Traza** la manera de cómo se relejan los rayos en espejos convexos. **Prueba** que un objeto y su imagen relejadas en un espejo convexo, son semejantes. **Prueba** que la ley de reflexión implica que la luz toma el camino más corto al reflejarse. **Demuestra** la semejanza de dos triángulos representados en un diseño artístico. **Determina** la longitud de la circunferencia y de cualquiera de los círculos centrales en una obra de artes en la que se representan estas formas. **Determina** la longitud de un arco interceptado al inscribirse un cuadrado en un círculo. **Identifica** y **resuelve** problemas relacionados con el círculo y secciones circulares. **Utiliza** recursos virtuales y electrónicos: computadora, softwares educativos, juegos interactivos y otros, en la búsqueda de información.

Competencias específicas

- Comunica.
- Razona y argumenta.
- Modela y representa.
- Usa algoritmos.
- Conecta.

Competencias fundamentales

Modela y representa

Es necesario que adquieran las habilidades necesarias para reconocer rectas, segmentos, rayos y ángulos, aplicar el teorema de Tales en el cálculo de longitudes e identificar figuras semejantes y sus propiedades.

Usa lgoritmos

Seguir literalmente las reglas y procedimientos en la resolución de operaciones aritméticas son vitales para la persecución de resultados correctos.

Conecta

Aplicar los conocimientos sobre las características de la circunferencia y el círculo y para identificar y resolver problemas que los involucran.

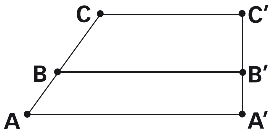
SABER HACER

Los segmentos determinados por la intersección de tres líneas paralelas sobre dos rectas secantes son proporcionales.

Comunica

1 Traduce a una frase del lenguaje coloquial la expresión algebraica siguiente.

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}$$

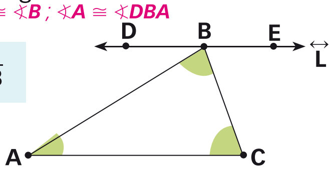


Razona y argumenta

2 Observa la figura siguiente y, a partir de ella, prueba que la suma de los ángulos internos de un triángulo es 180º.

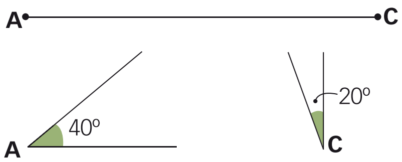
∢A ≅ ∢DBA ; ∢B ≅ ∢B ; ∢A ≅ ∢DBA

$\overleftrightarrow{L} \parallel \overline{AB}$



Modela y representa

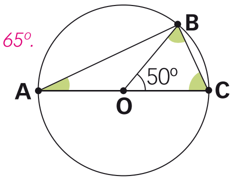
3 Construye un triángulo, conocidos los ángulos **A** y **C** y el lado comprendido $\overline{AC}$.



Usa algoritmos

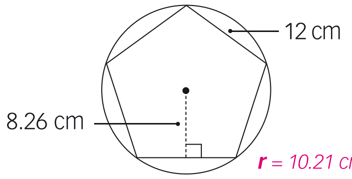
4 Determina las medidas de los ángulos coloreados del triángulo de la figura.

m ∢A = 25º ;
m ∢B = m ∢C = 65º.



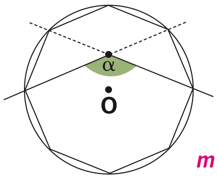
- Si el radio de la circunferencia es de 15 cm y la cuerda $\overline{BC}$ tiene una longitud de 12.68 cm, ¿cuánto mide la cuerda $\overline{AB}$? *$\overline{AB}$ = 27.19 cm.*
- ¿Cuál es el área del triángulo **ABC**? *Área = 172.38 cm².*

5 Calcula la longitud de la circunferencia circunscrita en el pentágono regular.



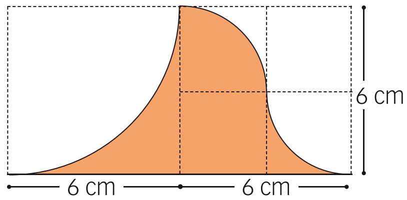
r = 10.21 cm.

6 Obtén la medida del ángulo α.



m ∢α = 135º.

7 Calcula el perímetro de la figura coloreada.

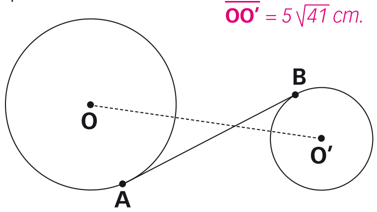


P = 18.85 cm.

Conecta

8 Resuelve el problema.

En una instalación se muestran dos piezas circulares conectadas con un hilo tangente a ambos círculos como se muestra. Si los radios de los círculos miden 15 cm y 10 cm y la longitud del hilo tangente a ambos es de 20 cm, ¿a qué distancia $\overline{OO'}$ están sus centros? *$\overline{OO'} = 5\sqrt{41}$ cm.*



- Describe el procedimiento que usaste para determinar la distancia $\overline{OO'}$.

Sugerencias didácticas para el *Saber hacer*

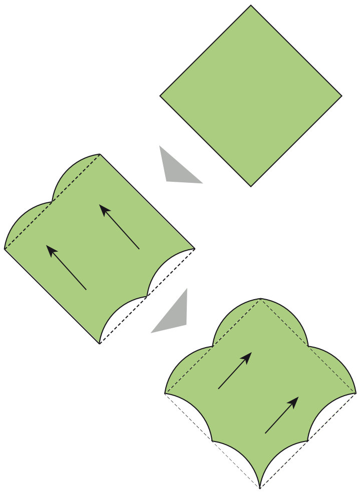
Las actividades propuestas en esta página están estrechamente vinculadas a los conceptos y procedimientos desarrollados a lo largo de esta unidad de aprendizaje. Haga que lean cuidadosamente las instrucciones y, después, verifique las respuestas obtenidas.

Es importante observar de cerca que los estudiantes siguen las instrucciones y los procedimientos para determinar medidas de ángulos, calcular longitudes y perímetros de polígonos diversos.

9 **Aprendizaje por descubrimiento**. Lean el texto y, luego, hagan lo que se les pide.

Una teselación es regular, cuando un plano es cubierto por polígonos regulares congruentes. Si el plano es cubierto por más de un polígono regular, la teselación es semirregular, y si los polígonos son irregulares, la teselación es irregular.

- Fíjense en la operación sobre el cuadrado de la derecha: desde dos de sus lados se extraen dos segmentos circulares iguales y se pegan en los lados opuestos. ¿Qué figura resulta? ¿Tiene igual área que el cuadrado original? ¿Por qué?
- Sobre una cartulina, intenten formar una teselación utilizando varias de las figuras obtenidas mediante la transformación de cuadrados congruentes descrita arriba. ¿Se consigue teselar el plano con ellas? ¿Por qué?
- Socialicen y comenten los resultados obtenidos.



10 Responde las preguntas.

- ¿Por qué el descubrimiento de armonías y regularidades en los fenómenos, formas y sonidos del entorno estimula a la mentalidad matemática?
- ¿Qué relaciones puedes establecer entre las diversas artes y las distintas ramas de la Matemática? Da ejemplos.

APRENDIZAJE AUTÓNOMO

11 Marca según tus logros.

	Iniciado	En proceso	Logrado
• Reconozco rectas, segmentos, rayos y ángulos.			
• Aplico el teorema de Tales al cálculo de longitudes.			
• Identifico triángulos semejantes y sus propiedades.			
• Identifico y resuelvo problemas sobre circunferencias.			
• Reconozco secciones de la circunferencia y el círculo.			
• Valoro la importancia del arte en la cultura.			

12 Reflexiona sobre tu aprendizaje y responde.

- ¿Trabajaste con interés y entusiasmo las actividades de esta unidad? ¿Por qué?
- ¿Cuáles actividades te parecieron más interesantes? Expón tus razones.

Actitudes y valores

Creatividad

En la sección destinada a *Actitudes y valores*, actividad 10, responderán por qué el descubrimiento de armonías y regularidades en los fenómenos, formas y sonidos del entorno estimula a la mentalidad matemática. Expresarán qué relaciones pueden establecer entre las diversas artes y las distintas ramas de la Matemática. Darán ejemplos.

Criterios de evaluación

Competencia comunicativa:

- Adaptación de las representaciones gráficas, simbólicas y numéricas a la situación de comunicación..

Competencia algoritmos:

- Seguimiento de las reglas, instrucciones y procedimientos.

Competencia de conexión:

- Aplicación de los conocimientos a situaciones cotidianas, de otras ciencias y de la propia Matemática.
- En el apartado *Aprendizaje autónomo*, actividad 11, evaluarán por ellos mismos si el nivel de conocimiento de la unidad se encuentra en estado de iniciación, en proceso o logrado. En la actividad 12, reflexionarán sobre su aprendizaje.

Aprendizaje por descubrimiento

Actividad 9. Formados en grupos, los estudiantes leerán las instrucciones, el concepto de teselación regular y, luego, observarán en las ilustraciones ubicadas a la derecha, la operación sobre el cuadrado, al cual, desde dos de sus lados, se extraen dos segmentos circulares iguales y se pegan en sus lados opuestos. Intentarán formar una teselación utilizando varias figuras obtenidas con esta transformación. Finalmente, socializarán y comentarán los resultados obtenidos.

Aprender a aprender

Motive a sus estudiantes para que expresen la importancia de las aplicaciones cotidianas de los conceptos desarrollados en esta unidad de aprendizaje. Por ejemplo, pregunte al grupo: *¿Qué deben tomar en cuenta para elaborar un mural con decoraciones circulares?* Discuta las diversas respuestas con el grupo.

6 Áreas del círculo y de secciones circulares

Propuesta de programación

COMPETENCIAS	CONTENIDOS
Específicas • **Razona y argumenta**: **Justifica** los pasos dados en las demostraciones relacionadas con el área del círculo y las secciones circulares. • **Comunica**: **Describe** los pasos dados en las demostraciones relacionadas con el área del círculo y las secciones circulares. • **Modela y representa**: **Usa** el círculo y las secciones circulares en construcciones geométricas diversas. • **Usa algoritmos**: **Sigue** las reglas que le permiten obtener un resultado al resolver problemas que involucran el círculo y las secciones circulares. • **Conecta**: **Relaciona** el círculo y las secciones circulares con situaciones de la cotidianidad. • **Resuelve problemas**: **Resuelve** y **elabora** problemas de su entorno cotidiano, utilizando el círculo y las secciones circulares. • **Utiliza herramientas tecnológicas**: **Utiliza** soportes tecnológicos como la Internet, la calculadora científica y otros dispositivos. **Fundamentales** **Resolución de problemas**: **Identifica** y **utiliza** estrategias, y **genera** alternativas de solución**.**	**Conceptos** • Área de un círculo. • Áreas de un sector y un segmento circular. • Áreas de una corona y un trapecio circulares. • Circunferencia y círculo en el plano cartesiano. **Procedimientos** • Conocimiento y determinación del área del círculo. • Reconocimiento de sectores y segmentos circulares. • Cálculo del área de sectores y segmentos circulares. • Reconocimiento de coronas y trapecios circulares. • Cálculo del área de coronas y trapecios circulares. • Reconocimiento de las expresiones de la circunferencia y el círculo en el plano cartesiano. **Actitudes y valores** • Valoración de la creatividad humana. • Apreciación del papel de la geometría en el desarrollo de diversas artes.

Tiempo estimado de trabajo: 2 semanas

INDICADORES DE LOGRO

- **Reconoce** el concepto de *área del círculo* y **la determina**.
- **Reconoce** el concepto de *sector y segmentos circulares* y **calcula** sus áreas.
- **Reconoce** coronas y trapecios circulares y **calcula** sus áreas.
- **Reconoce** las expresiones de la circunferencia y el círculo en el plano cartesiano.
- **Resuelve** problemas del contexto que involucran áreas del círculo y de secciones circulares.
- **Utiliza** recursos virtuales y electrónicos: computadora, programas educativos, juegos interactivos y otros, en la búsqueda de información.

Valor transversal: Creatividad

Recursos digitales

Plataforma digital — CD

BIBLIOTECA DEL DOCENTE

- DOCUMENTOS PARA LA PLANIFICACIÓN

CUADERNO DE ACTIVIDADES

UNIDAD 6	Áreas del círculo y de secciones circulares

RECURSOS DE REFUERZO Y AMPLIACIÓN

LibroMedia

ACTIVIDADES INTERACTIVAS

PÁGINA 107	Área del círculo.
PÁGINA 108	Área del círculo.
PÁGINA 110	Área del círculo y del sector circular.

CD DE RECURSOS DIGITALES: PLAN REGULAR

Pleno — PRUEBA DE EVALUACIÓN FORMATIVA DE LA UNIDAD

Estrategias pedagógicas

- Recuperación de experiencias previas.
- Trabajo en equipo.
- Aprendizaje basado en problemas (ABP).

Unidad 6

- **Lee** y **comenta** las informaciones expuestas en el apartado *Punto de partida*.
- **Responde** preguntas relacionadas con las informaciones expuestas en el apartado *Punto de partida*.
- **Recupera** experiencias vividas mediante la observación de las imágenes de la ilustración.
- **Analiza** un problema de la vida cotidiana vinculado a los conceptos y procedimientos que desarrollarán en la unidad en el apartado *Analiza el problema*.
- **Plantea** soluciones al problema leído y analizado anteriormente, en el apartado *Plantea una solución*.

Apertura de la unidad

Dentro de los objetivos principales de la apertura de esta unidad se encuentran el plantear una situación de aprendizaje, una problemática o un texto que sirve para contextualizar el tema de la unidad. Todo esto con la finalidad de motivar y despertar la curiosidad de los estudiantes.

A partir de la situación o texto planteado, el problema a analizar y las imágenes de la ilustración se conecta al estudiante con el tema a tratar, a la vez que vincula con la realidad o cotidianidad los temas que se van a desarrollar.

Todos los elementos que conforman la portada promueven la recuperación de experiencias o conocimientos previos y la motivación o el interés por los conocimientos que adquirirán en la unidad.

6 Áreas del círculo y de secciones circulares

Conceptos

- Área de un círculo.
- Áreas de un sector y un segmento circulares.
- Áreas de una corona y un trapecio circulares.
- Circunferencia y círculo en el plano cartesiano.

Procedimientos

- Inferir propiedades y relaciones en figuras geometricas.
- Resolución de problemas.

Actitudes y valores

- Valoración de la creatividad humana.
- Aprecio el papel de la Geometría en el desarrollo del arte.

Jardín. Diseño con formas poligonales.

Punto de partida

La jardinería conoció un desarrollo notable durante el Renacimiento. A partir del siglo XV la jardinería adoptó diseños de gran belleza y complejidad.

El jardín renacentista dejó de ser un huerto o un herbolario, proveedores de especies vegetales para el uso práctico, para convertirse en una representación con fines estéticos y de recreación. La belleza, extensión y complejidad de los ornamentos del jardín llegaron a convertirse en un símbolo indicativo del poder social y económico de las clases pudientes. Con el tiempo, el jardín se enriquece con la llegada de plantas exóticas provenientes de Asia y el Nuevo Mundo pasando a ser jardín botánico, donde se experimentaban técnicas de trasplante, aclimatación y cruce de especies vegetales, lo que dio un impulso al conocimiento científico del mundo vegetal.

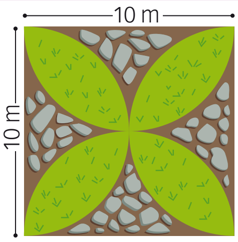
El diseño de jardines supuso un innegable conocimiento de las propiedades de figuras geométricas poligonales y curvilíneas y de los principios de la geometría del espacio.

- ¿Qué importancia ambiental y para la investigación tienen los jardines botánicos? ¿Has visitado alguno?

ANALIZA EL PROBLEMA

Un diseñador tiene en boceto un proyecto de jardín que mostrará al cabildo de su ciudad para que considere su instalación en una plaza. Su diseño es el de la derecha.

¿Qué debe hacer para determinar el área verde de su proyecto de jardín?



106

Trabajo colectivo de apertura

- **Punto de partida:** Guíe a sus estudiantes a leer y comentar en el grupo las informaciones expuestas en el apartado *Punto de partida*, que tratan sobre el surgimiento de la jardinería durante el Renacimiento y su evolución pasando a ser jardín botánico.
- **Analiza el problema:** En este apartado se plantea que se quiere calcular el área verde de un boceto para un proyecto de un jardín que se mostrará al cabildo de la ciudad.
- **Plantea una solución:** En este apartado responderán preguntas relacionadas con las estrategias a seguir para determinar el área de la zona verde del jardín que se desea construir.

Imagen 3D de un laberinto de jardín. En los jardines renacentistas eran comunes los laberintos intrincados.

Jardín de arena. Un tipo de jardín usual en templos budistas de Japón.

PLANTEA UNA SOLUCIÓN

- Piensa en el problema planteado y traza una estrategia para determinar el área de la zona verde del jardín.
  - ¿Qué elementos tomarías en cuenta para abordar el problema?
  - Describe los pasos que darías para resolver el problema.

    $A = 57.08\ m^2$.
  - Ensaya la resolución del problema dando esos pasos. ¿A qué resultados te llevan esos pasos?
- Compara los resultados que obtuviste con los de tus compañeros de curso. ¿Emplearon el mismo procedimiento?

Esquema conceptual de la unidad

Áreas del círculo y de secciones circulares

La Geometría determina el

Área del círculo

y las áreas del

- Sector circular
- Segmento circular
- Corona y trapecio circulares

Circunferencia y círculo en el plano cartesiano

Actividad de motivación

Pida a sus estudiantes que lean en la sección: *Conceptos y procedimientos*, los temas que trabajarán en la unidad y las actitudes y valores que estarán presentes en el desarrollo de la misma. Luego, para que interioricen la importancia de la utilidad de conocer cómo se determinan las áreas del círculo y secciones circulares en la vida cotidiana, formúleles preguntas como las siguientes: *¿Qué objetos en nuestro entorno tienen forma circular? ¿Tienen decoraciones en sus casas con esta característica? ¿Cuál es la importancia de saber el espacio que ocupa un adorno, un objeto o una fuente con forma circular? ¿Recuerdan qué datos se necesitan para calcular el área de un círculo?*

Actividad interactiva

Área del círculo

Esta es una actividad interactiva de recuperación de experiencias, en la que determinarán el área de diversos círculos de medidas especificadas y, luego, relacionarán con flechas las expresiones correspondientes.

Actitudes y valores

Creatividad

Aproveche la situación planteada en el apartado *Punto de partida* y las imágenes de la ilustración para conversar con sus estudiantes acerca del papel que han jugado las formas geométricas en innumerables situaciones de la cotidianidad. Pregunte al grupo: *¿Qué papel juega la Geometría en el diseño y la decoración? ¿Qué formas geométricas pueden identificarse en la naturaleza?*

Indicadores de logro

- **Reconoce** el concepto de *área del círculo* y **la determina**.

Actividad interactiva

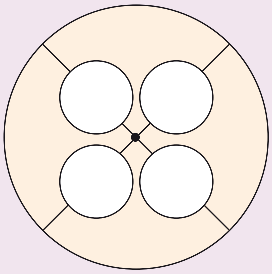
Área del círculo

Actividad interactiva en la que determinarán el área de diversas figuras circulares cuyas características se les indican y, luego, relacionarán con flechas dichas figuras con sus áreas correspondientes.

Otras actividades

Motive a sus estudiantes para que resuelvan problemas de la cotidianidad de aplicaciones del cálculo del área del círculo.

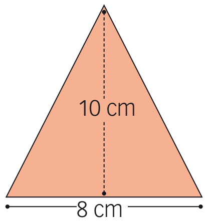
- Calcular el área sombreada de la siguiente figura, si el diámetro del círculo mayor es 16 m y el radio de los círculos menores es 2 m.



- El radio del círculo mayor es la mitad de su diámetro, es decir, $\frac{16}{2} = 8$ m.
- El área del círculo mayor es πr^2, es decir, (3.1416) (64) = 201.06 m^2.
- El área de uno de los círculos menores es πr^2, es decir, (3.1416) (4) = 12.57 m^2.
- El número de círculos menores es 4, por lo tanto, multiplicamos el área obtenida por 4, es decir, (4) (12.57) = 50.27 m^2.
- El área de la zona sombreada del círculo se obtiene restando al área del círculo mayor las áreas de los 4 círculos menores, es decir, 201.06 – 50.27 = 150.79 m^2.

RECUPERACIÓN

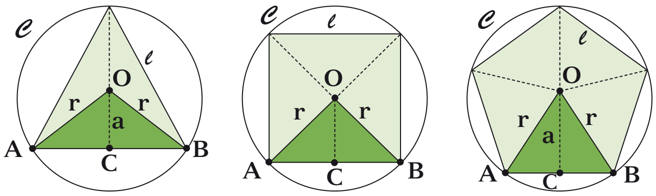
Obtén el área del siguiente triángulo isósceles



A = 40 cm².

1 Área el círculo

Observa la siguiente secuencia de polígonos regulares inscritos en la circunferencia $\mathcal{C}$.



Cada polígono regular, de **N** lados, puede ser descompuesto en **N** triángulos isósceles de lados congruentes iguales al radio, **r**, de $\mathcal{C}$.

En la secuencia se observa que, a medida que el número **N** de lados de los polígonos aumenta, las longitudes, **l**, de esos lados se hacen más pequeñas y el perímetro, **P** = **Nl**, de dichos polígonos se acerca a la circunferencia, 2π**r**.

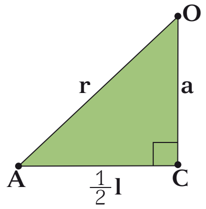
El área del círculo será siempre mayor que el área de los polígonos inscritos, pero a medida que **N** crece, esta área se aproxima a la de los polígonos inscritos.

A partir de lo anterior, se ve que:

$$\mathbf{A}_{\text{Círculo}} \approx \mathbf{N}\ .\ \text{Área } \Delta\mathbf{AOB} = \mathbf{N}\ .\ \frac{\mathbf{la}}{2}$$

La apotema, **a**, de acuerdo al teorema de Pitágoras es:

$$\mathbf{a} = \frac{1}{2}\sqrt{4\mathbf{r}^2 - \mathbf{l}^2}.$$



Luego: $\mathbf{A}_{\text{Círculo}} \approx \frac{\mathbf{N.l}}{2}\left(\frac{1}{2}\sqrt{4\mathbf{r}^2 - \mathbf{l}^2}\right) = \frac{\mathbf{N.l}}{4}\left(\sqrt{4\mathbf{r}^2 - \mathbf{l}^2}\right)$

Si **N** crece indefinidamente, **l** disminuye hasta hacerse casi 0 y el perímetro de los polígonos, **N.l**, se acerca a la circunferencia, 2π**r**:

$$\mathbf{A}_{\text{Círculo}} = \frac{\mathbf{N.l}}{4}\left(\sqrt{4\mathbf{r}^2 - \mathbf{l}^2}\right) = \frac{(2\pi\mathbf{r})}{4}\left(\sqrt{4\mathbf{r}^2 - 0^2}\right) = \pi\mathbf{r}^2$$

El área de un círculo es el resultado de multiplicar π por el cuadrado de su radio.

Sugerencias didácticas

- **Inicio:** Oriente a sus estudiantes para que lean y resuelvan la actividad vinculada a la recuperación de experiencias previas propuesta en el apartado *Recuperación*, en la que determinarán el área del triángulo isósceles representado.
- **Desarrollo:** : Pida a sus estudiantes que lean cuidadosamente el contenido de la doble página, que observen las representaciones gráficas y el desarrollo de los ejemplos resueltos. Formúleles preguntas como, por ejemplo: *¿Cuál es la relación de las áreas del círculo y un polígono inscrito en el mismo? ¿Qué ocurre cuando aumenta el número de lados del polígono inscrito en la circunferencia?*

2 Otras expresiones para obtener el área del círculo

Si **d** es el diámetro de la circunferencia, $\mathbf{r} = \mathbf{d}/2$ y el área del círculo se obtiene con:

$$\mathbf{A} = \pi\mathbf{r}^2 = \pi(\mathbf{d}/2)^2 = \pi\,\mathbf{d}^2/4.$$

El área de un círculo es una cuarta parte del producto de π por el cuadrado de su diámetro.

Si en $\mathbf{A} = \pi\mathbf{r}^2$, se multiplica el miembro derecho de la igualdad por $4\pi/4\pi$, se obtiene:

$$\mathbf{A} = (4\pi/4\pi)\pi\mathbf{r}^2 = 4\pi^2\mathbf{r}^2/4\pi = (2\pi\mathbf{r})^2/4\pi = \mathbf{C}^2/4\pi.$$

El área de un círculo es el resultado de dividir el cuadrado de su circunferencia por 4π.

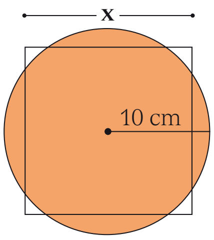
EJEMPLO RESUELTO:

- El *problema de la cuadratura de un círculo* consistía en transformar, usando solo regla y compás, un círculo de área dada en un cuadrado de igual área. Es un problema irresoluble con procedimientos de la Geometría, pero con solución algebraica. ¿Qué longitud, **x**, debe tener el lado de un cuadrado para que su área sea igual a la del círculo?

$$\mathbf{A}_{\text{Cuadrado}} = \mathbf{x}^2;\ \mathbf{A}_{\text{Círculo}} = \pi\mathbf{r}^2.$$

Como para conseguir la cuadratura del círculo ambas áreas deben ser iguales: $\mathbf{x}^2 = \pi\mathbf{r}^2$. Entonces: $\mathbf{x} = \sqrt{\pi}\,\mathbf{r}$.

El cuadrado debe tener lados de longitud $10\sqrt{\pi}$ cm.



ACTIVIDADES

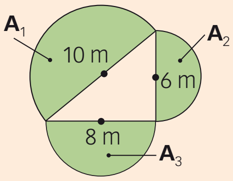
1 Obtén el área de cada uno de los círculos especificados.

- Un círculo de radio 18 cm. ***A*** *= 1 017.88 cm²*.
- Un círculo de diámetro 4.5 m. ***A*** *= 15.90 m²*.
- Un círculo de circunferencia 16 ". ***A*** *= 20.37 pulg²*.

2 Resuelve el problema.

El área común de un condominio tiene una zona verde que está formada por tres regiones semicirculares como las que se muestran en la figura de la derecha.

- ¿Cuál es el área de la zona verde? ***A*** *= 157.08 m²*.
- Comprueba que: $\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_3$. ¿Por qué pasa esto?

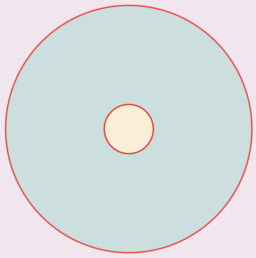


$10^2 = 6^2 + 8^2$; $10^2\ (\pi/4) = 6^2\ (\pi/4) + 8^2\ (\pi/4)$; $\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_3$.

Otras actividades

Motive a sus estudiantes para que resuelvan problemas de la cotidianidad de aplicaciones del cálculo del área del círculo.

- Se construirá un parque con forma circular con una fuente con la misma forma en su centro. El parque tendrá 1 200 metros de diámetro y el radio de la fuente medirá 7 metros de longitud. *¿Cuál es el área que corresponderá al parque?*



- El radio del círculo mayor es la mitad de su diámetro, es decir, $1\frac{200}{2} = 600$ m.
- El área del círculo mayor es πr^2, es decir, (3.1416) (360 000) = 1 130 976 m².
- El área de la fuente es πr^2, es decir, (3.1416) (49) = 153.94 m².
- El área que corresponderá al parque se obtiene restando al área total del círculo, el área correspondiente a la fuente, es decir, 1 130 976 – 153.94 = 1 130 822.06 m².

Ficha 29.

- **Desarrollo:** Muéstreles los ejemplos de los conceptos desarrollados en la doble página y diseñe otros más para el cuaderno y enviarles a la pizarra. Motíveles para que resuelvan problemas cotidianos de aplicación al cálculo de área de figuras circulares similares a los desarrollados en las actividades adicionales de esta Guía.
- **Cierre:** Motive a sus estudiantes a realizar los ejercicios del apartado *Actividades*. En la actividad 1, obtendrán el área de cada uno de los círculos especificados. En la actividad 2, determinarán el área de la zona verde de un condominio que consta de tres regiones semicirculares como se muestran en la figura de la derecha de la página. Ofrézcales las orientaciones necesarias.

Aprender a aprender

Pregunte a sus estudiantes: *¿Qué conocimientos previos tienen relacionados con el área del círculo? ¿Estos conocimientos facilitaron o no su aprendizaje?*

Indicadores de logro

- **Reconoce** el concepto de *sector* y *segmentos circulares* y **calcula** sus áreas.

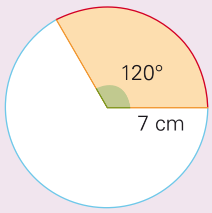
Actividad interactiva

Área del círculo y del sector circular

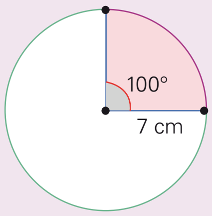
Se trata de una actividad interactiva, en la que determinarán el área de círculos y sectores circulares diversos y, luego, arrastrarán los valores a las expresiones correspondientes.

Otras actividades

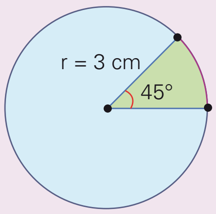
Proponga a sus estudiantes que determinen el área de los sectores circulares representados en las siguientes figuras.



- **A** = (120°)(3.1416)(3)^2 ÷ 360° = 9.43 cm^2.



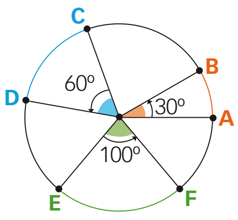
- **A** = (100°)(3.1416)(7)^2 ÷ 360° = 42.76 cm^2.



- **A** = (4 5°)(3.1416)(3)^2 ÷ 360° = 3.53 cm^2.

RECUPERACIÓN

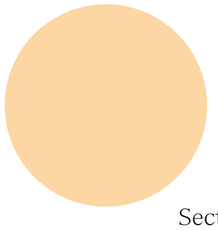
Determina la longitud de cada arco coloreado, si el radio del círculo es 10 cm.

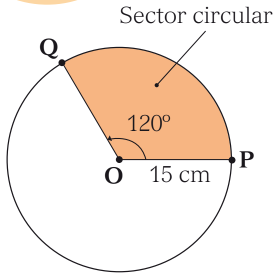


∡(AB) = 5.236 cm.

∡(CD) = 10.472 cm.

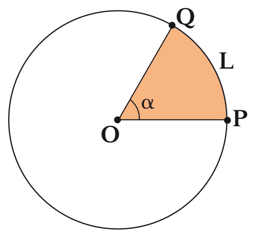
∡(EF) = 17.453 cm.





1 Área de un sector circular

Un sector circular es la parte del círculo comprendida entre dos posiciones distintas de su radio.



A mayor longitud del arco, mayor área del sector circular. Esto muestra que el área de un sector es directamente proporcional a la longitud del arco interceptado por el ángulo central.

De acuerdo a lo anterior, se establece la siguiente proporción:

$$\frac{\mathbf{A}}{\pi\mathbf{r}^2} = \frac{\mathbf{L}}{2\pi\mathbf{r}}$$

De donde se obtiene que: $\mathbf{A} = \frac{(\pi\mathbf{r}^2)\mathbf{L}}{2\pi\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{rL}}{2}$.

El área de un sector circular es la mitad del producto del radio por la longitud del arco interceptado.

La expresión anterior puede comprobarse si al sustituir **L** por la longitud de la circunferencia, $2\pi\mathbf{r}$, se obtiene el área del círculo:

$$\mathbf{A} = \frac{\mathbf{r}(2\pi\mathbf{r})}{2} = \pi\mathbf{r}^2$$

Si se conoce la medida en radianes del ángulo, α, entonces:

$$\mathbf{A} = \frac{\mathbf{rL}}{2} = \frac{\mathbf{r}(\alpha\mathbf{r})}{2} = \frac{\alpha\mathbf{r}^2}{2}$$

Si α está medido en el sistema sexagesimal: $\mathbf{A} = \frac{\alpha\pi\mathbf{r}^2}{360°}$.

EJEMPLO RESUELTO:

- Determinar el área del sector circular de la izquierda.

  Como α = 120°, se emplea la segunda fórmula:

  $\mathbf{A} = \frac{\alpha\pi\mathbf{r}^2}{360°} = \frac{120°\ \pi\ (15\text{ cm})^2}{360°} = 235.62\text{ cm}^2$ es el área buscada.

Sugerencias didácticas

- **Inicio:** Oriente a sus estudiantes para que lean y realicen en el aula la actividad vinculada a recuperación de experiencias previas propuesta en el apartado *Recuperación*, en la que determinarán la longitud de cada arco coloreado, conocido el valor del radio del círculo.
- **Desarrollo:** Pida a sus estudiantes que lean cuidadosamente el contenido de la doble página, que observen las representaciones gráficas y el desarrollo de los ejemplos. Haga que lean y reproduzcan en sus cuadernos ejemplos resueltos y sus gráficos correspondientes.

2 Área de un segmento circular

Un segmento circular es la parte del círculo comprendida entre una cuerda y el arco comprendido entre sus extremos.

El área del segmento circular es la diferencia del área del sector **POQ** y el área del triángulo **POQ**:

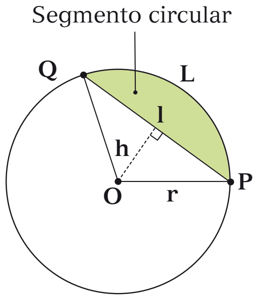
$$\mathbf{A}_{\text{Segmento}} = \mathbf{A}_{\text{Sector}} - \mathbf{A}_{\text{Triángulo}}$$

De donde se obtiene que: $\mathbf{A} = \frac{\mathbf{rL}}{2} - \frac{\mathbf{lh}}{2} = \frac{1}{2}(\mathbf{rL} - \mathbf{lh})$

En la expresión anterior **r** es el radio del círculo; **L**, la longitud del arco $\overset{\frown}{\mathbf{PQ}}$; **l**, la longitud de la cuerda y **h** la altura del triángulo **POQ**.

La altura, **h**, del triángulo **POQ** se obtiene mediante el teorema de Pitágoras:

$$\mathbf{h} = \sqrt{\mathbf{r}^2 - (\mathbf{l}/2)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{4\mathbf{r}^2 - \mathbf{l}^2}.$$



EJEMPLO RESUELTO:

- Determina el área del sector circular de la derecha.

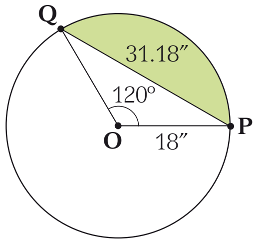
Aquí: $\mathbf{r} = 18''$; $\mathbf{l} = 31.18''$; $\alpha = 120°$.

$\mathbf{h} = \frac{1}{2}\sqrt{4\mathbf{r}^2 - \mathbf{l}^2} = \frac{1}{2}\sqrt{4(18)^2 - 31.18^2} = 9''.$

$\mathbf{L} = \alpha \,.\, \mathbf{r} = \frac{\alpha\pi r}{180°} = \frac{120°\,.\,\pi.\,15}{180°} = 31.42''.$

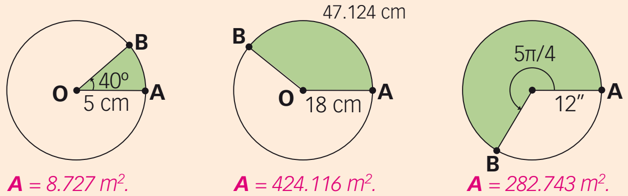
$\mathbf{A} = \frac{1}{2}(\mathbf{rL} - \mathbf{lh}) = \frac{1}{2}(18 \times 31.42 - 31.18 \times 9) = 142.47.$

El área del segmento circular es de 142.47 pulg^2.



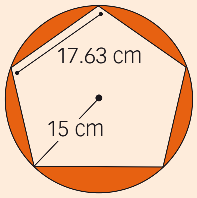
ACTIVIDADES

3 Obtén el área de cada sector circular.



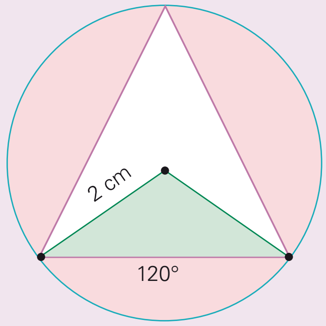
***A** = 8.727 m².* ***A** = 424.116 m².* ***A** = 282.743 m².*

4 Observa la figura de la derecha y determina el área de su parte coloreada. ***A** = 172 cm².*

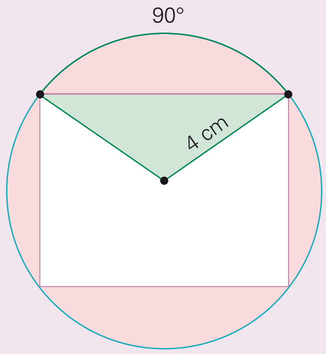


Atención a la diversidad

Actividades de refuerzo: Proponga a sus estudiantes que determinen el área de los sectores circulares representados en las siguientes figuras.



A = (120°)(3.1416)(2)^2 ÷ 360° = 4.19 cm^2.



A = (90°)(3.1416)(4)2 ÷ 360° = 12.57 cm^2.

Diseñe ejercicios adicionales a los expuestos en estas páginas para que los resuelvan en la pizarra y en sus cuadernos.

Ficha 30.

- **Desarrollo:** Muestre a sus estudiantes el desarrollo de los ejemplos de resueltos en estas páginas y diseñe otros más para enviarles a la pizarra. Pídales que observen y analicen las representaciones gráficas de los sectores y segmentos circulares y que realicen los gráficos en sus cuadernos.
- **Cierre:** Motive a sus estudiantes a realizar los ejercicios del apartado *Actividades*. En la actividad 3, obtendrán el área de cada uno de los sectores circulares representados. En la actividad 4, observarán la figura de la derecha y, luego, determinarán el área total de su parte coloreada calculando el área de los segmentos circulares. Revise los resultados en el grupo.

Aprender a aprender

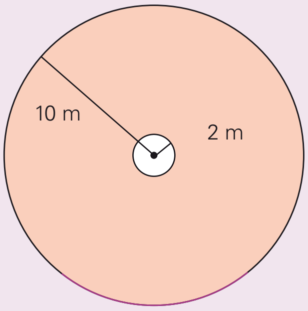
Pregunte a sus estudiantes: *¿Tuvieron alguna dificultad para calcular el área de sectores y segmentos circulares? ¿En qué consistió el problema? ¿Cómo lo superaron?*

Indicadores de logro

- **Reconoce** coronas y trapecios circulares y **calcula** sus áreas.

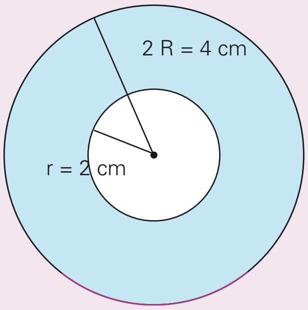
Otras actividades

Propóngales que calculen el área de las siguientes coronas circulares

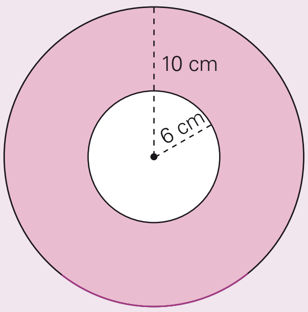


A = $\pi(\mathbf{R}^2 - \mathbf{r}^2)$

A = (3.1416) $(10^2 - 2^2) = 301.59\ \text{m}^2$.



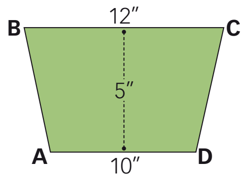
A = (3.1416) $(4^2 - 2^2) = 37.70\ \text{cm}^2$.



A = (3.1416) $(10^2 - 6^2) = 201.06\ \text{m}^2$.

RECUPERACIÓN

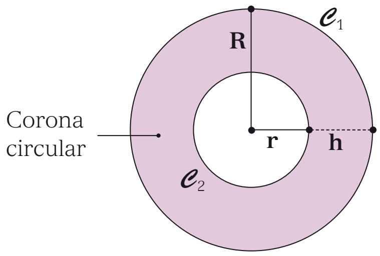
Describe cómo podrías calcular el área del polígono **ABCD**.



Responde: ¿cuál es su área?

1 Área de una corona circular

Una corona o anillo circular es la parte del plano comprendida entre dos circunferencias concéntricas.



Si el radio de la circunferencia mayor es **R** y el de la circunferencia menor **r**, el área de una corona es la diferencia de las áreas del círculo mayor y el círculo menor:

$$\mathbf{A} = \pi(\mathbf{R}^2 - \mathbf{r}^2)$$

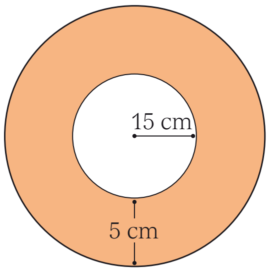
Tomando como punto de partida la expresión anterior puede deducirse otra expresión para el área de la corona circular. Para hacerlo se factoriza la diferencia de cuadrados, $\mathbf{R}^2 - \mathbf{r}^2$, y la expresión que resulta se multiplica por 2/2:

$$\mathbf{A} = \pi(\mathbf{R} + \mathbf{r})(\mathbf{R} - \mathbf{r}) = \frac{2}{2}\pi\,(\mathbf{R} + \mathbf{r})(\mathbf{R} - \mathbf{r}) = \frac{(2\pi\mathbf{R} + 2\pi\mathbf{r})}{2}\,(\mathbf{R} - \mathbf{r})$$

Puesto que $2\pi\mathbf{R}$ es la circunferencia mayor, $\mathscr{C}_1$; $2\pi\mathbf{r}$, la circunferencia menor, $\mathscr{C}_2$ y $\mathbf{R} - \mathbf{r} = \mathbf{h}$, el área de la corona circular puede expresarse en términos de estas nuevas variables:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}(\mathscr{C}_1 + \mathscr{C}_2)\mathbf{h}$$

El área de una corona circular es la semisuma de sus circunferencias mayor y menor, $\mathscr{C}_1 + \mathscr{C}_2$, multiplicada por la distancia, **h**, entre dichas circunferencias.



EJEMPLO RESUELTO:

- Determinar el área de la corona circular de la izquierda.

  Aquí: $\mathbf{r} = 15$ cm; $\mathbf{R} = \mathbf{r} + \mathbf{h} = 15$ cm + 5 cm = 20 cm.

  Entonces, el área se obtiene como sigue:

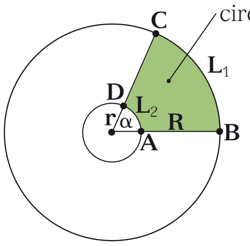
  $\mathbf{A} = \pi\,(\mathbf{R}^2 - \mathbf{r}^2) = \pi(20^2 - 15^2) = 175\pi = 549.78\ \text{cm}^2$.

Sugerencias didácticas

- **Inicio:** Oriente a sus estudiantes para que resuelvan en el aula la actividad de recuperación de experiencias previas propuesta en el apartado *Recuperación*, en la que describirán cómo podrían calcular el área del polígono **ABCD** representado y expresarán cuál es su área.
- **Desarrollo:** Haga que lean cuidadosamente el contenido de la doble página, que observen las representaciones gráficas y el desarrollo de los conceptos. Motíveles para que lean y reproduzcan en sus cuadernos los ejemplos resueltos.

2 Área de un trapecio circular

Un trapecio circular es la parte del plano entre dos posiciones distintas del radio mayor de una corona circular.



El área del trapecio circular es la diferencia de las áreas de los sectores circulares mayor y menor:

$$\mathbf{A} = \frac{\mathbf{R}\mathbf{L}_1}{2} - \frac{\mathbf{r}\mathbf{L}_2}{2}$$

Puesto que $\mathbf{L}_1 = \alpha\mathbf{R}$ y $\mathbf{L}_2 = \alpha\mathbf{r}$, entonces: $\mathbf{A} = \frac{1}{2}\alpha(\mathbf{R}^2 - \mathbf{r}^2)$.

EJEMPLO RESUELTO:

- Determina el área del trapecio circular **PQRS** que se muestra en el margen de la derecha.

En el trapecio circular **PQRS**:

$\alpha = 4\pi/9$; $\mathbf{h} = 8$ cm; $\mathbf{r} = 6$ cm;

$\mathbf{R} = \mathbf{r} + \mathbf{h} = 6 \text{ cm} + 8 \text{ cm} = 14$ cm.

Entonces:

$\mathbf{A} = \frac{1}{2}\alpha(\mathbf{R}^2 - \mathbf{r}^2) = \frac{1}{2}(4\pi/9)(14^2 - 6^2) = 111.70.$

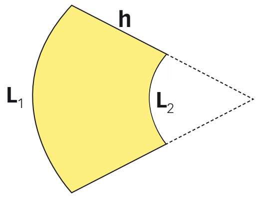
El área buscada es de 111.70 cm^2.

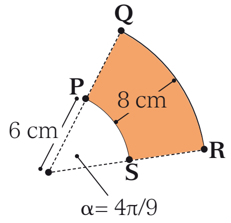
SABER MÁS

Otra fórmula para el área del trapecio circular

Si $\mathbf{L}_1$ y $\mathbf{L}_2$ son las longitudes de los arcos de un trapecio circular y **h** la diferencia de los radios:

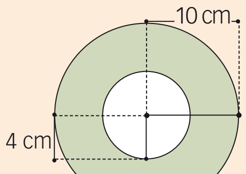
$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}(\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2)\mathbf{h}$$



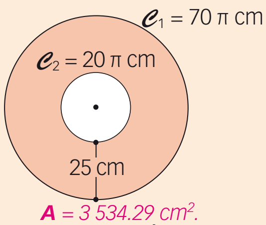


ACTIVIDADES

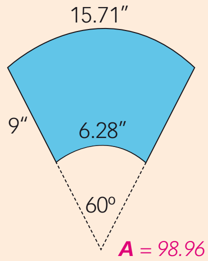
5 Determina el área de las secciones circulares siguientes.



A = 263.89 cm².



A = 3 534.29 cm².



A = 98.96 pulg².

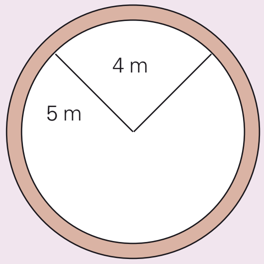
6 Piensa y, luego, responde con argumentos matemáticos.

- ¿Por qué se puede considerar a la corona circular como un trapecio circular?
Es un trapecio circular con ángulo central de 360º. Las circunferencias mayor y menor juegan el papel de los arcos mayor, L_1, y menor, L_2.

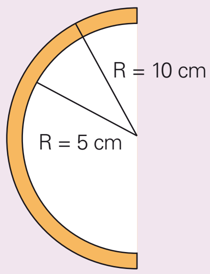
- **Desarrollo:** Muestre a sus estudiantes, con ejemplos prácticos, los pasos para calcular las áreas de la corona y el trapecio circulares. Explíqueles, con ejemplos diversos en la pizarra y, luego, motíveles para que los desarrollen en sus cuadernos. Haga que reproduzcan y analicen el contenido del apartado *Saber más*, que muestra otra fórmula para determinar el área del trapecio circular.
- **Cierre:** Motive a sus estudiantes a realizar los ejercicios del apartado *Actividades*. En la actividad 5, determinarán el área de las secciones circulares representadas. En la actividad 6, pensarán y, luego, responderán con argumentos matemáticos, por qué se puede considerar a la corona circular como un trapecio circular. Revise los resultados en el grupo.

Más inforamción

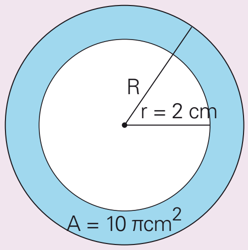
Forme a sus estudiantes en grupos de 3 o 4 integrantes. Luego, propóngales que calculen el área de las siguientes coronas circulares.



A = (3.1416) $(5^2 - 4^2)$ = 28.27 m^2.



A = (3.1416) $(10^2 - 5^2)$ = 235.62 cm^2.



En este caso, se despeja de la fórmula del área, el radio mayor.

$$R = \sqrt{\frac{A}{\pi} - r^2}$$

$$R = \sqrt{\frac{10\,\pi}{\pi} - 4}$$

$$R = \sqrt{6} \text{ cm.}$$

Ficha 31.

Aprender a aprender

Pregunte al grupo: *¿Podrían explicar los pasos a seguir para calcular el área de una corona circular?*

Indicador de logro

- **Reconoce** las expresiones de la circunferencia y el círculo en el plano cartesiano.

RECUPERACIÓN

Obtén la distancia entre los pares de puntos dados.

- **P**(3, 1) y **Q**(6, 5)
  ***d** = 5 unidades.*
- **P**(– 1, 0) y **Q**(5, 8)
  ***d** = 10 unidades.*
- **P**(– 2, – 1) y **Q**(1, 3)
  ***d** = 5 unidades.*
- **P**(0, 0) y **Q**(5, 5)
  ***d** = $5\sqrt{2}$ unidades.*

RECUERDA

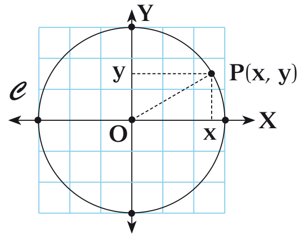
Distancia en el plano cartesiano

Si $\mathbf{P}(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1)$ y $\mathbf{Q}(\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2)$ son dos puntos del plano cartesiano, la distancia entre ellos es:

$$\sqrt{(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)^2 + (\mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_1)^2}$$

1 Circunferencia en el plano cartesiano

La circunferencia en el plano cartesiano es el lugar geométrico de los puntos que se hallan a igual distancia de un punto tomado como origen del plano cartesiano.



Los puntos **P**(**x**, **y**) de una circunferencia 𝒞, de centro en el origen **O**, están a igual distancia de **O**.

Como la distancia del centro **O**(0, 0) a un punto cualquiera, **P** (**x**, **y**), de la circunferencia es igual a su radio, **r**, entonces:

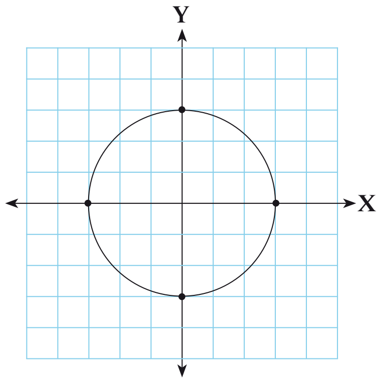
$$\mathbf{r} = \sqrt{(\mathbf{x} - 0)^2 + (\mathbf{y} - 0)^2} = \sqrt{\mathbf{x}^2 + \mathbf{y}^2}$$

Puesto que $\sqrt{\mathbf{x}^2 + \mathbf{y}^2} = \mathbf{r}$ = constante, se tiene que:

$$\mathbf{x}^2 + \mathbf{y}^2 = \mathbf{r}^2$$

La expresión anterior, llamada ecuación canónica de la circunferencia. Los puntos, **P**(**x**, **y**), del plano cartesiano, que cumplen con la relación $\mathbf{x}^2 + \mathbf{y}^2$ = constante, pertenecen a una circunferencia con centro en el origen **O**.

Si se conoce el radio, **r**, de una circunferencia con centro en **O**, su ecuación se obtiene muy fácilmente, y si se conoce la ecuación, a partir de ella puede representarse gráficamente dicha circunferencia.



EJEMPLO RESUELTO:

- Obtener la ecuación de la circunferencia de radio 3 unidades y centro en el origen del plano cartesiano que se muestra en el margen de la izquierda.

  Como **r** = 3, la ecuación canónica de la circunferencia se obtiene:

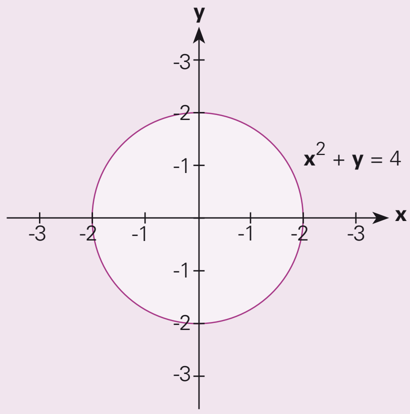
  $$\mathbf{x}^2 + \mathbf{y}^2 = \mathbf{r}^2 \longrightarrow \mathbf{x}^2 + \mathbf{y}^2 = 3^2 \longrightarrow \mathbf{x}^2 + \mathbf{y}^2 = 9$$

  Todos los puntos del plano tales que la suma de los cuadrados de sus dos coordenadas es 9, pertenecen a una circunferencia de radio 3 y centro en el origen del plano cartesiano.

Más información

Recuerde a sus estudiantes que una circunferencia queda determinada cuando se conocen:

- Tres puntos de la circunferencia, ubicados a la misma distancia de su centro.
- El centro y el radio.
- El centro y un punto perteneciente a la circunferencia.
- El centro y una recta tangente a la circunferencia.

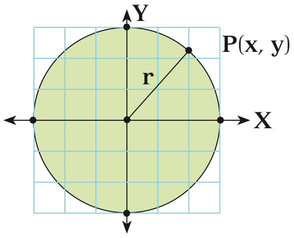


Sugerencias didácticas

- **Inicio:** Oriente a sus estudiantes para que lean y desarrollen en el aula la actividad vinculada a la recuperación de experiencias previas propuesta en el apartado *Recuperación*, en la que obtendrán la distancia entre los pares de puntos dados. Para estos fines, haga que lean el contenido del apartado *Recuerda*.
- **Desarrollo:** Pídales que lean el contenido de la doble página, que observen los procedimientos aplicados en los ejemplos resueltos y las gráficas correspondientes a la circunferencia y el círculo en el plano. Haga que se fijen en la gráfica de la circunferencia en el plano cartesiano, ubicada en el margen izquierdo de esta página.

2 Círculo en el plano cartesiano

Si $\mathscr{C}$ es una circunferencia con centro en **O**(0, 0), cualquier punto de coordenadas **P**(**x**, **y**) que cumpla con **d**(**P**, **O**) $\leqslant$ **r** pertenece al círculo.



Las coordenadas (**x**, **y**) de cualquiera de los puntos de un círculo de radio **r** cumplen con la desigualdad:

$$\sqrt{x^2 + y^2} \leqslant r$$

A la región del plano que resulta de eliminar la circunferencia del círculo se le conoce como círculo abierto.

Los puntos de un círculo abierto de radio **r** cumplen con:

$$\sqrt{x^2 + y^2} < r$$

EJEMPLO RESUELTO:

- Identificar, entre los puntos del plano siguientes, cuáles pertenecen al círculo de centro en el origen y radio **r** = 3.

P(1, 2) ; **Q**(0, – 3) ; **R**(2, 3)

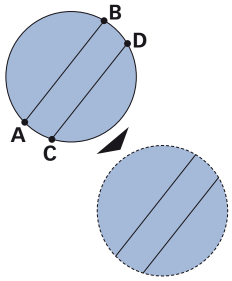
Los punto **P**(1, 2) y **Q**(0, – 3) pertenecen al círculo, porque: $1^2 + 2^2 = 5 \leqslant 9$; $0^2 + (-3)^2 = 9 \leqslant 9$.

R(2, 3) no pertenece al círculo, porque: $2^2 + 3^2 = 13 \geqslant 9$.

INTELIGENCIA COLABORATIVA

Segmentos en un círculo abierto

- Respondan y basen sus respuestas en argumentos.



Si se elimina el borde o la circunferencia en la figura anterior, ¿qué ocurre con ambas secantes? ¿Se convierten en rectas?

- Si prolongáramos lo que queda de las secantes, una vez retirado el borde del círculo, ¿se cortarían en algún punto? ¿Son rectas paralelas?
- Escriban y socialicen sus conclusiones.

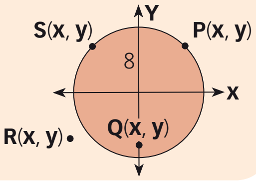
ACTIVIDADES

7 Obtén la ecuación de cada circunferencia con centro en el origen y radio dado.

- **r** = 6 unidades. *$x^2 + y^2 = 36$.*
- **r** = $5\sqrt{3}$ unidades. *$x^2 + y^2 = 75$.*
- **r** = 2/3 unidades. *$9x^2 + 9y^2 = 4$.*
- **r** = 10 unidades. *$x^2 + y^2 = 100$.*
- **r** = 0.8 unidades. *$x^2 + y^2 = 0.64$.*
- **r** = 1.5 unidades. *$x^2 + y^2 = 2.25$.*

8 Escribe la expresión que relaciona a las coordenadas cartesianas para cada uno de los puntos **P**(**x**, **y**) en cada caso.

- **P**(**x**, **y**) *$x^2 + y^2 = 64$.*
- **Q**(**x**, **y**) *$x^2 + y^2 < 64$.*
- **R**(**x**, **y**) *$x^2 + y^2 > 64$.*
- **S**(**x**, **y**) *$x^2 + y^2 = 64$.*
- Responde: ¿Cuál desigualdad, en términos de **x** e **y**, representa al círculo de la derecha? *$x^2 + y^2 \leqslant 64$.*



Atención a la diversidad

Actividades de refuerzo: Motive a sus estudiantes para que obtengan la ecuación de la circunferencia de radio especificado en cada caso y centro en el origen.

1. **r** = 4 cm.

$x^2 + y^2 = r^2$

$x^2 + y^2 = 4^2$; $x^2 + y^2 = 16$.

2. **r** = 6 cm.

$x^2 + y^2 = 6^2$; $x^2 + y^2 = 36$.

3. **r** = 10 cm.

$x^2 + y^2 = 10^2$; $x^2 + y^2 = 100$

4. **r** = 8 cm.

$x^2 + y^2 = 8^2$; $x^2 + y^2 = 64$

5. **r** = 5 cm.

$x^2 + y^2 = 5^2$; $x^2 + y^2 = 25$

Ficha 32.

- **Desarrollo:** Muestre a sus estudiantes los ejemplos resueltos relacionados con los procedimientos para determinar la ecuación de la circunferencia en el plano cartesiano y los puntos del plano pertenecientes al círculo. Diseñe otros ejemplos similares a estos y observe de cerca que realizan las gráficas correctamente. Propóngales que realicen la actividad propuesta en el apartado *Inteligencia colaborativa* que trata sobre los segmentos en un círculo abierto.
- **Cierre:** Motive a sus estudiantes a realizar los ejercicios propuestos en el apartado *Actividades*. En la actividad 7, determinarán la ecuación de cada circunferencia con centro en el origen y radio dado. En la actividad 8, escribirán la expresión que relaciona a las coordenadas cartesianas para cada uno de los puntos **P**(**x**, **y**) en cada caso. Acompáñeles en el proceso de realización de estas actividades.

Aprender a aprender

Pregunte al grupo: *¿Creen que los conocimientos previos hicieron más fácil el aprendizaje de los temas desarrollados en esta doble página? ¿Por qué?*

Competencias

- Comunicativa.
- Usa algoritmos.
- Resolución de problemas.

Indicadores de logro

- **Reconoce** el concepto de *área del círculo* y **la determina**. **Reconoce** el concepto de *sector* y *segmentos circulares* y **calcula** sus áreas. **Reconoce** coronas y trapecios circulares y calcula sus áreas. **Reconoce** las expresiones de la circunferencia y el círculo en el plano cartesiano. **Resuelve** problemas del contexto que involucran áreas del círculo y de secciones circulares.

ACTIVIDADES

9 Calcula el área del círculo de características especificadas.

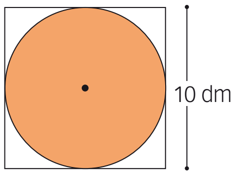
- De radio 15.65 cm. *769.45 cm².*
- De radio 2.4×10^{-3} m. *1.81×10^{-5} m².*
- De diámetro $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ ″. *0.59 pulg².*
- De circunferencia 3.545 m. *1 m².*

10 Obtén el radio de cada uno de los círculos cuyas áreas se muestran.

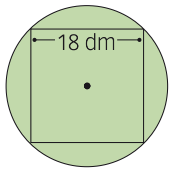
- **A** = 38.95 cm². *3.52 cm.*
- **A** = 9.612 pulg². *1.75″.*
- **A** = $5\sqrt{2}$ m². *1.50 cm.*
- **A** = $18\pi^2$ cm². *7.52 m.*

11 Determina el área de los círculos inscrito y circunscrito siguientes.

***A** = 78.54 dm².*

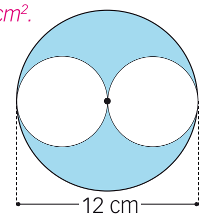


***A** = 508.94 cm².*



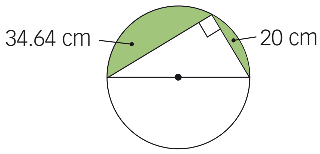
12 Determina el área coloreada.

***A** = 56.55 cm².*



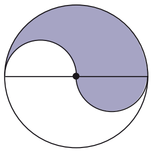
- Compara el área de la figura coloreada con la del círculo de diámetro 12 cm completo. ¿Qué fracción del área del círculo completo representa el área de la figura? *La mitad.*
- ¿El resultado es casual? Justifica tu respuesta.

13 Obtén el área coloreada. ***A** = 281.92 cm².*



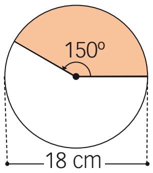
- Describe el procedimiento que utilizaste para calcular el área.

14 Deduce una expresión matemática que te permita calcular el área de la figura rayada en función del diámetro **D**. ***A** = π**D**²/8.*

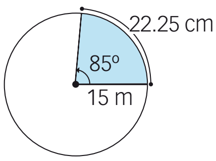


15 Calcula el área de cada uno de los sectores y segmentos circulares siguientes.

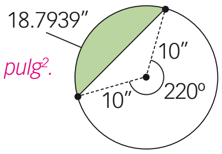
***A** = 106.03 cm².*



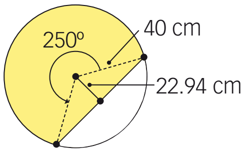
***A** = 166.875 m².*



***A** = 90.03 pulg².*



***A** = 4 242.36 cm².*



116

Competencias específicas

Competencia comunicativa

Es necesario que los estudiantes adquieran las habilidades para determinar las áreas del círculo y de secciones circulares, además, construir la ecuación de la circunferencia en el plano cartesiano y los puntos coordenados del círculo de radio conocido y centro en el origen.

Usa algoritmos

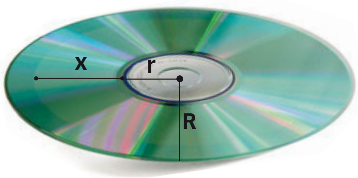
Seguir las reglas y los procedimientos en la persecución de un objetivo matemático es vital para lograr los resultados requeridos. Por ejemplo, aplicar los pasos para determinar el área del círculo utilizando adecuadamente la fórmula correspondiente.

Sugerencias didácticas

- Las actividades propuestas en esta página están estrechamente vinculadas a los conceptos y procedimientos desarrollados a lo largo de la unidad. Haga que lean cuidadosamente las instrucciones y, después, verifique las respuestas obtenidas.
- Es importante observar de cerca que los estudiantes siguen las instrucciones y los procedimientos para determinar las áreas del círculo y de secciones circulares, además, construir la ecuación de la circunferencia en el plano cartesiano y los puntos coordenados del círculo de radio conocido y centro en el origen.

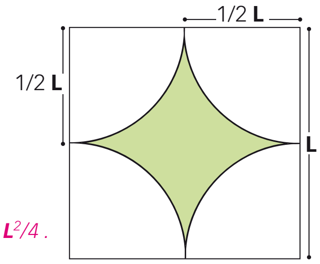
16 Resuelve los problemas.

- Los radios de las circunferencias externa e interna de un tubo galvanizado son de 155 mm y 150 mm, respectivamente.
  - ¿Cuál es la razón de las circunferencias exterior e interior?
    *$\mathcal{C}$ (exterior)/$\mathcal{C}$ (interior) = **R**/**r** = 1.033.*
  - ¿Cuál es el área, en cm², de una sección transversal del tubo galvanizado?
    ***A** = 47.91 cm².*



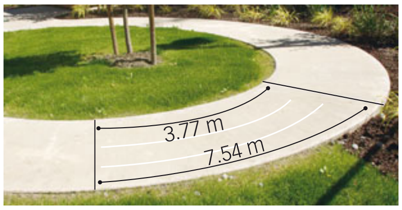
- El área de data de un CD tiene un radio mayor de 6 cm y un radio menor de 2 cm. En el CD completamente lleno caben 700 Mbit de información.
  - ¿Cuántos Mbit/cm² pueden almacenarse en el CD con las características indicadas?
    6.96 Megabites/cm².
  - Si se archivan en el CD 520 Mbit de datos, ¿cuál es el ancho, **x**, de la parte del CD que contiene esa cantidad de datos?
    ***x** = 4.876 cm.*

17 Encuentra la expresión matemática que permite determinar el área de la figura coloreada.



***A** = (4 – π) **L**²/4 .*

18 Resuelve.



La calzada que rodea a un área verde circular está formada por 5 placas iguales con la forma y dimensiones que se muestran en la figura. Los radios de las circunferencias interior y exterior son 3 m y 6 m, respectivamente. ¿Cuál es el área de cada placa?

***A** = 16.965 m².*

19 Obtén el radio menor de una corona circular que tiene un área de 39 π cm² y un radio mayor de 8 cm. ***r** = 5 cm.*

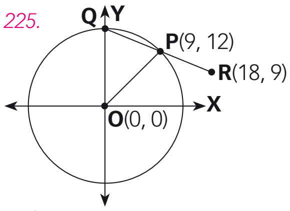
20 Lee y, luego, haz lo que se te pide.

Un entomólogo dispuso una trampa circular de 5 m de radio en una sabana con el fin de recolectar insectos para sus estudios. Si se asume que el centro del círculo está en un punto **O** de coordenadas (0 m,0 m), ¿en cuáles de las siguientes posiciones los insectos se encuentran fuera de la trampa?

(1 m, 4.8 m)	(3 m, 4 m)	(5 m, 1 m) *Fuera.*
(– 3 m, 4.95 m) *Fuera.*	(4 m, 5 m) *Fuera.*	(0 m, – 4 m)

21 Determina la ecuación de la circunferencia de la figura.

***x**² + **y**² = 225.*



22 Observa la figura anterior y, luego, busca un procedimiento para calcular la potencia del punto R(18, 9).

- ¿Cuál es esa potencia? *$\mathcal{P}$(**R**) = 180.*

Sugerencias didácticas

Resolución de problemas

- Proponga a sus estudiantes que lean detenidamente las instrucciones de los problemas propuestos en las actividades 16, 17, 18, 19, 20, 21 y 22. Estos problemas son aplicaciones cotidianas de las áreas del círculo y secciones circulares. Acompáñeles en la realización de estas actividades y ofrézcales las orientaciones necesarias.

Competencias fundamentales

Pensamiento lógico, creativo y crítico

Los conocimientos adquiridos por los estudiantes son necesarios para identificar las alternativas más convenientes en la persecución de la solución de problemas que forman parte de su diario vivir. En este aspecto radica la importancia de que sean capaces de identificar o construir la ecuación de la circunferencia en el plano cartesiano.

Criterios de evaluación

Competencia comunicativa:

- Adaptación de las representaciones gráficas, simbólicas y numéricas a la situación de comunicación.

Competencia algoritmo:

- Seguimiento de las reglas, instrucciones y procedimientos.

Competencia pensamiento lógico, creativo y crítico

- Demuestra flexibilidad ante situaciones tensas y conflictivas.

Aprender a aprender

Motive a sus estudiantes para que expresen algunos ejemplos de las aplicaciones cotidianas de los conceptos desarrollados en la unidad. Por ejemplo, pregunte: *¿Qué importancia tiene saber determinar el área de figuras decorativas circulares?* Discuta las diversas respuestas con el grupo.

Indicadores de logro de la evaluación

- **Reconoce** el concepto de *área del círculo* y **la determina**. **Reconoce** el concepto de *sector y segmentos circulares* y **calcula** sus áreas. **Reconoce** coronas y trapecios circulares y **calcula** sus áreas. **Reconoce** las expresiones de la circunferencia y el círculo en el plano cartesiano. **Resuelve** problemas del contexto que involucran áreas del círculo y de secciones circulares. **Utiliza** recursos virtuales y electrónicos: computadora, programas educativos, juegos interactivos y otros, en la búsqueda de información.

Competencias específicas

- Comunica.
- Razona y argumenta.
- Modela y representa.
- Usa algoritmos.
- Conecta.
- Resuelve problemas.

Aprender a aprender

Plantear al grupo: *Si les solicitaran crear un diseño circular para cerámicas de pisos, ¿qué conocimientos aplicarían para su diseño?* Discuta las diversas respuestas en el grupo.

EVALUACIÓN

Comunica

23 Expresa el procedimiento mediante el cual obtienes el área de …

- un círculo de diámetro, **D**.
- un sector circular limitado por un ángulo central, de medida **m**, en un círculo de radio **r**.

Razona y argumenta

24 Responde la pregunta justificando tu respuesta con argumentos.

¿El efecto que tiene sobre el área de un círculo el duplicar su radio o su diámetro es el mismo en ambos casos?

- Si tu respuesta fuese afirmativa, pruébala algebraicamente.

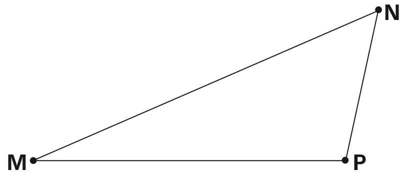
Modela y representa

25 Observa y, luego, describe cómo se construye el siguiente diagrama.

Diagrama hermético de Giordano Bruno (1588).

- Construye el diagrama anterior sobre una cartulina, empleando regla y compás.

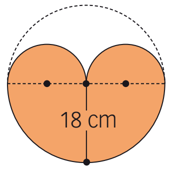
26 Calca el triángulo escaleno MNP y, luego, construye, a partir de su ortocentro, el círculo que toca sus vértices.



Usa algoritmos

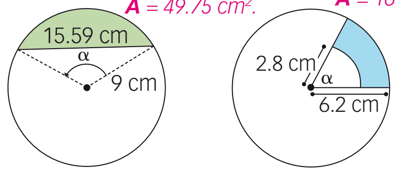
27 Obtén el área de la figura plana siguiente.

A = 572.56 cm².



28 Determina el área de cada figura.

A = 49.75 cm². *A = 16.69 cm².*



m ∢α= 120°. **m** ∢α= 62° 30′.

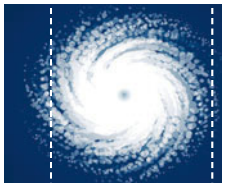
29 Escribe la desigualdad satisfecha por cada conjunto de puntos especificado.

- Los puntos pertenecientes a un círculo con centro en el origen cuyo radio mide $\sqrt{3}$.
  $x^2 + y^2 < 3.$
- Los puntos pertenecientes al borde de un círculo con centro en el origen y radio 18.
  $x^2 + y^2 = 324.$

Conecta

30 Resuelve.

Un huracán abarca las longitudes 62° y 67°, hacia el oeste. Un grado equivale a unos 111 km. ¿Cuál es el área del disco del huracán?



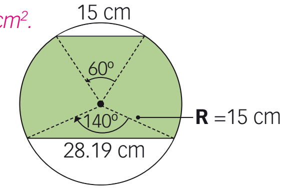
67° 62°

A = 241 922.26 km².

Resolución de problemas

31 Calcula el área de la figura.

A = 483.89 cm².



Sugerencias didácticas para la evaluación

- Es importante verificar, antes de dar inicio a las actividades de evaluación, que sus estudiantes determinan, sin dificultad, el área de secciones y figuras circulares. Observar que resuelven los problemas que involucran los conceptos y procedimientos desarrollados en la unidad.

SABER HACER

32 **Resolución de problemas**. Lean el texto y, luego, traten de resolver el problema planteado.

Un equipo de arqueólogos analiza pedazos de un plato de cerámica griego en el que se escenifica una batalla. El plato quiere ser reconstruido y para hacerlo el equipo ha escogido el trozo mayor como referencia. Puesto que hay pedazos de platos que habrían sido de tamaños distintos, para la reconstrucción se deben tomar aquellos que encajen con la circunferencia del pedazo mayor elegido. ¿Cómo puede la geometría ayudar en la reconstrucción de la circunferencia del plato?

- Elaboren una estrategia para abordar el problema del equipo de arqueólogos: ¿cómo, a partir del pedazo, presentado en la figura de la derecha, pueden reconstruir la circunferencia?
- Discutan en el grupo las distintas propuestas y, una vez encontrada una solución, copien la figura de la derechay reconstruyan la circunferencia.

33 Responde las preguntas.

- ¿Qué importancia ha tenido el arte en el desarrollo de las sociedades humanas? Sustenta tu respuesta con ejemplos.
- ¿Qué relaciones puedes establecer entre la geometría y las creaciones de las artes visuales?

APRENDIZAJE AUTÓNOMO

34 Marca según tus logros.

	Iniciado	En proceso	Logrado
• **Conozco** y **determino** el área del círculo.			
• **Identifico** sectores y segmentos circulares y **calculo** sus áreas.			
• **Identifico** coronas y trapecios circulares y calculo sus áreas.			
• **Reconozco** la circunferencia y el círculo en el plano cartesiano.			
• Resuelvo problemas del entorno relacionados con círculos.			

35 Reflexiona sobre tu aprendizaje.

- ¿Cuáles temas te parecieron más interesantes?¿Por qué?
- ¿Te sientes satisfecho con tu comprensión de los conceptos y procedimientos estudiados?

Sugerencias didácticas para la evaluación

- Pregunte a sus estudiantes:
  - — *¿Cómo se define el concepto de* circunferencia*?*
  - — *¿Cómo se define el concepto de* círculo*?*
  - — *¿Cuál es la diferencia entre el círculo y la circunferencia?*
  - — *¿Cómo se expresa el área del círculo?*
  - — *¿Cómo se expresa el área de la corona circular?*

Saber hacer

En la actividad 32, *Saber Hacer,* se aplica la estrategia de evaluación *Resolución de problemas*. Formados en equipos, leerán las instrucciones, observarán las ilustraciones y, luego, tratarán de resolver el problema planteado. En este caso, elaborarán una estrategia basándose en conocimientos geométricos, para la reconstrucción de un plato de cerámica griega, partiendo del pedazo representado en la figura de la derecha. Finalmente, discutirán en el grupo las distintas propuestas y, una vez encontrada la solución, copiarán la figura y reconstruirán la circunferencia.

Actitudes y valores

Creatividad

En la sección destinada a *Actitudes y valores*, actividad 33, responderán qué importancia ha tenido el arte en el desarrollo de las sociedades humanas. Sustentarán sus respuestas con ejemplos. Expresarán qué relaciones pueden establecer entre la Geometría y las creaciones de las artes visuales.

Aprendizaje autónomo

En el apartado *Aprendizaje autónomo*, actividad 34, evaluarán por ellos mismos si los conceptos y procedimientos que trabajaron en la unidad se encuentran en estado de iniciación, en proceso o logrado. En la actividad 35, reflexionarán sobre su proceso de aprendizaje.

Aprender a aprender

Haga que sus estudiantes apliquen los conceptos aprendidos en la unidad en situaciones de la cotidianidad, por ejemplo, pregunte: *¿Cuáles son los datos requeridos para diseñar un dibujo decorativo de forma circular?*

7 Polígonos

Propuesta de programación

COMPETENCIAS	CONTENIDOS

COMPETENCIAS

Específicas

- **Razona y argumenta**: **Clasifica** los polígonos atendiendo a las características fundamentales: regulares, irregulares, cóncavos y convexos.
- **Comunica**: **Interpreta** y **explica** gráficos y situaciones de la vida cotidiana a través de los polígonos y sus propiedades, de las relaciones entre sus elementos y los diversos teoremas que se verifican sobre estos.
- **Modela y representa**: **Construye** y **representa** situaciones de la vida cotidiana a través de los diferentes polígonos, haciendo uso de las propiedades y características que definen cada uno.
- **Usa algoritmos**: **Sigue** las reglas que le permiten obtener un resultado al resolver problemas que involucran los polígonos y sus propiedades.
- **Conecta**: **Identifica** diferentes tipos de polígonos en los contextos donde se desenvuelve.
- **Resuelve problemas**: **Resuelve** y **elabora** problemas de su entorno en los que aplica los conceptos de *polígonos*, sus propiedades, perímetro y área.
- **Utiliza herramientas tecnológicas**: **Utiliza** soportes tecnológicos como la Internet, la calculadora científica y otros dispositivos.

Fundamentales

Resolución de problemas: **Identifica** y **utiliza** estrategias, y **genera** alternativas de solución.

CONTENIDOS

Conceptos

- Polígonos.
- Diagonales de un polígono.
- Ángulos en un polígono.
- Perímetro y área de un polígono.
- Construcciones geométricas.
- Transformaciones geométricas.
- Reflexión de una figura.
- Homotecia.

Procedimientos

- Identificación y clasificación de polígonos diversos.
- Trazado de las diagonales de un polígono y cálculo de su número.
- Identificación y cálculo de las medidas de los ángulos interiores y exteriores de un polígono.
- Cálculo de perímetros y áreas de diversos polígonos simples.
- Construcción de polígonos regulares cuyos lados tienen una longitud dada.
- Reconocimiento y realización de traslaciones y rotaciones de figuras del plano.
- Realización de reflexiones de puntos, líneas y polígonos.
- Reconocimiento de distintas homotecias y su aplicación en figuras dadas.

Actitudes y valores

- Valoración del conocimiento del medio.
- Apreciación del cuidado del entorno natural.

Tiempo estimado de trabajo: 2 semanas

INDICADORES DE LOGRO

- **Identifica** los conceptos de *línea poligonal* y *polígono*.
- **Identifica** y **clasifica** polígonos diversos.
- **Traza** las diagonales de un polígono y **calcula** su número.
- **Identifica** y **calcula** las medidas de los ángulos interiores y exteriores de un polígono.
- **Calcula** perímetros y áreas de polígonos simples diversos.
- **Construye** polígonos cuyos lados tienen una longitud dada.
- **Reconoce** y **realiza** traslaciones y rotaciones de figuras planas.
- **Efectúa** reflexiones diversas de puntos, líneas y polígonos.
- **Reconoce** distintas homotecias y **las aplica** sobre figuras dadas.
- **Resuelve** problemas del contexto que involucran polígonos y sus propiedades.
- **Utiliza** recursos virtuales y electrónicos: computadora, programas educativos, juegos interactivos y otros, en la búsqueda de información.

Valor transversal: Medio ambiente

Recursos digitales

Plataforma digital

CD

BIBLIOTECA DEL DOCENTE

- DOCUMENTOS PARA LA PLANIFICACIÓN

CUADERNO DE ACTIVIDADES

UNIDAD 7	Polígonos

RECURSOS DE REFUERZO Y AMPLIACIÓN

LibroMedia

ACTIVIDADES INTERACTIVAS

PÁGINA 121	Áreas de figuras II.
PÁGINA 124	Elementos de un polígono. Verdadero o falso.
PÁGINA 128	Área del rombo.

CD DE RECURSOS DIGITALES: PLAN REGULAR

Pleno — PRUEBA DE EVALUACIÓN FORMATIVA DE LA UNIDAD

Estrategias pedagógicas

- Recuperación de experiencias previas.
- Trabajo en equipo.
- Aprendizaje basado en problemas (ABP).

Unidad 7

- **Lee** y **comenta** las informaciones expuestas en el apartado *Punto de partida*.
- **Responde** preguntas relacionadas con las informaciones expuestas en el apartado *Punto de partida*.
- **Recupera** experiencias vividas mediante la observación de las imágenes de la ilustración.
- **Analiza** un problema de la vida cotidiana vinculado a los conceptos y procedimientos que desarrollará en la unidad en el apartado *Analiza el problema*.
- **Plantea** soluciones al problema leído y analizado anteriormente, en el apartado *Plantea una solución*.

7 Polígonos

Conceptos

- Polígonos.
- Diagonales de un polígono.
- Ángulos en un polígono.
- Perímetro y área.
- Construcciones geométricas.
- Transformaciones geométricas.
- Reflexión de una figura.
- Homotecia.

Procedimientos

- Construcciones con regla y compás.
- Resolución de problemas.

Actitudes y valores

- Valoración del conocimiento del medio.
- Cuidado del entorno natural.

Abeja en busca de néctar. El néctar es la materia prima con que las abejas hacen la miel.

Punto de partida

Las abejas llegaron a adquirir las asombrosas habilidades matemáticas que emplean para la construcción de sus colmenas y hacer sus largos recorridos en busca del néctar con el que fabrican miel, en millones de años de historia natural.

En el siglo IV, el matemático Pappus de Alejandría estudió la división de una superficie en celdillas de la mayor área posible, sin que estas se superpongan, ni dejen huecos. Conjeturó que las unidades de la rejilla que cumplen con los requisitos mencionados arriba debían ser hexágonos regulares. En el siglo XVIII, algunos matemáticos lograron corroborar la conjetura de Pappus.

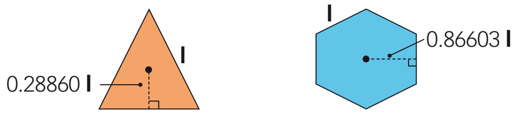
Pues resulta que, entre las habilidades matemáticas de las abejas se cuenta la de resolver, antes que los humanos, el problema de Pappus. Las abejas “descubrieron” que con el hexágono regular podrían almacenar la mayor cantidad de miel usando la menor cantidad de cera en la construcción de sus colmenas.

- ¿Qué polígonos regulares tienen la propiedad de teselar el plano completo? ¿Por qué lo hacen?

  El triángulo equilátero, el cuadrado y el hexágono regular. Porque 360º/ ángulo interno es un entero.

ANALIZA EL PROBLEMA

Dos polígonos regulares isoperimétricos tienen el mismo perímetro, aunque distinta área. Los polígonos regulares siguientes son isoperimétricos.



¿Cómo probarías que el hexágono encierra mayor área que el triángulo equilátero, dándoles así la razón a las abejas?

Apertura de la unidad

Dentro de los objetivos principales de la apertura de esta unidad se encuentran el plantear una situación de aprendizaje, una problemática o un texto que sirve para contextualizar el tema de la unidad. Todo esto con la finalidad de motivar y despertar la curiosidad de los estudiantes.

A partir de la situación o texto planteado, el problema a analizar y las imágenes de la ilustración se conecta al estudiante con el tema a tratar, a la vez que vincula con la realidad o cotidianidad los temas que se van a desarrollar.

Todos los elementos que conforman la portada promueven la recuperación de experiencias o conocimientos previos y la motivación o el interés por los conocimientos que adquirirán en la unidad.

Trabajo colectivo de apertura

- **Punto de partida:** Guíe a sus estudiantes a leer y comentar en el grupo las informaciones expuestas en el apartado *Punto de partida*, que narra cómo las habilidades matemáticas de las abejas superaron la inteligencia del hombre con la creación de un sistema de almacenamiento de su miel usando el hexágono hace millones de años.
- **Analiza el problema:** En este apartado se presentan dos polígonos: un triángulo y un hexágono, con el mismo perímetro, pero áreas distintas. Deben probar que el hexágono encierra una mayor área.
- **Plantea una solución:** En este apartado analizarán el problema planteado en la sección anterior y, luego, describirán el procedimiento que emplearían para abordar la resolución.

Celdillas hexagonales. Construidas de cera para almacenar la miel, alimento de la colonia de abejas.

PLANTEA UNA SOLUCIÓN

- Analiza el problema y, luego, describe el procedimiento que emplearías para abordar la resolución del problema.
  - ¿Cuál es el punto de partida de tu procedimiento? Explica por qué te parece correcto emplearlo.
  - ¿Cómo sabes si conseguiste resolver el problema planteado? Somete a prueba tu solución. *Área hexágono ≈ 0.65* $\mathbf{L}^2$ *> Área triángulo ≈ 0.43* $\mathbf{L}^2$.
  - Ensaya los pasos del procedimiento elegido y juzga si te acerca a una solución satisfactoria del problema.
- Comparte el procedimiento elegido y tu solución y, luego, analiza las estrategias elaboradas por tus compañeros de curso y sus soluciones.

Esquema conceptual de la unidad

Polígonos

Una de las figuras básicas de la Geometría son los

Polígonos — *que son objeto de* — Construcciones geométricas

para los que se calcula su — Perímetro y área

a los que se trazan sus — Diagonales

para los que se obtienen sus — Ángulos

Transformaciones geométricas — *que pueden ser* — Isometrías y homotecias

Actividad de motivación

Pida a sus estudiantes que lean en la sección: *Conceptos y procedimientos*, los temas que trabajarán en la unidad y las actitudes y valores que estarán presentes en el desarrollo de la misma. Luego, para que interioricen la importancia de conocer los polígonos, su clasificación y sus propiedades, formúleles preguntas como las siguientes: *¿Qué otras formas poligonales, similares a los panales de abejas, se identifican en la naturaleza? ¿Qué presencia tienen las propiedades de los polígonos en las construcciones modernas? ¿Qué polígonos permiten cubrir superficies planas sin dejar espacios?*

Actividad interactiva

Áreas de figuras II

Actividad interactiva de recuperación de experiencias, en la que determinarán el área de figuras mediante unidades arbitrarias distintas y, luego, elegirán la opción correcta en cada caso.

Actitudes y valores

Medio ambiente

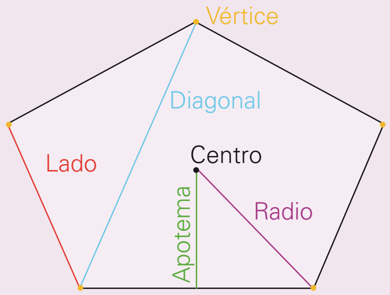
Aproveche la situación planteada en el apartado *Punto de partida* y en las imágenes de la ilustración para conversar con sus estudiantes acerca del papel de los recursos naturales en el equilibrio de la vida. Pregunte al grupo: *¿Recuerdan qué es la polinización? ¿Cuál es la importancia de este proceso en la reproducción de las plantas? ¿Cómo participan las abejas en la polinización?*

Indicadores de logro

- **Identifica** los conceptos de *línea poligonal* y *polígono.*
- **Identifica** y **clasifica** polígonos diversos.

Más información

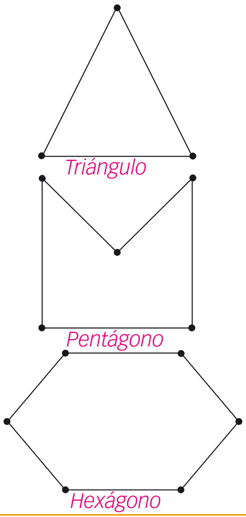
Elementos de un polígono



- El origen de la palabra polígono se encuentra en la unión de dos vocablos: *poli*, que significa: *muchos*, y *gono*, que significa: *ángulo.* Partiendo de su significado etimológico, un polígono es aquello que tiene muchos ángulos.
- Un polígono es la figura geométrica de un plano que está formada por líneas rectas o segmentos consecutivos no alineados, denominados lados.

RECUPERACIÓN

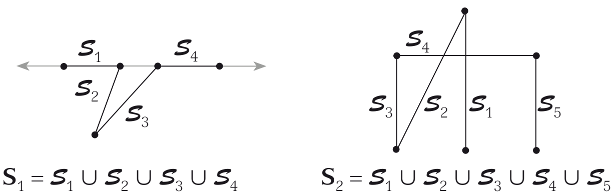
Nombra los polígonos de acuerdo al número de ángulos o lados.



1 Línea poligonal. Polígonos

Una línea poligonal es la unión de segmentos, $\mathcal{S}$, tales que, dos de ellos consecutivos no pertenecen a una misma línea recta y el punto extremo de cualquiera de ellos es el punto de inicio de otro.

Son líneas poligonales las siguientes, $\mathbf{S}_1$ y $\mathbf{S}_2$:



$\mathbf{S}_1 = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2 \cup \mathcal{S}_3 \cup \mathcal{S}_4$ $\quad$ $\mathbf{S}_2 = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2 \cup \mathcal{S}_3 \cup \mathcal{S}_4 \cup \mathcal{S}_5$

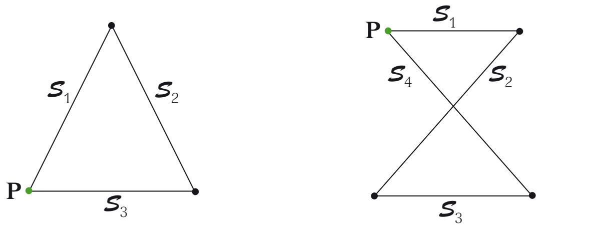
Observa que:

- Los segmentos $\mathcal{S}_1$ y $\mathcal{S}_4$ de $\mathbf{S}_1$ pertenecen a una misma recta, pero no son consecutivos.
- Los segmentos $\mathcal{S}_1$ y $\mathcal{S}_2$ de $\mathbf{S}_2$ se cruzan con el segmento $\mathcal{S}_4$. Esto no contradice la definición de línea poligonal.

Las líneas poligonales mostradas arriba son tales que el origen del primer segmento y el extremo del último no coinciden, son líneas poligonales abiertas.

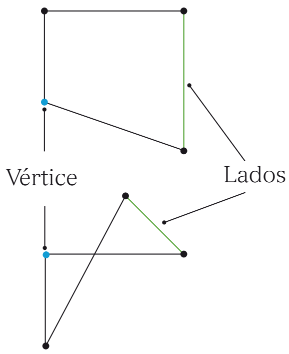
Si el punto origen del primer segmento de una línea poligonal coincide con el punto extremo del último segmento, la línea poligonal es cerrada.

Las líneas poligonales siguientes son cerradas.



P es el punto origen de $\mathcal{S}_1$ y los extremos de $\mathcal{S}_3$ y $\mathcal{S}_4$ de ambas líneas poligonales cerradas.

Un polígono es una línea poligonal cerrada.



Los puntos de cruce de dos segmentos no son vértices.

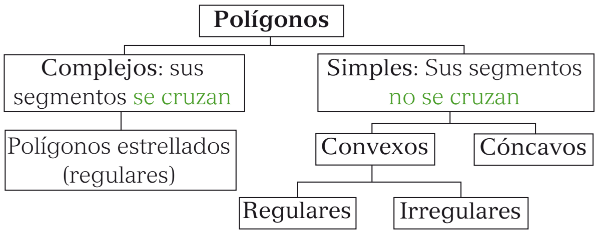
Los segmentos que forman un polígono son sus lados y los puntos comunes de dos segmentos consecutivos son sus vértices.

Sugerencias didácticas

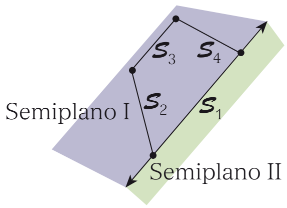
- **Inicio:** Oriente a sus estudiantes para que lean y respondan la actividad vinculada a la recuperación de experiencias previas propuesta en el apartado *Recuperación*, en la que nombrarán los polígonos de acuerdo al número de ángulos o lados.
- **Desarrollo:** Pida a sus estudiantes que lean cuidadosamente el contenido de la doble página, que observen las representaciones gráficas y el desarrollo de los conceptos. Haga que reproduzcan las líneas poligonales y los polígonos en sus cuadernos.

2 Clasificación de los polígonos

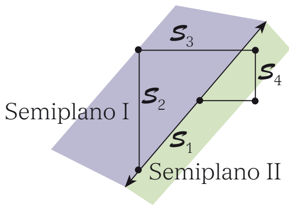
Observa en el siguiente esquema cómo se clasifican los polígonos.



Un polígono es convexo si al prolongar cualquiera de sus lados, los demás lados quedan en uno de los semiplanos formados; y es cóncavo, si tras prolongar ciertos lados, los demás lados o partes de estos quedan en los dos semiplanos formados.



Polígono convexo



Polígono cóncavo

Un polígono es regular si todos sus lados y ángulos son congruentes e irregular, si no todos sus lados o ángulos son congruentes.

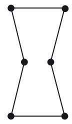
Una región poligonal es la unión de un polígono y su región interior.

SABER MÁS

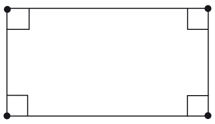
Polígonos equiláteros y equiángulos

Un polígono equilátero tiene todos sus lados congruentes.

Un polígono equiángulo tiene todos sus ángulos congruentes.



Polígono equilátero



Polígono equiángulo

ACTIVIDADES

1 Piensa y, luego, responde con argumentos.

- ¿Contradice la existencia de polígonos complejos a la definición de polígono?

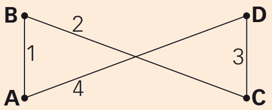
No, porque la definición solo dice que el polígono es una poligonal cerrada.

- ¿Puede alguno de los ángulos de un polígono ser llano? ¿Por qué?

No, porque entonces dos lados consecutivos serían colineales.

2 Piensa y, luego, responde con argumentos.

- ¿Cuántos ángulos tiene el polígono complejo que se muestra a la derecha? ¿Por qué?



*Tiene cuatro ángulos ∢**A**, ∢**B**, ∢**C** y ∢**D**, que son los formados por los segmentos consecutivos 1 y 2; 2 y 3; 3 y 4; 4 y 1.*

Cuaderno: Ficha 33

Competencia comunicativa

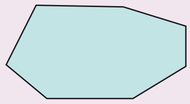
Los polígonos, según su forma, pueden ser cóncavos y convexos.

- **Cóncavos**: Si alguno de sus ángulos es mayor de 180°.
- **Convexos**: Cuando ninguno de sus ángulos internos mide más de 180°.

Si al trazar las diagonales de un polígono todas quedan dentro de él, el polígono es convexo, pero si tiene al menos una diagonal por fuera, el polígono es cóncavo.

Los polígonos, **según la medida de sus lados y ángulos internos**, se clasifican en regulares e irregulares.

El *polígono regular* es aquel cuyos lados y ángulos tienen la misma medida. Los polígonos regulares reciben su nombre de acuerdo al número de sus lados: triángulo, cuadrado, pentágono, hexágono, etc.



El *polígono irregular* es aquel cuyos lados y ángulos interiores no son iguales entre sí, no tiene todos sus lados iguales, sus vértices no están inscritos en una circunferencia, no se requiere un compás para construirlo, como es el caso de los polígonos regulares, solo una regla para unir los puntos y construirlo.

Ficha 33.

- **Desarrollo:** Muéstreles ejemplos de los conceptos y procedimientos desarrollados en la doble página. Pídales que desarrollen los ejemplos resueltos en sus cuadernos y motíveles para que construyan los diversos polígonos en los mismos. Haga que establezcan las diferencias entre los polígonos regulares e irregulares, los cóncavos y los convexos. Pídales que lean y comenten el contenido del apartado *Saber más* que trata sobre los polígonos equiláteros y equiángulos.
- **Cierre:** Motive a sus estudiantes a realizar los ejercicios del apartado *Actividades*. En la actividad 1, responderán si contradice la existencia de polígonos complejos a la definición de polígonos y si puede alguno de los ángulos de un polígono ser llano. En la actividad 2, expresarán cuántos ángulos tiene el polígono complejo que se muestra a la derecha de la página.

Aprender a aprender

Pregunte a sus estudiantes: *¿Qué conocimientos previos sobre los polígonos y su clasificación tenían antes de trabajar esta doble página? ¿Creen que esos conocimientos facilitaron el trabajo? ¿Por qué?*

Indicadores de logro

- **Traza** las diagonales de un polígono y **calcula** su número.

Actividad interactiva

Elementos de un polígono. Verdadero o falso

Actividad interactiva en la que determinarán si las afirmaciones relacionadas con los elementos del polígono y sus propiedades son falsas o verdaderas, seleccionando, en cada caso, la opción correcta.

Más información

Diagonal de un rectángulo

Si aplicamos el concepto de *diagonal a un rectángulo*, expresaremos que es un segmento de recta que une dos vértices no consecutivos del mismo.

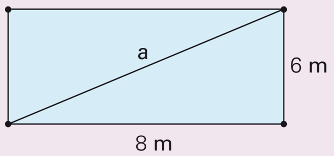
Hay problemas matemáticos en los que debemos calcular el valor de la diagonal de un rectángulo.

Para resolverlos, basta con aplicar el teorema de Pitágoras. La hipotenusa es la diagonal trazada y los dos catetos son los dos lados de cualquiera de los triángulos que se forman al trazar la diagonal.

$$\mathbf{a}^2 = \mathbf{b}^2 + \mathbf{c}^2$$

$$\mathbf{a} = \sqrt{\mathbf{b}^2 + \mathbf{c}^2}$$

- Calcular la longitud de la diagonal de un rectángulo de 8 m de base y 6 m de altura.



$\mathbf{a}^2 = 8^2 + 6^2$

$\mathbf{a}^2 = 100$

$\mathbf{a} = \sqrt{100}$

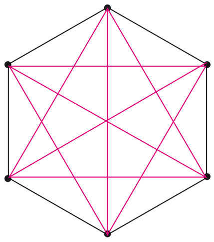
$\mathbf{a} = 10$

La diagonal del rectángulo es igual a 10 metros.

DIAGONALES DE UN POLÍGONO

RECUPERACIÓN

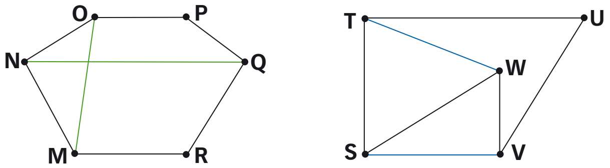
Traza los segmentos que unan dos vértices que no sean consecutivos en el polígono siguiente.



1 Diagonales de un polígono

Una diagonal de un polígono es el segmento que une dos vértices no consecutivos de dicho polígono.

Todas las diagonales de un polígono convexo pertenecen a la región interior del polígono, no así en un polígono cóncavo.



Los segmentos $\overline{MO}$ y $\overline{NQ}$ son dos diagonales del polígono convexo **MNOPQR** y los segmentos $\overline{TW}$ y $\overline{SV}$, diagonales del polígono cóncavo **STUVW**.

2 Diagonales que salen de un vértice de un polígono

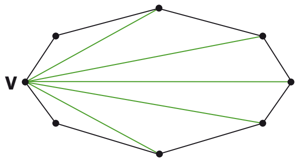
Si **n** es el número de vértices (y de lados) de un polígono, para obtener el número, **N**(**v**), de diagonales que sale de un vértice determinado, es lógico que no deberán tomarse en cuenta ni el vértice desde donde se trazarán las diagonales, ni los vértices contiguos a este, con lo que nos queda que el número de diagonales es **n** – 3.

EJEMPLOS RESUELTOS:

- ¿Cuántas diagonales salen de un vértice de un octágono?

  Puesto que **n** = 8, el número de diagonales que sale de un vértice de un octágono es: **N**(**v**) = **n** – 3 = 8 – 3 = 5.

  Estas diagonales se muestran en la figura siguiente.



- ¿Cuántos lados tiene un polígono, si de uno cualquiera de sus vértices salen 9 diagonales?

  Puesto que **N**(**v**) = 9, el número de lados, **n**, del polígono es: **n** = **N**(**v**) + 3 = 9 + 3 = 12

  El polígono es un dodecágono.

Tamaño de pantalla. El tamaño de la pantalla de un televisor es el largo de su diagonal.

Sugerencias didácticas

- **Inicio:** Oriente a sus estudiantes para que lean y realicen en el aula la actividad vinculada a recuperación de experiencias previas propuesta en el apartado *Recuperación*, en la que trazarán los segmentos que unan dos vértices que no sean consecutivos en el hexágono representado.
- **Desarrollo:** Pídales que lean cuidadosamente el contenido de la doble página, que observen las representaciones gráficas y el desarrollo de los ejemplos resueltos. Es necesario que lleven al aula su regla para trazar las diagonales de los polígonos. Pídales que observen la imagen del televisor ubicado a la izquierda de la página y que lean y comenten la información al pie de la misma. Haga que reproduzcan en sus cuadernos los ejemplos resueltos.

3 Número total de diagonales de un polígono

Puesto que de cada uno de los **n** vértices de un polígono salen **n** – 3 diagonales, el número total, **N**, de diagonales es la mitad de **n**(**n** – 3), dado que de un vértice no consecutivo a otro, solo se cuenta una diagonal en lugar de dos diagonales.

De acuerdo a lo anterior: **N** = **n**(**n** – 3)/2.

EJEMPLO RESUELTO:

- Obtener el número total de diagonales, **N**, de un polígono de **n** = 7 lados (heptágono).

  Como **n** = 7: **N** = **n**(**n** – 3)/2 = (7)(7 – 3)/2 = 14.

  Un heptágono tiene un total de 14 diagonales.

4 Número total de intersecciones de las diagonales de un polígono irregular

Si **n** es el número de vértices de un polígono irregular, el número total de puntos de corte o intersecciones de sus diagonales, **N**(**c**), se calcula con la expresión siguiente:

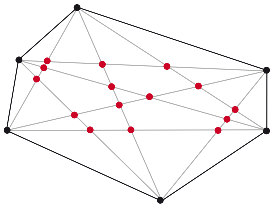
N(**c**) = **n**(**n** – 1) (**n** – 2) (**n** – 3)/24.

EJEMPLOS:

- Calcular el número de puntos de corte de las diagonales del hexágono irregular de la derecha.

  Como **n** = 6: **N**(**c**) = 6(5)(4)(3)/24 = 15.

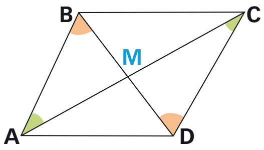
  Las diagonales se cortan en 15 puntos.



SABER MÁS

Propiedad de las diagonales de un paralelogramo

Las diagonales de un paralelogramo se cortan en su punto medio, **M**.



Los triángulos **ABM** y **CMD** son congruentes:

AM ≅ **MC**

BM ≅ **MD**

ACTIVIDADES

3 Obtén el número total de diagonales de los polígonos siguientes.

- Un cuadrilátero. *N = 2 diagonales.*
- Un heptágono. *N = 14 diagonales.*
- Un decágono. *N = 35 diagonales.*
- Un pentadecágono. *N = 90 diagonales.*

4 Calcula el número de lados que tiene el polígono cuyo número total, **N**, de diagonales se da en cada caso.

- **N** = 5 diagonales. *n = 5 lados.*
- **N** = 20 diagonales. *n = 8 lados.*
- **N** = 35 diagonales. *n = 10 lados.*
- **N** = 170 diagonales. *n = 20 lados.*

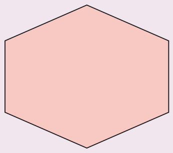
5 Calca un hexágono regular, traza sus diagonales y, luego, comprueba que no se cumple la expresión que proporciona el número de puntos de corte de las diagonales.

- ¿A qué atribuyes este comportamiento de las intersecciones de las diagonales?

- **Desarrollo:** Muestre a sus estudiantes los procedimientos para calcular las diagonales de un polígono y las intersecciones de las diagonales de un polígono regular. Pídales que tracen diagonales de polígonos en sus cuadernos. Motíveles para que lean y reproduzcan en sus cuadernos el contenido del apartado *Saber más*, que muestra la propiedad de las diagonales de un paralelogramo.
- **Cierre:** Motive a sus estudiantes a realizar los ejercicios del apartado *Actividades*. En la actividad 3, obtendrán el número total de diagonales de los polígonos especificados. En la actividad 4, calcularán el número de lados que tiene el polígono cuyo número total, **N**, de diagonales se da en cada caso. En la actividad 5, calcarán un hexágono regular, trazarán sus diagonales y, luego, comprobarán que no se cumple la expresión que proporciona el número de puntos de cortes de las diagonales.

Atención a la diversidad

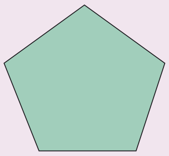
Actividades de refuerzo: Forme varias agrupaciones de estudiantes con su regla a la mano y, luego, pídales que determinen el número total de diagonales de los polígonos siguientes.



$$\mathbf{N} = \frac{1}{2}\,\mathbf{n}\,(\mathbf{n} - 3)$$

$$\mathbf{N} = \frac{1}{2}\,6\,(6 - 3)$$

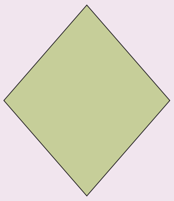
$$\mathbf{N} = \frac{18}{2} = 9.$$



$$\mathbf{N} = \frac{1}{2}\,\mathbf{n}\,(\mathbf{n} - 3)$$

$$\mathbf{N} = \frac{1}{2}\,5\,(5 - 3)$$

$$\mathbf{N} = \frac{10}{2} = 5.$$



$$\mathbf{N} = \frac{1}{2}\,\mathbf{n}\,(\mathbf{n} - 3)$$

$$\mathbf{N} = \frac{1}{2}\,4\,(4 - 3)$$

$$\mathbf{N} = \frac{4}{2} = 2.$$

Ficha 34.

Aprender a aprender

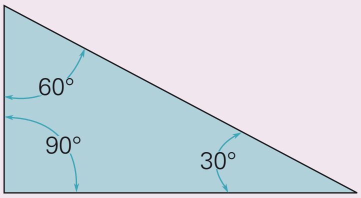
Pregunte a sus estudiantes: *¿Creen que los conocimientos previos sobre las diagonales de los polígonos facilitaron el trabajo en esta doble página? ¿Por qué?*

Indicadores de logro

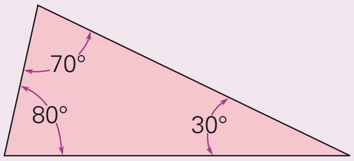
- **Identifica** y **calcula** las medidas de los ángulos interiores y exteriores de un polígono.

Más información

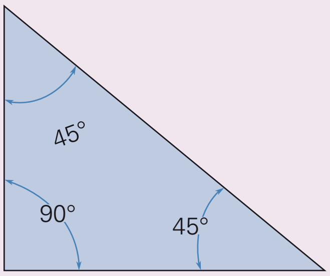
Las medidas de los ángulos interiores de un triángulo suman 180°.



90° + 60° + 30° = 180°

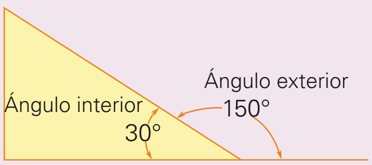


80° + 70° + 30° = 180°



90° + 45° + 45° = 180°

Un ángulo interior más su exterior suman 180°.



RECUPERACIÓN

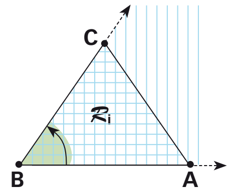
Responde.

- ¿Cuál es la suma de las medidas de los tres ángulos de cualquier clase de triángulo? *180º.*

1 Ángulos interiores y exteriores de un polígono

Un ángulo interior de un polígono es el ángulo comprendido entre dos lados consecutivos y tal que su región interior contiene a la región interior del polígono.

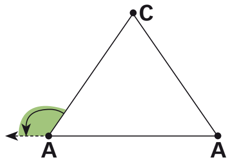
En la figura, ∢**B** es un ángulo interior del triángulo **ABC**.



Fíjate que ∢**B** está comprendido entre los lados **AB** y **BC** del triángulo y la región interior de este polígono está contenida en la región interior del ángulo.

Un polígono de **n** lados tiene igual número de ángulos interiores.

Un ángulo exterior de un polígono es el ángulo comprendido entre un lado y la prolongación de su lado consecutivo.



Un ángulo exterior de un polígono convexo es el suplemento del ángulo interior:

m ∢ ángulo exterior = 180º – **m** ∢ ángulo interior

De la relación anterior se infiere que la suma de los ángulos exterior e interior que comparten un mismo vértice es 180º.

En un polígono cóncavo no tiene sentido definir un ángulo externo como el suplemento de un ángulo interno en los casos en que este sea mayor de 180º.

EJEMPLO RESUELTO:

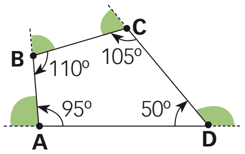
- Obener las medidas de los ángulos exteriores del polígono.

m ∢ exterior **A** = 180º – 95º = 85º.

m ∢ exterior **B** = 180º – 110º = 70º.

m ∢ exterior **C** = 180º – 105º = 75º.

m ∢ exterior **D** = 180º – 50º = 130º.

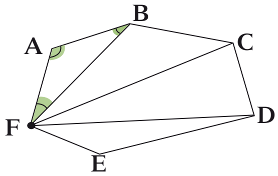


Sugerencias didácticas

- **Inicio:** Oriente a sus estudiantes para que respondan en el aula la pregunta de recuperación de experiencias previas propuesta en el apartado *Recuperación*, en la que expresarán cuál es la suma de las medidas de los tres ángulos de cualquier clase de triángulo.
- **Desarrollo:** Haga que lean cuidadosamente el contenido de la doble página, que observen las representaciones gráficas y los procedimientos para determinar las medidas de los ángulos interiores y exteriores de los polígonos. Motíveles para que reproduzcan los ejemplos resueltos en sus cuadernos. Pídales que lean y discutan en el grupo la información que les ofrece la joven ubicada a la izquierda de la página.

2 Suma de los ángulos de un polígono

Observa el polígono irregular **ABCDEF** y las diagonales trazadas desde el vértice **F**.



Las diagonales que salen de un vértice dividen a un polígono de **n** lados en (**n** – 2) triángulos, ya que hay 2 lados a los que les corresponde el mismo triángulo.

Como la suma de los ángulos de un triángulo es 180° y el polígono fue descompuesto en (**n** – 2) triángulos, la suma, **S**(**n**), de los ángulos interiores del polígono es:

$$S(n) = 180°(n - 2)$$

La expresión anterior es válida independientemente de si el polígono es convexo o es cóncavo.

EJEMPLO RESUELTO:

- Determinar la suma de los ángulos interiores de un octágono.

  Como **n** = 8: **S**(8) = 180°(8 – 2) = 180°(6) = 1 080°.

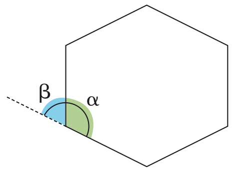
  La suma de los ángulos interiores de un octágono es 1 080°.

Para un polígono convexo la suma de sus ángulos exteriores es 360°, independientemente de su número de lados.

La afirmación anterior no es cierta para polígonos cóncavos.

SABER MÁS

Medidas de los ángulos interiores y exteriores de un polígono regular

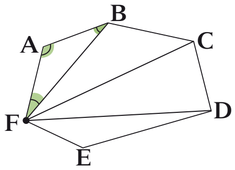


Como los ángulos interiores de un polígono regular son congruentes, entonces:

$$m\angle\alpha = \frac{180°(n-2)}{n}$$

La medida de los ángulos exteriores es:

$$m\angle\beta = \frac{360°}{n}$$



ACTIVIDADES

6 Obtén la suma de las medidas de los siguientes polígonos.

- Un pentágono. *S(5) = 540°.*
- Un eneágono. *S(9) = 1 260°.*
- Un endecágono. *S(11) = 1 620°.*
- Un hexadecágono. *S(16) = 2 520°.*

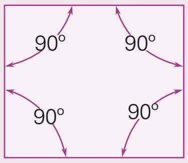
7 Obtén la medida de los ángulos interiores y exteriores de los polígonos de la actividad anterior, si fuesen regulares. *m ∡α = 108°; m ∡β = 72°.* *m ∡α = 140°; m ∡β = 40°.* *m ∡α = 147°16′22″; m ∡β = 32°43′38″.* *m ∡α = 157°30′; m ∡β = 22°30′.*

8 Determina el número de lados del polígono regular cuyos ángulos interiores tienen las medidas siguientes.

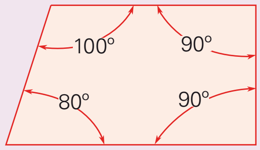
- α = 90°. *n = 4.*
- α = 128°34′17.14″ *n = 7.*
- α = 156°. *n = 15.*
- α = 160°. *n = 18.*
- α = 162°. *n = 20.*

Más informacíón

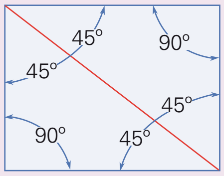
Las medidas de los ángulos interiores de un cuadrilátero suman 360°.



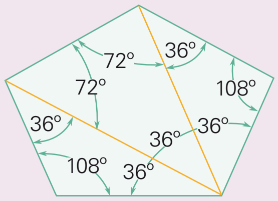
90° + 90° + 90° + 90° = 360°.



100° + 90° + 90° + 80° = 360°.



Si se traza la diagonal a un cuadrado se forman dos triángulos.



Las medidas de los ángulos interiores de un pentágono suman 540° y se puede dividir en tres triángulos.

Ficha 35.

- **Desarrollo:** Muestre a sus estudiantes los ejemplos y sus procedimientos desarrollados en la doble página, en los que se determinan medidas de los ángulos interiores y exteriores de polígonos. Diseñe ejemplos adicionales. Pídales que lean y reproduzcan el contenido del apartado *Saber más*, que trata sobre las medidas de los ángulos interiores y exteriores de un polígono regular.
- **Cierre:** Motive a sus estudiantes a realizar los ejercicios del apartado *Actividades*. En la actividad 6, determinarán la suma de las medidas de los polígonos especificados. En la actividad 7, obtendrán la medida de los ángulos interiores y exteriores de los polígonos de la actividad anterior. En la actividad 8, obtendrán el número de lados del polígono regular cuyos ángulos interiores tienen las medidas indicadas.

Aprender a aprender

Pregunte al grupo: *¿Les parecieron importantes los conceptos estudiados en esta oportunidad? ¿Qué utilidad para la cotidianidad tienen estos conceptos?*

Indicador de logro

- **Calcula** perímetros y áreas de polígonos simples diversos.

Actividad interactiva

Área del rombo

Actividad interactiva en la que calcularán, en sus cuadernos, el área de figuras decorativas compuestas por rombos y, luego, seleccionarán las opciones correctas.

Más información

El perímetro de un triángulo equilátero (todos los lados iguales) se obtiene:

$$\mathbf{P} = \mathbf{a} + \mathbf{a} + \mathbf{a}$$

$$\mathbf{P} = (3)(\mathbf{a})$$

- El perímetro de un triángulo isósceles (dos lados iguales) y base **b** se obtiene:

$$\mathbf{P} = \mathbf{a} + \mathbf{a} + \mathbf{b}$$

$$\mathbf{P} = (2)(\mathbf{a}) + \mathbf{b}$$

- El perímetro de un triángulo escaleno (todos los lados distintos) de lados **a**, **b** y **c** se obtiene:

$$\mathbf{P} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$$

- El perímetro de un cuadrado se obtiene sumando las longitudes de sus lados.

$$\mathbf{P} = \mathbf{a} + \mathbf{a} + \mathbf{a} + \mathbf{a}$$

$$\mathbf{P} = (4)(\mathbf{a})$$

- El área del cuadrado se obtiene:

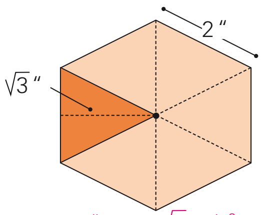
$$\mathbf{A} = (\text{lado})\,(\text{lado}) = (\text{lado})^2$$

$$\mathbf{A} = (\mathbf{a})(\mathbf{a})$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{a}2$$

RECUPERACIÓN

Calcula el perímetro y el área del polígono regular.



$P = 12''$; $A = 6\sqrt{3}$ pulg^2

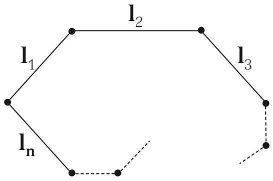
1 Perímetro de un polígono

El perímetro, **P**, de un polígono simple es la magnitud que resulta de sumar las longitudes de todos sus lados.

El perímetro de un polígono simple de **n** lados es:

$$\mathbf{P} = \mathbf{l}_1 + \mathbf{l}_2 + \mathbf{l}_3 + \ldots + \mathbf{l}_n$$

P es un número positivo: $\mathbf{P} > 0$.



EJEMPLO RESUELTO:

- Determinar el perímetro del polígono simétrico siguiente.

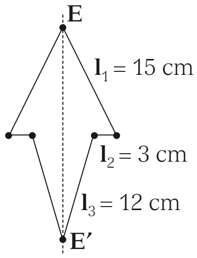
El polígono tiene un eje de simetría **EE'**, por lo que su perímetro se obtiene con:

$\mathbf{P} = 2(\mathbf{l}_1 + \mathbf{l}_2 + \mathbf{l}_3)$

De la expresión anterior se obtiene:

$\mathbf{P} = 2(15\text{ cm} + 3\text{ cm} + 12\text{ cm}) = 60$ cm.

El perímetro del polígono es de 60 cm.



El perímetro, **P**(**n**), de un polígono regular de **n** lados de longitud **l**, se obtiene de manera inmediata con la siguiente expresión:

$$\mathbf{P}(\mathbf{n}) = \mathbf{n}\,\mathbf{l}$$

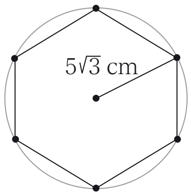
EJEMPLO RESUELTO:

- Obtener el perímetro del hexágono regular inscrito.

Los lados de un hexágono regular inscrito son de igual longitud que el radio de la circunferencia, por lo que:

$\mathbf{P}(6) = 6\mathbf{l} = 6(5\sqrt{3}) = 30\sqrt{3}$.

El perímetro buscado es de $30\sqrt{3}$ cm.



El cálculo del perímetro de un polígono con determinadas características de simetría puede se realizado con facilidad haciendo uso de esas características.

Sugerencias didácticas

- **Inicio:** Oriente a sus estudiantes para que lean y resuelvan en el aula la actividad vinculada a la recuperación de experiencias previas planteada en el apartado *Recuperación*, en la que calcularán el perímetro y el área del polígono regular representado.
- **Desarrollo:** Pídales que lean el contenido de la doble página, que observen las representaciones gráficas y los procedimientos aplicados en el desarrollo de los ejemplos resueltos. Haga que reproduzcan los ejemplos en sus cuadernos.

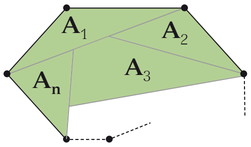
2 Área de un polígono

El **área**, **A**, de un polígono simple es un número real positivo que mide la extensión de su región interior.

Para obtener el área de un polígono simple no regular, se recurre a descomponerlo en polígonos de tres y cuatro lados, cuyas áreas se calculan de forma inmediata con facilidad.

$\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_3 + \ldots + \mathbf{A}_n$

A es un número positivo: $\mathbf{A} > 0$.



EJEMPLO RESUELTO:

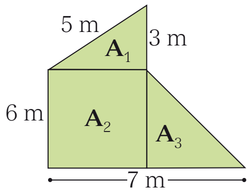
- Determinar el área del polígono irregular de la derecha.

  El polígono puede ser descompuesto de distintas maneras, una de las cuales se muestra en la figura.

  El área del polígono es la suma: $\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_3$.

  $\mathbf{A} = \frac{1}{2}(3)\sqrt{(5^2 - 3^2)} + (4)(6) + \frac{1}{2}(3)(6) = 6 + 24 + 9 = 39.$

  El área del polígono es de 39 cm².



El área, **A(n)**, de un polígono regular de perímetro **P(n)** y apotema **a** se obtiene con: $\mathbf{A}(n) = \mathbf{P}(\mathbf{n})\mathbf{a}/2$.

EJEMPLO RESUELTO:

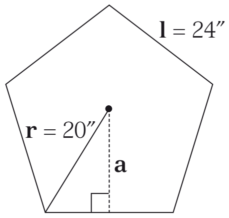
- Obtener el área del pentágono regular del margen derecho.

  El perímetro del pentágono es: $\mathbf{P} = 5\mathbf{l} = 5(24) = 120''$.

  Su apotema es: $\mathbf{a} = \sqrt{4\mathbf{r}^2 - \mathbf{l}^2}/2 = \sqrt{4(20)^2 - 24^2}/2 = 16''$.

  Luego: $\mathbf{A} = \mathbf{a}/2 = (120)(16)/2 = 960$.

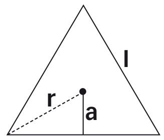
  El área del pentágono regular es de 960 pulg².



RECUERDA

Apotema

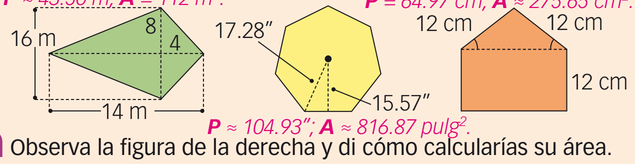
La **apotema**, **a**, de un polígono regular es el segmento perpendicular que va desde su centro a uno de sus lados.



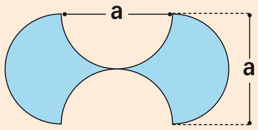
$\mathbf{a} = \frac{1}{2}\sqrt{4\mathbf{r}^2 - \mathbf{l}^2}$

ACTIVIDADES

9 Determina el perímetro y el área de los siguientes polígonos.



10 Observa la figura de la derecha y di cómo calcularías su área.



A = a².

Más información

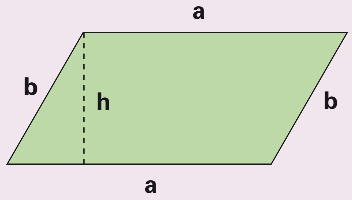
El perímetro y el área del rectángulo se obtienen:

P = **a** + **a** + **b** + **b**

P = (2)(**a**) + (2)(**b**)

P = (2) (**a** + **b**)

El perímetro y el área del romboide se obtienen:



P = **a** + **a** + **b** + **b**

P = (2)(**a**) + (2)(**b**)

P = (2) (**a** + **b**)

A = (**a**) (**b**)

Atención a la diversidad

Actividades de ampliación: Motive al grupo para que calculen el perímetro y el área de diversos polígonos: triángulos, cuadrados, rectángulos, romboides, etc. Haga que realicen esta actividad en sus cuadernos y, luego, envíeles a la pizarra.

Ficha 36.

- **Desarrollo:** Haga que sus estudiantes calculen el perímetro y el área de polígonos diversos. Motíveles para que calculen el área de polígonos irregulares simples similares a los propuestos en la página 129. Propóngales que lean y comenten en el grupo el contenido del apartado *Recuerda*.
- **Cierre:** Motive a sus estudiantes a realizar los ejercicios propuestos en el apartado *Actividades*. En la actividad 9, determinarán el perímetro y el área de los polígonos representados. En la actividad 10, observarán la figura de la derecha y, luego, dirán cómo calcularían su área.

Aprender a aprender

Pregunte al grupo: *¿Creen que los conocimientos previos hicieron más fácil el trabajo en esta oportunidad? ¿Por qué?*

Indicador de logro

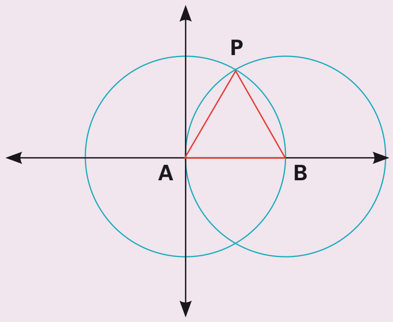
- **Construye** polígonos cuyos lados tienen una longitud dada.

Otras actividades

Construcción de un triángulo equilátero

Para trazar un triángulo equilátero usando la regla y el compás seguimos los siguientes pasos:

- Trazamos una circunferencia con centro en **A** y radio **AB**.
- Trazamos otra circunferencia con centro en **B** y el mismo radio **AB**.
- Las dos circunferencias trazadas se cortan en dos puntos.
- Se toma uno de los dos puntos, al que designamos **P**.
- Trazamos los segmentos **AP** y **PB**, construimos el triángulo equilátero **APB**.



Haga que sus estudiantes construyan, en hojas blancas, un triángulo equilátero usando la regla y el compás.

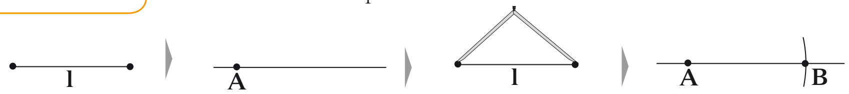
RECUPERACIÓN

Traza la mediatriz de un segmento **MN** de longitud 12 cm y, luego, comprueba tu resultado.

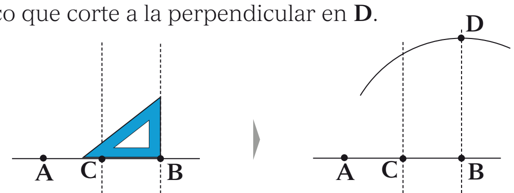
1 Construcción de un pentágono regular

Para construir un pentágono regular de lados de longitud, **l**:

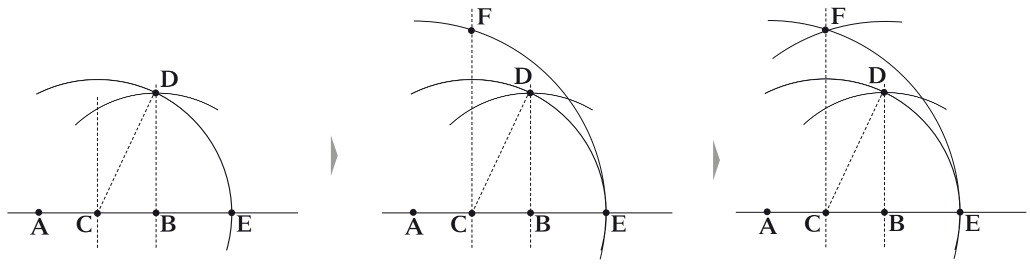
1.º Se marca un punto **A** sobre un segmento. Se apoya el compás en **A** y con abertura **l**, se traza un arco que corta al segmento en un punto **B**.



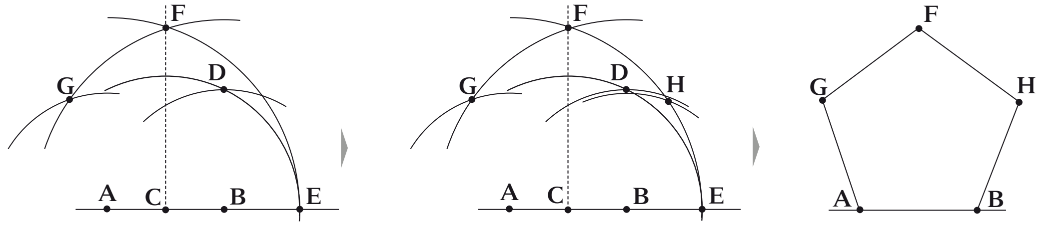
2.º Se obtiene el punto medio **C** de $\overline{\mathbf{AB}}$. Luego, con un cartabón se traza la perpendicular al segmento inicial en el punto **B** y con radio $\overline{\mathbf{AB}}$, y apoyando el compás en **B**, se traza un arco que corte a la perpendicular en **D**.



3.º Con radio $\overline{\mathbf{CD}}$ y centro **C**, se traza un arco que corte al segmento inicial **E** y con radio $\overline{\mathbf{AE}}$ y centro **A**, se traza otro arco que corte a la mediatriz en **F**. Con el mismo radio, y centro en **B**, se traza un arco que corte al anterior en **F**.



4.º Con radio $\overline{\mathbf{AB}}$ y centro **A**, se traza un arco que corte al anterior en **G** y con igual radio y centro en **B**, se traza otro arco que corte al arco **FE** en **H**. Los segmentos $\overline{\mathbf{BH}}$, $\overline{\mathbf{HF}}$, $\overline{\mathbf{FG}}$ y $\overline{\mathbf{GA}}$ forman el pentágono regular.



Sugerencias didácticas

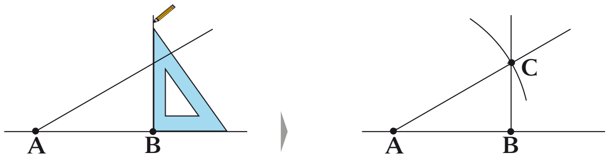
- **Inicio:** Oriente a sus estudiantes para que lean y resuelvan en el aula la actividad vinculada a la recuperación de experiencias previas propuesta en el apartado *Recuperación*, en la que trazarán la mediatriz de un segmento **MN** de longitud 12 cm y, luego, comprobarán sus resultados.
- **Desarrollo:** Pídales que lean el contenido de la doble página, que observen las representaciones gráficas y los procedimientos para las construcciones del pentágono y el heptágono regulares. Haga que reproduzcan los ejemplos resueltos y sus respectivos gráficos en sus cuadernos.

2 Construcción de un heptágono regular

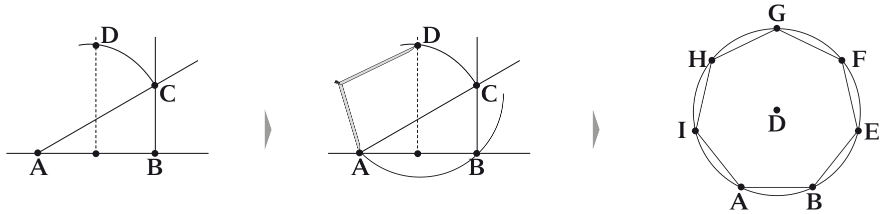
Para construir un heptágono regular de lados de longitud, **l**, dada:

1.º Se traza un segmento y se traslada sobre él un segmento $\overline{\mathbf{AB}}$ de longitud **l**. Luego, con un cartabón se traza un segmento desde **A**, inclinado 30º con respecto a $\overline{\mathbf{AB}}$.

2.º Por el punto **B** se traza una perpendicular que corte al segmento anterior en **C**. Luego, se traza un arco con centro en **A** y radio $\overline{\mathbf{AC}}$.



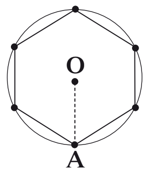
3.º Se traza la mediatriz del segmento $\overline{\mathbf{AB}}$ que cortará al arco trazado en el paso anterior en un punto **D**. Con centro en **D** y radio $\overline{\mathbf{DA}} = \overline{\mathbf{DB}}$, se traza una circunferencia. Con la medida de $\overline{\mathbf{AB}}$ = **l**, y apoyando el compás en **B**, se traslada la medida de $\overline{\mathbf{AB}}$ seis veces sobre la circunferencia hasta que quede construido el heptágono.



RECUERDA

Construcción de un hexágono regular

Para construir un hexágono regular, se traza una circunferencia y se traslada seis veces la medida de su radio sobre ella.



ACTIVIDADES

11 Construye sobre una cartulina usando regla, compás y cartabón.

- Un triángulo equilátero cuyo lado mida 10 cm.
- Un hexágono regular cuyo lado mida 8.5 cm.
- Un heptágono regular cuyo lado mida 9.2 cm.

12 Piensa y, luego, responde.

- ¿Cómo construirías, partiendo de un cuadrado, un octágono cuyos lados sean todos congruentes? ¿El octágono así construido será regular? ¿Por qué respondiste como lo hiciste?

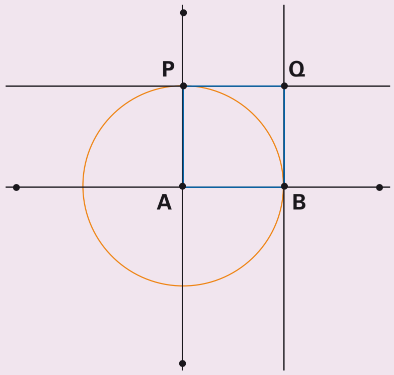
Trazando las bisectrices de todos sus lados con la misma abertura de compás. Pero el resultado no es, en general, un octágono regular, porque los ángulos entre los lados podrían tener valores distintos a 135º.

Más información

Construcción de un cuadrado

Para trazar un cuadrado usando la regla y el compás seguimos los siguientes pasos:

- Trazamos una circunferencia con centro en **A** y radio **AB**.
- Esta circunferencia corta al eje **Y** en dos puntos.
- Se toma uno de los dos puntos, al que designamos **P**.
- Trazamos la recta paralela al eje **X** que pasa por **P**.
- Trazamos la recta paralela al eje **Y** que pasa por **B**.
- El punto de corte de ambas rectas, al que designamos **Q**, es el vértice que completa el cuadrado.
- Trazamos los segmentos **AP**, **PQ** y **QB**, construimos el cuadrado **APQB**.



Ficha 37.

- **Desarrollo:** Haga que sus estudiantes realicen las construcciones del pentágono y el heptágono regulares siguiendo los pasos especificados en esta doble página. Motíveles para que lean y comenten en el grupo la información expuesta en el apartado *Recuerda* que muestra cómo se construye un hexágono regular.
- **Cierre:** Motive a sus estudiantes a realizar los ejercicios propuestos en el apartado *Actividades*. En la actividad 11, construirán sobre una cartulina, usando la regla, el compás y el cartabón, los polígonos cuyas medidas se les indican. En la actividad 12, expresarán cómo construirían, partiendo de un cuadrado, un octágono cuyos lados sean todos congruentes, si el mismo será regular y por qué respondieron cómo lo hicieron.

Aprender a aprender

Pregunte al grupo: *¿Qué similitud tienen los conceptos desarrollados en esta doble página con temas que trabajaron en grados anteriores? ¿Creen que esta similitud hizo más fácil el aprendizaje?*

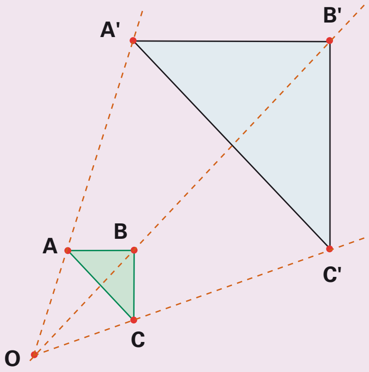
Indicadores de logro

- **Reconoce** y **realiza** traslaciones y rotaciones de figuras planas.

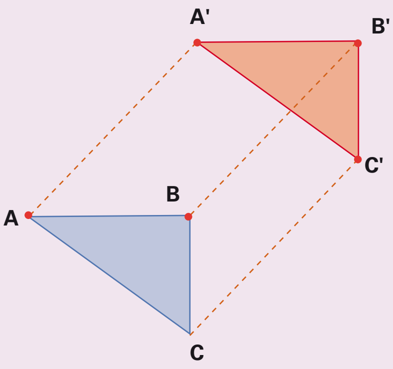
Competencias fundamentales

Competencia comunicativa

Transformación geométrica es una operación realizada en el plano, de tal manera que a cada punto de un plano corresponde otro punto del mismo plano.



El *movimiento es directo* cuando la figura original y la figura transformada por el movimiento coinciden sin salir del plano.



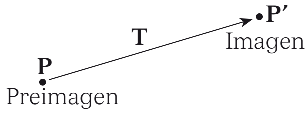
RECUPERACIÓN

Marca **P**(2, 5) sobre el plano, aumenta su abscisa 3 unidades y disminuye su ordenada 2 unidades. Representa la nueva posición del punto. ***P'****(5, 3).*

1 Concepto de transformación geométrica

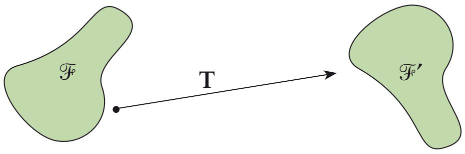
Una transformación geométrica es la operación consistente en llevar un punto desde una posición a otra.

Una transformación, **T**, puede interpretarse como una función, en la que el punto **P** se transforma en un punto **P'** y solo uno:



Dos preimágenes distintas no tienen la misma imagen.

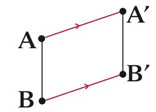
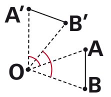
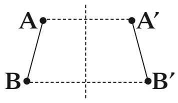
Al aplicar una misma transformación a todos los puntos de una línea, un polígono o un cuerpo, estas figuras completas experimentan dicha transformación:



2 Isometrías

Las isometrías son transformaciones geométricas que no cambian las dimensiones de la figura sobre la cual se aplican, aunque pueden modificar su orientación.

En la tabla se muestran las isometrías sobre una figura ℱ.

Isometría	Efecto	Representación
Traslación	Desplaza ℱ sobre una línea recta.	
Rotación	Gira ℱ alrededor de un punto.	
Reflexión	Los puntos de ℱ y ℱ' están a igual distancia de la mediatriz del segmento que los une.	

Embaldosado oriental. En ellos se presentan combinaciones de transformaciones geométricas.

Sugerencias didácticas

- **Inicio:** Oriente a sus estudiantes para que lean y resuelvan en el aula la actividad vinculada a la recuperación de experiencias previas propuesta en el apartado *Recuperación*, en la que marcarán el punto indicado sobre el plano cartesiano, luego, aumentarán y disminuirán las unidades especificadas y, finalmente, representarán la nueva posición.
- **Desarrollo:** Pídales que lean el contenido de la doble página, que observen las representaciones gráficas y el desarrollo de los conceptos y los ejemplos resueltos. Haga que reproduzcan la tabla que muestra las distintas isometrías y los ejemplos resueltos de traslación y rotación de figuras en sus cuadernos. Pídales que observen el embaldosado oriental en el margen izquierdo de esta página.

3 Traslación y rotación de una figura en el plano

La imagen del punto $\mathbf{P}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ del plano tras una traslación $\mathbf{T}(\mathbf{h}, \mathbf{k})$ es el punto $\mathbf{P'}(\mathbf{x} + \mathbf{h}, \mathbf{y} + \mathbf{k})$.

EJEMPLO RESUELTO:

- Aplicar $\mathbf{T}(3, -2)$ sobre el triángulo **ABC** de la derecha.

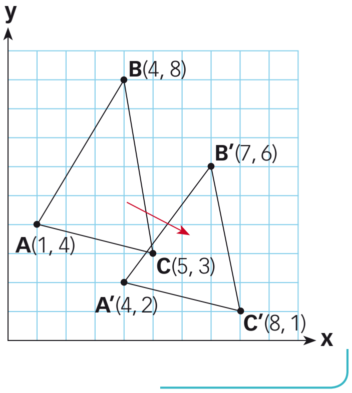
  Aquí: $\mathbf{h} = 3$; $\mathbf{k} = -2$

  $\mathbf{T}(3, -2)\ \mathbf{A}(1, 4) = \mathbf{A'}(1 + 3, 4 + [-2]) = \mathbf{A'}(4, 2)$

  $\mathbf{T}(3, -2)\ \mathbf{B}(4, 8) = \mathbf{B'}(4 + 3, 8 + [-2]) = \mathbf{B'}(7, 6)$

  $\mathbf{T}(3, -2)\ \mathbf{C}(5, 3) = \mathbf{C'}(5 + 3, 3 + [-2]) = \mathbf{C'}(8, 1)$

  A′B′C′ es imagen de **ABC**.

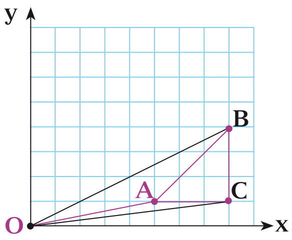


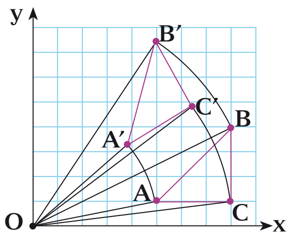
La imagen del punto **P** del plano tras una rotación de centro **O** y según un ángulo $\boldsymbol{\alpha}$, $\mathbf{R}(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{O})$, es el punto **P′** tal que $\boldsymbol{\alpha}$ es el ángulo formado por los rayos **OP** y **OP′**.

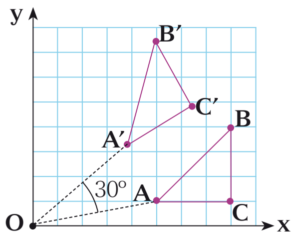
EJEMPLO RESUELTO:

- Aplicar $\mathbf{R}(30°, \mathbf{O})$ sobre el triángulo **ABC**.

  Traza $\overline{OA}$, $\overline{OC}$ y $\overline{OB}$, y sobre cada uno, tomado como rayo inicial se miden 30° y se trazan los rayos terminales correspondientes. Luego, con radios $\overline{OA}$, $\overline{OC}$ y $\overline{OB}$ y apoyando el compás en **O** se trazan arcos hasta cada rayo terminal. Los cortes de cada arco con el rayo terminal son los vértices de la imagen **A′B′C′**.







ACTIVIDADES

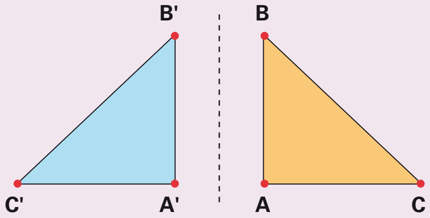
13 Realiza sobre cada figura la traslación y la rotación especificadas.

- $\mathbf{T}(-2, 5)$ y $\mathbf{R}(20°, \mathbf{O})$ sobre el triángulo de vértices $\mathbf{A}(6, 0)$, $\mathbf{B}(4, 3)$ y $\mathbf{C}(4, 6)$.
- $\mathbf{T}(-1, -3)$ y $\mathbf{R}(45°, \mathbf{O})$ sobre el cuadrado de vértices $\mathbf{A}(4, 0)$, $\mathbf{B}(7, 0)$, $\mathbf{C}(4, 0)$ y $\mathbf{B}(7, 0)$.

Competencias fundamentales

Competencia comunicativa

El movimiento es inverso cuando la figura original y la figura transformada por el movimiento no pueden coincidir en un mismo plano.



Atención a la diversidad

Actividades de refuerzo: Motive al grupo para que apliquen traslaciones y rotaciones sobre triángulos y segmentos diversos, similares a los ejemplos desarrollados en esta doble página. Por ejemplo:

T (2, 4) y **R** (40°, **O**) sobre el segmento de extremo **A** (2, 7) y **B** (6, 3).

Ficha 38.

- **Desarrollo:** Diseñe ejercicios similares a los propuestos en esta doble página en los que apliquen rotaciones y traslaciones a segmentos y triángulos y cuadrados. Haga que realicen los gráficos sobre papel cuadriculado.
- **Cierre:** Motive a sus estudiantes a realizar los ejercicios propuestos en el apartado *Actividades*. En la actividad 13, realizarán, sobre cada figura, la traslación y la rotación especificadas. Acompáñeles en la realización de estas actividades.

Aprender a aprender

Pregunte al grupo: *¿Tuvieron alguna dificultad en el proceso de trasladar o rotar las figuras geométricas? ¿En qué consistió el problema?*

Indicador de logro

- **Efectúa** reflexiones diversas de puntos, líneas y polígonos.

RECUPERACIÓN

Responde.

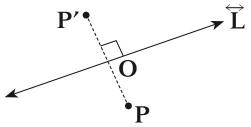
- ¿Qué cambia y qué no cambia en la imagen de un objeto colocado frente a un espejo plano?

No cambian sus dimensiones, pero sí su orientación derecha izquierda.

1 Reflexión de una figura en el plano

La imagen del punto **P**(**x**, **y**) del plano, tras una reflexión con respecto a una recta $\overleftrightarrow{L}$, es el punto **P’**(**x’**, **y’**) tal que:

1. $\overline{PP'} \perp \overleftrightarrow{L}$.
2. $\overline{OP} = \overline{OP'}$, con $O = \overline{PP'} \cap \overleftrightarrow{L}$.



La recta $\overleftrightarrow{L}$ con respecto a la cual se sitúan el punto **P** y su imagen **P’** es el eje de simetría o espejo de la reflexión, $S(\overleftrightarrow{L})$.

Si $P \in \overleftrightarrow{L}$, entonces: $S(\overleftrightarrow{L})\ P = P$. El punto **P** es un punto doble.

2 Reflexión respecto a un eje coordenado

Si se toma al eje **X** como espejo, la imagen de **P**(**x**, **y**) es **P’**(**x**, – **y**): **S**(**X**) **P**(**x**, **y**) = **P’**(**x**, – **y**).

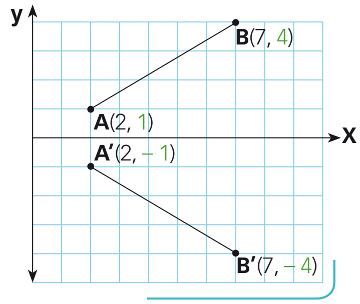
EJEMPLO RESUELTO:

- Aplicar sobre el segmento $\overline{AB}$ una reflexión $S(\overleftrightarrow{X})$.

  $S(\overleftrightarrow{X})$ A(2, 1) = A’(2, – 1)

  $S(\overleftrightarrow{X})$ B(7, 4) = B’(7, – 4)

  El segmento $\overline{A'B'}$ es la imagen del segmento $\overline{AB}$.



Si el espejo es el eje **Y**, la imagen de **P**(**x**, **y**) es **P’**(– **x**, **y**): **S**(**Y**) **P**(**x**, **y**) = **P’**(– **x**, **y**).

EJEMPLO RESUELTO:

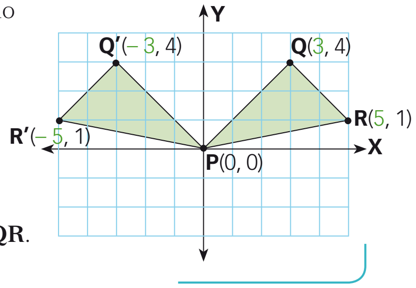
- Aplicar sobre el triángulo **PQR** una reflexión $S(\overleftrightarrow{Y})$.

  $S(\overleftrightarrow{Y})$ P(0, 0) = P’(0, 0)

  $S(\overleftrightarrow{Y})$ Q(3, 4) = Q’(– 3, 4)

  $S(\overleftrightarrow{Y})$ R(5, 1) = R’(– 5, 1)

  El triángulo **PQ’R’** es la imagen del triángulo **PQR**.



Reflejo. Un objeto y su imagen, obtenida mediante una reflexión, forman una figura simétrica.

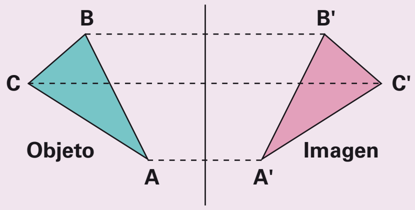
Más información

Reflexión

Reflexión del triángulo **ABC** con eje de reflexión en la recta **L**.

Para reflejar un triángulo o cualquier figura geométrica:

- Se trazan por cada vértice del triángulo, rectas perpendiculares al eje de reflexión o de simetría.
- Se toman, con el compás, la distancia entre cada vértice y el eje de reflexión, los cuales se trasladan al otro lado del eje de reflexión o de simetría.
- Unimos con segmentos de recta los vértices de la figura reflejada.

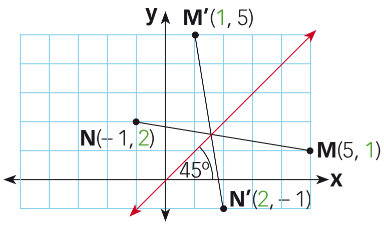


Sugerencias didácticas

- **Inicio:** Oriente a sus estudiantes para que lean y respondan en el aula la pregunta vinculada a la recuperación de experiencias previas formulada en el apartado *Recuperación*, en la que responderán qué cambia y qué no cambia en la imagen de un objeto colocado frente a un espejo.
- **Desarrollo:** Pídales que lean el contenido de la doble página, que observen las representaciones gráficas y los procedimientos aplicados en el desarrollo de los ejemplos resueltos. Haga que reproduzcan los gráficos en sus cuadernos. Pídales que observen la fotografía de un objeto y su imagen y que lean y comenten la información al pie de la misma.

3 Reflexiones respecto a las rectas y = x e y = – x

Si se toma una recta de ecuación **y** = **x** como espejo: **S**(**y** = **x**) **P**(**x**, **y**) = **P'**(**y**, **x**). Si el espejo es la recta **y** = – **x**: **S**(**y** = **x**) **P**(**x**, **y**) = **P'**(– **y**, – **x**).



EJEMPLOS RESUELTOS:

- Aplicar sobre el segmento $\overline{\mathbf{MN}}$ una reflexión **S**(**y** = **x**).

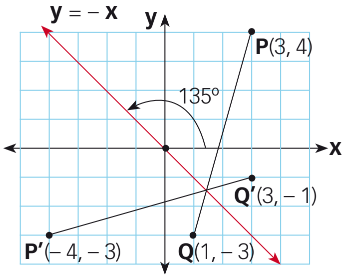
  S(**y** = **x**) **M**(5, 1) = **M'**(1, 5); **S**(**y** = **x**) N(– 1, 2) = **N'**(2, – 1)

  El segmento $\overline{\mathbf{M'N'}}$ es la imagen del segmento $\overline{\mathbf{MN}}$.

- Aplicar sobre el segmento $\overline{\mathbf{PQ}}$ una reflexión **S**(**y** = – **x**).

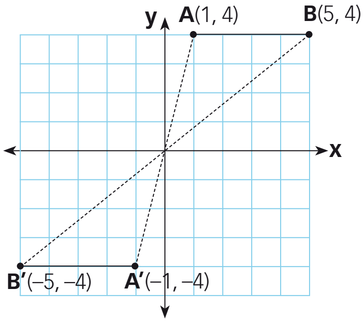
  S(**y** = – **x**) **P**(3, 4) = **P'**(– 4, – 3); **S**(**y** = – **x**) **Q**(1, – 3) = **Q'**(3, – 1)

  El segmento $\overline{\mathbf{P'Q'}}$ es la imagen del segmento $\overline{\mathbf{PQ}}$.



4 Simetría central

Hay simetría central con respecto al origen de coordenadas si la imagen del punto **P**(**x**, **y**) es **P'**(– **x**, – **y**): **S**(**O**) **P**(**x**, **y**) = **P'**(– **x**, – **y**).



EJEMPLO RESUELTO:

- Aplicar sobre el segmento $\overline{\mathbf{AB}}$ una simetría central, **S**(**O**).

  Se aplica **S**(**O**) a cada uno de los extremos del segmento:

  S(**O**) **A**(1, 4) = **A'**(– 1, – 4); **S**(**O**) **B**(5, 4) = **B'**(– 5, – 4).

  El segmento $\overline{\mathbf{A'B'}}$ es el resultado de aplicar **S**(**O**) sobre el segmento $\overline{\mathbf{AB}}$.

ACTIVIDADES

14 Traza sobre una hoja de papel cuadriculado cada una de las figuras de vértices dados y, luego, obtén su imagen tras cada reflexión especificada.

- **A**(0, 5); **B**(8, 0); **S**(**X**) *A'(0, – 5); B'(8, 0).*
- **A**(– 5, 3); **B**(4, 5); **S**(**Y**) *A'(5, 3); B'(– 4, 5).*
- **A**(0, 0); **B**(5, 3); **C**(2, 5); **S**(**X**) *A'(0, 0); B'(5, – 3); C'(2, – 5).*
- **A**(0, 0); **B**(1, 3); **C**(4, 4); **D**(3, 1); **S**(**X**) *A'(0, 0); B'(1, – 3); C'(4, – 4); D'(3, – 1).*
- **A**(– 4, 0); **B**(– 4, 2); **C**(1, 5); **D**(1, 3); **S**(**Y**) *A'(4, 0); B'(4, 2); C'(– 1, 5); D'(– 1, 3).*

15 Obtén **S**(**O**) y **S**(**y** = **x**) para el triángulo de vértices **A**(– 2, – 3); **B**(– 4, 4); **C**(2, – 1).

S(O): A'(2, 3); B'(4, – 4); C'(– 2, 1); S(y = x): A'(– 3, – 2); B'(4, – 4); C'(– 1, 2).

- **Desarrollo:** Muestre a sus estudiantes los procedimientos para realizar reflexiones de figuras sobre el plano. Desarrolle los ejemplos en la pizarra y diseñe otros adicionales para mejor comprensión de los temas. Pídales que realicen los gráficos sobre papel cuadriculado.
- **Cierre:** Motive a sus estudiantes a realizar los ejercicios propuestos en el apartado *Actividades*. En la actividad 14, trazarán sobre una hoja de papel cuadriculado cada una de las figuras de vértices dados y, luego, obtendrán su imagen tras cada reflexión especificada. En la actividad 15, obtendrán **S**(**O**) y **S**(**y** = **x**) para el triángulo de vértices dados.

Competencia comunicativa

Simetría central

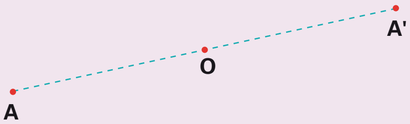
La simetría central es una transformación geométrica en la que a cada punto se relaciona con otro punto llamado imagen.

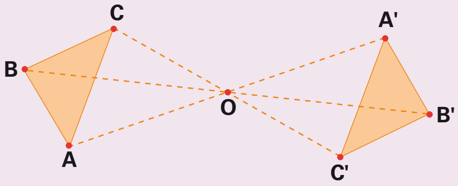
En la simetría central se identifica que:

a) El punto y su imagen están a la misma distancia de un punto denominado centro de simetría.

b) El punto, su imagen y el centro de simetría pertenecen a una misma recta.

El simétrico del punto **A** con respecto a un punto **O**, es un punto **A'** que cumple que **OA** = **OA'** y donde los tres puntos son colineales, es decir, pertenecen a la misma recta.





Ficha 39.

Aprender a aprender

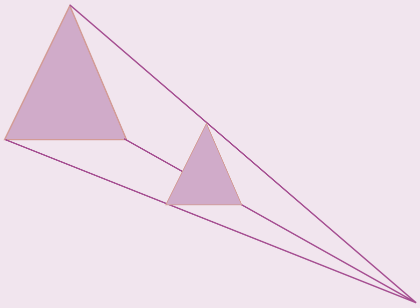
Pregunte al grupo: *¿Tuvieron alguna dificultad en los procedimientos para efectuar reflexiones de figuras geométricas? ¿Qué pasos dieron para superarla?*

Indicadores de logro

- **Reconoce** distintas homotecias y **las aplica** sobre figuras dadas.

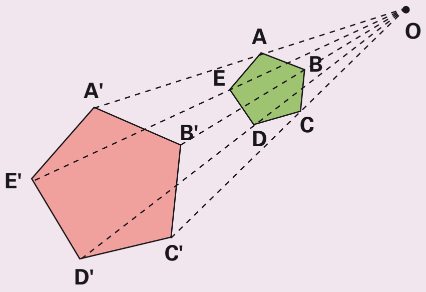
Más información

La homotecia es la transformación de figuras geométricas en un plano. Se toma como referencia un punto y desde este punto se proyectan rectas que pasen por los vértices de las figuras.



El centro de homotecia es el punto donde se unen las rectas proyectadas desde los vértices.

En la homotecia existen una figura original y una figura homotética. De acuerdo con la distancia a que quede una figura de la otra, sus relaciones de tamaño van a depender de la razón de homotecia.



RECUPERACIÓN

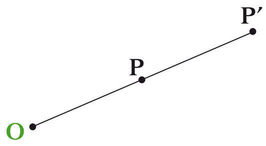
Responde.

- ¿Cuándo se afirma de dos figuras que son semejantes?

Cuando los lados homólogos de una y de otra son proporcionales y sus ángulos son congruentes.

1 Homotecia de un punto

Conocidos un punto fijo, **O**, del plano y un número real, **r**, distinto de cero, una homotecia, **H**(**O**, **r**), es la transformación que aplicada sobre un punto **P** lo transforma en otro punto **P′** tal que: $\overline{OP'}/\overline{OP} = r$.



Los puntos **O**, **P** y **P′** son colineales.

O es el centro de homotecia y el número **r** la razón de homotecia.

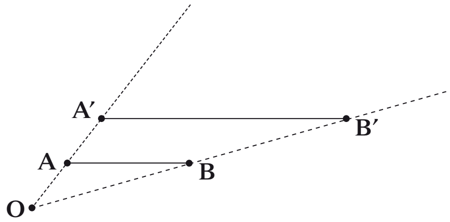
En la figura siguiente se muestra la aplicación de la homotecia **H**(**O**, 3) sobre el punto **P**:

Como la razón de homotecia es **r** = 3, la longitud del segmento $\overline{OP'}$ es tres veces la longitud del segmento $\overline{OP}$: $\overline{OP'}/\overline{OP} = 3$.

EJEMPLO RESUELTO:

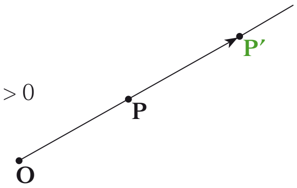
- Aplica **H**(**O**, 2) sobre el segmento $\overline{AB}$ siguiente.

  Aquí la razón de homotecia es: **r** = 2.

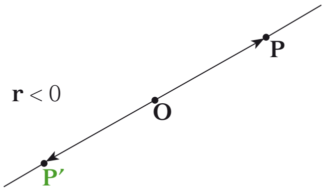


El segmento $\overline{A'B'}$ es tal que: $\measuredangle(\overline{A'B'})/\measuredangle(\overline{AB}) = 2$.

r > 0



r < 0



Si **r** es positiva, los puntos **P** y **P′** están en la misma semirrecta. En cambio, si **r** es negativa, los puntos **P** y **P′** están en semirrectas opuestas y del mismo origen **O**.

H(**O**, 1) deja inalterado al punto **P**, es una homotecia identidad y **H**(**O**, – 1) es una simetría central, de centro **O**.

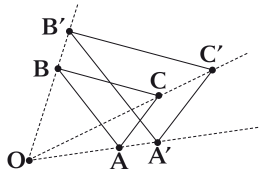
Sugerencias didácticas

- **Inicio:** Oriente a sus estudiantes para que lean y resuelvan en el aula la pregunta vinculada a la recuperación de experiencias previas formulada en el apartado *Recuperación*, en la que responderán cuándo se afirma de dos figuras que son semejantes.
- **Desarrollo:** Pídales que lean el contenido de la doble página, que observen las representaciones gráficas y el desarrollo de los procedimientos en las aplicaciones de homotecias en los ejemplos resueltos. Haga que reproduzcan los ejemplos y sus gráficos en sus cuadernos.

2 Figuras homotéticas

Dos figuras, $\mathcal{F}$ y $\mathcal{F}'$, son homotéticas si están relacionadas mediante una homotecia.

Los triángulos **ABC** y **A'B'C'** son homotéticos:

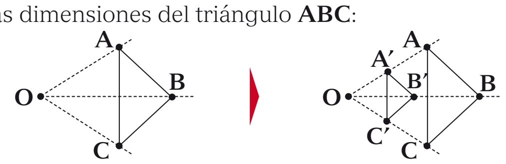


Los triángulos **ABC** y **A'B'C'** son figuras semejantes. Una homotecia transforma una figura en otra semejante (transformación de semejanza).

EJEMPLOS RESUELTOS:

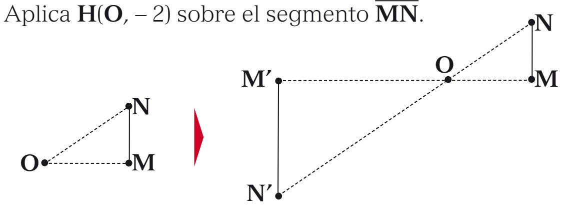
- Aplica **H**(**O**, 1/2) sobre el triángulo **ABC** siguiente.

  Como **r** = $\overline{\mathbf{OP'}}/\overline{\mathbf{OP}}$ = 1/2, la homotecia reduce a la mitad las dimensiones del triángulo **ABC**:



  A'B'C' es la figura homotética de **ABC**.

- Aplica **H**(**O**, – 2) sobre el segmento $\overline{\mathbf{MN}}$.



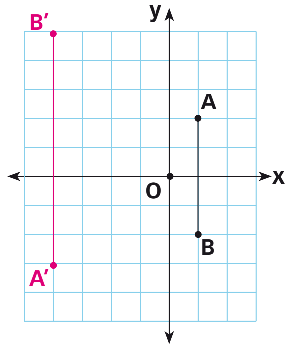
  Los segmentos homotéticos están a ambos lados de **O**.

INTELIGENCIA COLABORATIVA

Producto de homotecias

La aplicación de una homotecia $\mathbf{H}_2(\mathbf{O}, \mathbf{r}_2)$ sobre el resultado de aplicar una homotecia anterior, $\mathbf{H}_1(\mathbf{O}, \mathbf{r}_1)$, es un producto de homotecias.

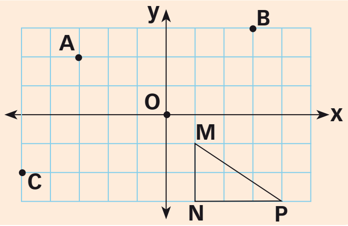
- Apliquen el producto de homotecias $\mathbf{H}_2(\mathbf{O}, 2)$ $\mathbf{H}_1(\mathbf{O}, -1)$ al segmento **AB**.



ACTIVIDADES

16 Copia el triángulo **MNP** de la derecha sobre una hoja de papel cuadriculado y realiza sobre él cada una de las homotecias siguientes.

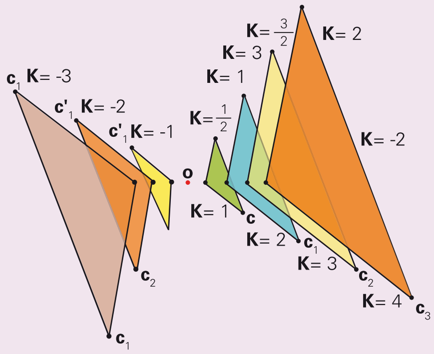
- **H**(**O**, 2)
- **H**(**O**, 3/2)
- **H**(**O**, – 2)
- **H**(**A**, – 1/2)
- **H**(**B**, _ 2.5)
- **H**(**C**, 2)



Competencia comunicativa

Propiedades de la homotecia

- Los segmentos homólogos resultantes de aplicar una homotecia son paralelos.
- Los ángulos respectivos de las figuras resultantes de aplicar homotecia son iguales, ya que tienen la misma medida.
- Las dimensiones de las figuras por homotecia son directamente proporcionales, esta se determina mediante la razón de homotecia.
- Las figuras producto de la homotecia son semejantes, aunque no todas las figuras semejantes son homotéticas.
- Cuando el valor absoluto de la razón de homotecia es mayor a 1, la figura resultante es *mayor* que la figura original.
- Cuando el valor absoluto de la razón de homotecia está entre 0 y 1, la figura resultante es *menor* que la figura original.



Ficha 40.

- **Desarrollo:** Muestre a sus estudiantes los procedimientos para construir figuras homotéticas utilizando los ejemplos desarrollados en la doble página. Haga que realicen la actividad propuesta en el apartado *Inteligencia colaborativa*, en la que aplicarán un producto de homotecia, es decir, aplicarán una homotecia en una anterior.
- **Cierre:** Motive a sus estudiantes a realizar los ejercicios propuestos en el apartado *Actividades*. En la actividad 16, copiarán el triángulo **MNP** de la derecha de la página sobre una hoja de papel cuadriculado y, luego, realizarán sobre el mismo cada una de las homotecias especificadas. Acompáñeles en la realización de estas actividades.

Aprender a aprender

Pregunte al grupo: *¿Tuvieron alguna dificultad en los procedimientos para aplicar homotecias? ¿En qué consistió el problema?*

Competencias

- Comunicativa.
- Usa algoritmos.
- Resolución de problemas.

Indicadores de logro

- **Identifica** los conceptos de *línea poligonal* y *polígono*. **Identifica** y **clasifica** polígonos diversos. **Traza** las diagonales de un polígono y **calcula** su número. **Identifica** y **calcula** las medidas de los ángulos interiores y exteriores de un polígono. **Calcula** perímetros y áreas de polígonos simples diversos. **Construye** polígonos cuyos lados tienen una longitud dada. **Reconoce** y **realiza** traslaciones y rotaciones de figuras planas.
- **Efectúa** reflexiones diversas de puntos, líneas y polígonos. **Reconoce** distintas homotecias y **las aplica** sobre figuras dadas. **Resuelve** problemas del contexto que involucran polígonos y sus propiedades.

Competencias específicas

Competencia comunicativa

Es necesario que los estudiantes adquieran las habilidades para identificar y clasificar los polígonos y sus propiedades y, además, reconocer los procedimientos para realizar construcciones y transformaciones geométricas usando la regla, el transportador y el compás, y al mismo tiempo puedan desarrollar las competencias comunicativas que les permitan expresar estos conocimientos.

Usa algoritmos

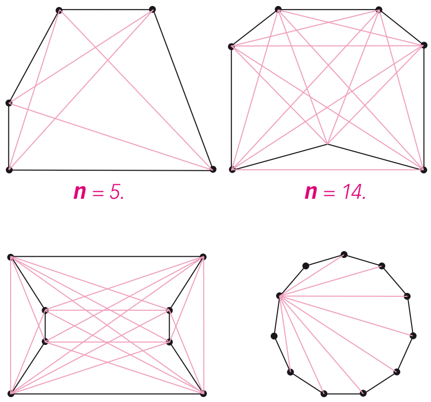
Las reglas y procedimientos en la resolución de operaciones aritméticas son vitales para la persecución de resultados correctos. Por ejemplo, en las operaciones que involucran los pasos para determinar razones de semejanza en figuras homotéticas.

ACTIVIDADES

17 Escribe V o F delante de cada afirmación.

- F *Dos lados consecutivos de un polígono pueden ser colineales.*
- F *Todo polígono equilátero es un polígono regular.*
- V *Al menos una diagonal de un polígono cóncavo no está en su interior.*
- V *La suma de las medidas de los ángulos de cualquier polígono de **n** lados es 180°(**n** – 2).*
- V *Si **T**(4, – 2) transforma **P** en **P'**, la traslación **T**(– 4, 2) transforma **P'** en **P**.*

18 Determina el número de diagonales de cada uno de los polígonos siguientes.



n = 5. *n = 14.* *n = 20.* *n = 44.*

- Copia las figuras y, después, traza todas sus diagonales.

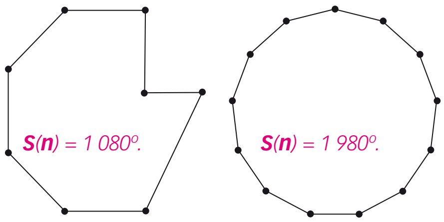
19 Obtén el número de lados del polígono cuyo número total de diagonales se da.

- **N** = 9 diagonales. *n = 6 lados.*
- **N** = 27 diagonales. *n = 9 lados.*
- **N** = 77 diagonales. *n = 14 lados.*
- **N** = 152 diagonales. *n = 19 lados.*

20 Calcula el número de puntos en que se cortan las diagonales de cada uno de los polígonos especificados.

- Un eneágono. ***N(c)** = 126 puntos.*
- Un pentadecágono. ***N(c)** = 1 365 puntos.*

21 Obtén la suma de los ángulos internos de los siguientes polígonos.



***S(n)** = 1 080°.* ***S(n)** = 1 980°.*

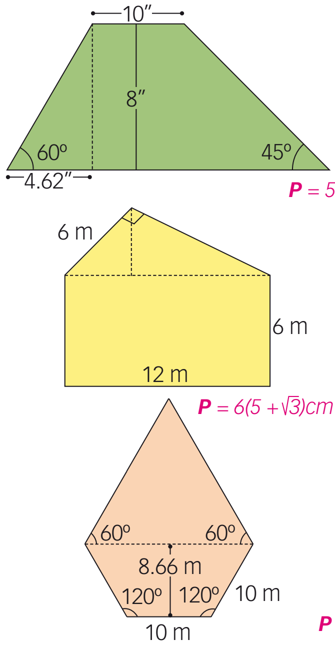
22 Determina cuál es el polígono cuya suma de sus ángulos internos es 2 700°.
El polígono es el heptadecágono.

- Describe qué procedimiento seguiste para determinarlo.

23 Obtén las medidas de los ángulos internos y externos de los polígonos regulares de número **n** de lados indicado.

- **n** = 10 *α = 144°. β = 36°.*
- **n** = 17 *α = 158.82°. β = 21.18°.*
- **n** = 20 *α = 162°. β = 18°.*
- **n** = 32 *α = 168.75°. β = 11.25°.*

24 Calcula el perímetro de los polígonos.

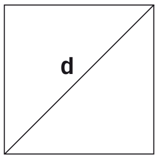


***P** = 53.17".*
***P** = 6(5 + √3)cm ≈ 40.39 cm.*
***P** = 70 m.*

Sugerencias didácticas

- Las actividades propuestas en esta página están estrechamente vinculadas a los conceptos y procedimientos desarrollados a lo largo de la unidad. Haga que lean cuidadosamente las instrucciones y, después, verifique los resultados obtenidos.
- Es importante observar de cerca que los estudiantes utilizan correctamente la regla, el compás y el transportador al realizar las construcciones y transformaciones geométricas estudiadas en esta unidad.

25 Si se conoce la diagonal de un cuadrado, demuestra que su perímetro y su área se obtienen con las expresiones del recuadro.



- ¿Cuáles son el perímetro y el área de un cuadrado cuya diagonal mide 12 cm?

  P *= 33.94 cm;* ***A*** *= 72 cm²*.

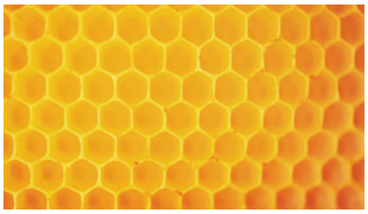
26 Resuelve el problema.

- Las diagonales del motivo en forma de rombo de una baldosa antigua miden 20 cm y 32 cm. ¿Cuánto miden el perímetro y el área del motivo romboidal de la baldosa?

  P *= 75.47 cm;* ***A*** *= 320 cm²*.
- Describe el procedimiento que usaste para obtener la solución del problema.

27 Obtén el perímetro de un hexágono regular cuya área es de 250 cm². ***P*** *=58.86 cm.*

28 Resuelve el problema.



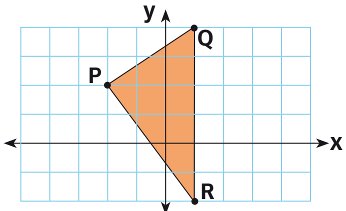
- Un panal de abejas cubre una superficie formada por 2 500 celdillas de 18 mm de perímetro. ¿Qué área, expresada en cm², cubre esa cantidad de celdillas del panal?

  A *= 584.57 cm²*.

29 Lee y, luego, haz lo que se te pide.

Un arquitecto diseña un área social de contorno pentagonal regular para una casa en la montaña. Construye sobre una hoja de papel el contorno del área social a la escala que se muestra abajo. Escala: 1 cm = 4 m.

30 Efectúa las traslaciones indicadas sobre la figura siguiente. Escribe las nuevas coordenadas de los vértices luego de cada uno de los movimientos.



P'*(– 4, 3);* ***Q'****(– 1, 5);* ***R'****(– 1, – 1).*

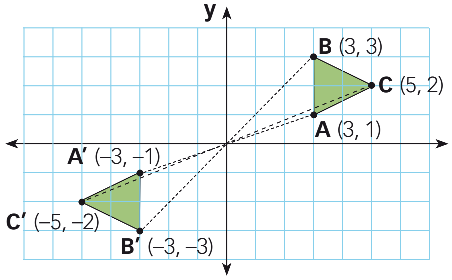
- **T**(4, 0) — ***P'****(2, 2);* ***Q'****(5, 4);* ***R'****(5, – 2).*
- **T**(– 2, 1)
- **T**(2, – 3) — ***P'****(0, – 1);* ***Q'****(3, 1);* ***R'****(3, – 5).*

31 Construye sobre una cuadrícula, previa elección de un origen de coordenadas, el cuadrado de vértices **A**(2, 2), **B**(2, 4), **C**(4, 4) y **D**(4, 2) y, auxiliándote con un compás y un transportador, efectúa sobre él una rotación de 90º.

- ¿Cuáles son las nuevas coordenadas de cada uno de los vértices del cuadrado después de la rotación?

  A'*(– 2, 2);* ***B'****(– 4, 2);* ***C'****(– 4, 4);* ***S'****(– 2, 4).*

32 Copia la figura sobre la cuadrícula y, luego, haz lo que se te pide.



- Aplica **H**(**O**, – 1) a la figura original y verifica que: **H**(**O**, – 1) = **S**(**O**).

Competencias fundamentales

Pensamiento lógico, creativo y crítico

Los conocimientos adquiridos por por los estudiantes son necesarios para identificar las alternativas más convenientes en la persecución de la solución de problemas que forman parte de su diario vivir. En este aspecto radica la importancia de que los estudiantes adquieran las destrezas necesarias para resolver problemas que involucren las construcciones y transformaciones geométricas desarrolladas en esta unidad.

Criterios de evaluación

Competencia comunicativa:

- Adaptación de las representaciones gráficas, simbólicas y numéricas a la situación de comunicación.

Competencia algoritmo:

- Seguimiento de las reglas, instrucciones y procedimientos.

Competencia pensamento lógico, creativo y crítico

- Interpreta situaciones desde diferentes perspectivas.

Sugerencias didácticas

Resolución de problemas

- Proponga a sus estudiantes que lean detenidamente las instrucciones de los problemas planteados en las actividades 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31 y 32. Estos problemas son aplicaciones cotidianas de los polígonos y sus propiedades y de las construcciones y transformaciones geométricas estudiadas en la unidad. Acompáñeles en la realización de estas actividades y ofrézcales las orientaciones necesarias.

Aprender a aprender

Motive a sus estudiantes para que inventen ejemplos de las aplicaciones cotidianas de los conceptos desarrollados en la unidad. Por ejemplo, pregunte al grupo: *¿Qué conocimientos deben tener para determinar el perímetro y el espacio que ocupan diversas piezas metálicas de formas poligonales?* Discuta las diversas respuestas con el grupo.

Indicadores de logro de la evaluación

- **Identifica** los conceptos de *línea poligonal* y *polígono*. **Identifica** y **clasifica** polígonos diversos. **Traza** las diagonales de un polígono y **calcula** su número. **Identifica** y **calcula** las medidas de los ángulos interiores y exteriores de un polígono. **Calcula** perímetros y áreas de polígonos simples diversos. **Construye** polígonos cuyos lados tienen una longitud dada. **Reconoce** y **realiza** traslaciones y rotaciones de figuras planas.
- **Efectúa** reflexiones diversas de puntos, líneas y polígonos. **Reconoce** distintas homotecias y **las aplica** sobre figuras dadas. **Resuelve** problemas del contexto que involucran polígonos y sus propiedades. **Utiliza** diferentes recursos virtuales y electrónicos: computadora, softwares educativos, juegos interactivos y otros, en la búsqueda de información.

Competencias específicas

- Comunica.
- Razona y argumenta.
- Modela y representa.
- Usa algoritmos.
- Conecta.
- Resuelve problemas.

Aprender a aprender

Plantee al grupo: *¿Qué característica tiene el hexágono que facilita cubrir superficies planas? ¿Qué se dice de la forma hexagonal de la construcción de los panales de las abejas?*

EVALUACIÓN

Comunica

33 Enuncia lo que se te indica.

- La expresión que proporciona el número total de diagonales de un polígono.
- La regla para obtener la reflexión de un punto tomando como espejo la recta **y** = **x**.

Razona y argumenta

34 Responde empleando argumentos.

- ¿Por qué la congruencia de los lados de un polígono es una condición necesaria, pero no suficiente, para que dicho polígono sea regular?
- ¿Por qué un cuadrilátero cóncavo no puede tener más de un ángulo mayor que uno llano?

Modela y representa

35 Construye en una hoja suelta de papel.

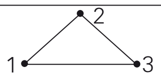
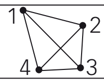
- Un hexágono de 7 cm de lado.
- U heptágono de 4.5 cm de lado.

Usa algoritmos

36 Identifica el polígono de cuyos vértices salen:.

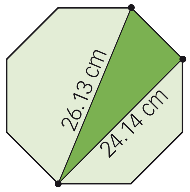
- 15 diagonales. *Octadecágono.*
- 21 diagonales. *Un polígono de 24 lados.*

37 Infiere a partir de los siguientes conjuntos de puntos, una expresión para el número total de segmentos que los conectan.

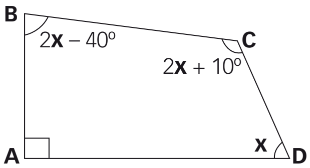
Número de puntos	Número de segmentos
1 •	0
1 • • 2	1
	3
	6

N *= ½ n(**n** + 1).*

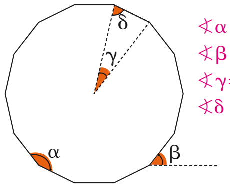
38 Calcula el perímetro y el área del octágono regular siguiente. ***P*** *= 80 cm;* ***A*** *= 482.8 cm²*.



39 Determina las medidas desconocidas de los ángulos del siguiente cuadrilátero.
*∢**B** = 80º; ∢**C** = 130º; ∢**D** = 60º.*



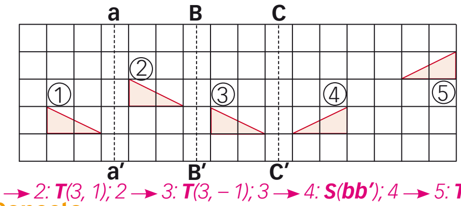
40 Observa el polígono regular y determina la medida de los ángulos coloreados.



∢α = 154º 17′ 8.6″;
∢β = 25º 42′ 51.4″;
∢γ = 25º 42′ 51.4″;
∢δ = 77º 8′ 34.3″.

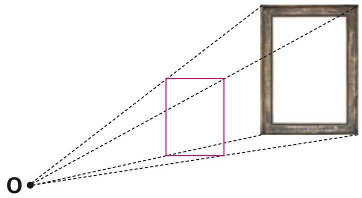
Conecta

41 Identifica las transformaciones de la figura.



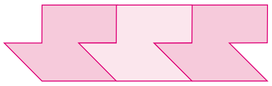
*1 → 2: **T**(3, 1); 2 → 3: **T**(3, – 1); 3 → 4: **S**(**bb′**); 4 → 5: **T**(4, 3).*

42 Se quiere una reproducción dos veces más pequeña del marco. ¿Cómo la harías?



Sugerencias didácticas para la evaluación

- Es importante verificar, antes de dar inicio a las actividades de evaluación, que sus estudiantes identifican y clasifican los polígonos y que conocen sus propiedades. Observe que utilizan correctamente los instrumentos que les permiten realizar transformaciones y construcciones geométricas.

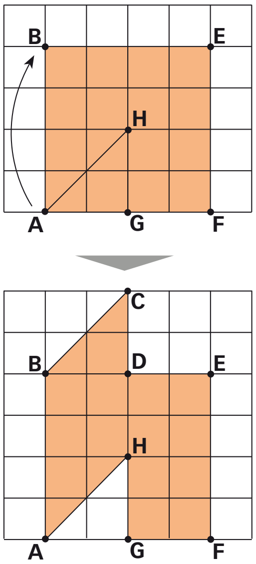


SABER HACER

43 **Juego**. Lean el texto y, luego, hagan lo que se les pide.

En la decoración de monumentos y templos de la Antigüedad, en la alfarería, las técnicas de bordado y el diseño de mosaicos, las transformaciones geométricas han sido empleadas por siglos sin que se conocieran sus fundamentos matemáticos.

- Tomen un cuadrado, **ABEF**, de dimensiones 4 x 4, sobre una cuadrícula como punto de partida. Marquen sobre **ABEF** un triángulo **AHG**, recórtenlo y colóquenlo, como **BCD**, cuatro unidades más arriba sobre el lado **AF**. Se forma así el octágono cóncavo **ABCDEFGH**, que es una figura que llenará, como el cuadrado inicial, todo el plano.
- Reproduzcan sobre la cuadrícula este octágono cóncavo como se muestra en la ilustración y, luego, coloréenlo como gusten alternando los colores. Han obtenido una teselación empleando la traslación de la figura básica construida.
- Diseñen otras teselaciones construyendo otras figuras básicas.



44 Responde las preguntas.

- ¿Por qué se afirma que la vida en nuestro planeta tiene todas las características de un sistema complejo de interrelaciones?
- ¿Por qué debemos velar por la sostenibilidad de la diversidad biológica en la Tierra? ¿Cómo expresas tú este cuidado?

APRENDIZAJE AUTÓNOMO

45 Marca según tus logros.

	Iniciado	En proceso	Logrado
• Identifica y clasifico polígonos diversos.	▢	▢	▢
• Trazo las diagonales de un polígono y calculo su número.	▢	▢	▢
• Calculo las medidas de los ángulos de un polígono.	▢	▢	▢
• Calculo perímetros y áreas de polígonos diversos.	▢	▢	▢
• Construyo polígonos y realizo transformaciones geométricas.	▢	▢	▢

46 Reflexiona sobre tu aprendizaje.

- ¿Cuáles contenidos te parecieron más interesantes? ¿Por qué?
- ¿En qué situaciones de la vida diaria emplearías lo aprendido en la unidad?

Saber hacer

En la actividad 43, *Saber hacer*, se aplica la estrategia de evaluación *Casos para resolver*. Formados en grupos, observarán la ilustración, luego, leerán el texto y, después, seguirán las instrucciones al pie de la letra. En este caso, tomarán el cuadrado **ABEF**, de dimensiones 4 x 4, sobre una cuadrícula y aplicarán las transformaciones que se les indican. Al final, habrán obtenido una teselación empleando la traslación de la figura básica construida. Diseñarán otras teselaciones construyendo otras figuras básicas.

Actitudes y valores

Medio ambiente

En la sección destinada a *Actitudes y valores*, actividad 44, responderán por qué se afirma que la vida en nuestro planeta tiene todas las características de un sistema complejo de interrelaciones. Expresarán por qué debemos velar por la sostenibilidad de la diversidad biológica en la Tierra. Dirán cómo expresan este cuidado.

Aprendizaje autónomo

En el apartado *Aprendizaje autónomo*, actividad 45, evaluarán por ellos mismos si los conceptos y procedimientos que trabajaron en la unidad se encuentran en estado de iniciación, en proceso o logrado. En la actividad 46, reflexionarán sobre su proceso de aprendizaje.

Aprender a aprender

Haga que sus estudiantes apliquen los conceptos aprendidos en la unidad en situaciones de la cotidianidad, por ejemplo, pregunte: *¿Qué debemos conocer si queremos construir figuras semejantes a otras?*

Sugerencias didácticas para la evaluación

- Pregunte a sus estudiantes:
  - — *¿Cómo se define un polígono?*
  - — *¿Cómo se clasifican los polígonos?*
  - — *¿Qué son las diagonales de un polígono?*
  - — *¿Cuánto suman las medidas de los ángulos internos de un triángulo? ¿Y de un cuadrado?*

8 Geometría del espacio

Propuesta de programación

COMPETENCIAS	CONTENIDOS
Específicas • **Razona y argumenta**: **Identifica** las posiciones relativas de dos planos y los tipos de ángulos en el espacio. **Identifica** y **clasifica** poliedros diversos. • **Comunica**: **Interpreta** y **explica** las posiciones relativas de dos planos y los tipos de ángulos en el espacio. • **Modela y representa**: **Realiza** proyecciones de figuras diversas sobre el plano. **Identifica** distintas simetrías presentes en cuerpos geométricos. **Representa** puntos en el espacio. • **Usa algoritmos**: **Sigue** las reglas que le permiten obtener un resultado al calcular distancias, perímetros y áreas. • **Conecta**: **Identifica** diferentes tipos de poliedros en los contextos donde se desenvuelve. • **Resuelve problemas**: **Resuelve** y **elabora** problemas de su entorno en los que aplica los conceptos relacionados con las posiciones relativas de dos planos y los tipos de ángulos en el espacio y el cálculo de distancias, perímetros y áreas. • **Utiliza herramientas tecnológicas**: **Utiliza** soportes tecnológicos como la Internet, la calculadora científica y otros dispositivos. **Fundamentales** **Resolución de problemas**: **Identifica** y **utiliza** estrategias, y **genera** alternativas de solución.	**Conceptos** • El espacio. • Ángulos en el espacio. • Cuerpos poliedros. • Proyecciones sobre el plano. • Simetrías en el espacio. • Distancia en el espacio. **Procedimientos** • Identificación de las posiciones relativas de dos planos en el espacio. • Identificación de distintos tipos de ángulos en el espacio. • Reconocimiento y clasificación de diversos poliedros. • Realización de proyecciones de figuras diversas sobre el plano. • Identificación de distintas simetrías presentes en cuerpos geométricos. • Representación de puntos en el espacio y cálculo de distancias, perímetros y áreas. **Actitudes y valores** • Valoración del saber científico. • Apreciación de la precisión y el esmero en el trabajo.

Tiempo estimado de trabajo: 2 semanas

INDICADORES DE LOGRO

- **Identifica** el concepto de *espacio* y sus postulados.
- **Identifica** las posiciones relativas de dos planos en el espacio.
- **Identifica** ángulos entre dos rectas en el espacio y entre una recta y un plano.
- **Identifica** ángulos entre dos planos.
- **Identifica** ángulos diedros y poliedros.
- **Identifica** el concepto de cuerpos *poliedros* y **los clasifica** en cóncavos y convexos.
- **Determina** la característica de Euler en poliedros regulares.
- **Realiza** proyecciones de un punto y de un segmento sobre un plano.
- **Realiza** proyecciones de un cuerpo sobre un plano.
- **Identifica** distintas simetrías presentes en cuerpos geométricos.
- **Representa** puntos en el espacio y **calcula** distancias, perímetros y áreas en el espacio.
- **Resuelve** problemas del contexto que involucran conceptos relacionados con la geometría del espacio.
- **Utiliza** recursos virtuales y electrónicos: computadora, softwares educativos, juegos interactivos y otros, en la búsqueda de información.

Valor transversal: Ciencia y tecnología

Recursos digitales

Plataforma digital

CD

BIBLIOTECA DEL DOCENTE

- DOCUMENTOS PARA LA PLANIFICACIÓN

CUADERNO DE ACTIVIDADES

UNIDAD 8	Geometría del espacio

RECURSOS DE REFUERZO Y AMPLIACIÓN

LibroMedia

ACTIVIDADES INTERACTIVAS

PÁGINA 143	Poliedros.
PÁGINA 148	Poliedros regulares. Clasificación.
PÁGINA 152	Ejes de simetría.

CD DE RECURSOS DIGITALES: PLAN REGULAR

Pleno — PRUEBA DE EVALUACIÓN FORMATIVA DE LA UNIDAD

Estrategias pedagógicas

- Recuperación de experiencias previas.
- Trabajo en equipo.
- Aprendizaje basado en problemas (ABP).

Unidad 8

- **Lee** y **comenta** las informaciones expuestas en el apartado *Punto de partida*.
- **Responde** preguntas relacionadas con las informaciones expuestas en el apartado *Punto de partida*.
- **Recupera** experiencias vividas mediante la observación de las imágenes de la ilustración.
- **Analiza** un problema de la vida cotidiana vinculado a los conceptos y procedimientos que desarrollarán en la unidad en el apartado *Analiza el problema*.
- **Plantea** soluciones al problema leído y analizado anteriormente, en el apartado *Plantea una solución*.

Apertura de la unidad

Dentro de los objetivos principales de la apertura de esta unidad se encuentran el plantear una situación de aprendizaje, una problemática o un texto que sirve para contextualizar el tema de la unidad. Todo esto con la finalidad de motivar y despertar la curiosidad de los estudiantes.

A partir de la situación o texto planteado, el problema a analizar y las imágenes de la ilustración se conecta al estudiante con el tema a tratar, a la vez que vincula con la realidad o cotidianidad los temas que se van a desarrollar.

Todos los elementos que conforman la portada promueven la recuperación de experiencias o conocimientos previos y la motivación o el interés por los conocimientos que adquirirán en la unidad.

8 Geometría del espacio

Conceptos

- El espacio.
- Ángulos en el espacio.
- Cuerpos poliedros.
- Proyecciones sobre el plano.
- Simetrías en el espacio.
- Distancia en el espacio.

Procedimientos

- Construcciones.
- Resolución de problemas.

Actitudes y valores

- Valoración del saber científico.
- Precisión y esmero en el trabajo con figuras y cuerpos.

Origami. Las dimensiones ocultas del espacio podrían estar compactadas como aquí.

Punto de partida

El concepto de espacio ha experimentado cambios con el paso del tiempo. En la antigüedad el espacio se asociaba al lugar o "hueco" vacío que ocupan los objetos. El espacio se consideraba anterior al cuerpo que lo llena, aunque se consideraba en referencia a ese cuerpo. El filósofo griego Aristóteles privilegió esa interpretación.

Con el desarrollo de la Geometría, el concepto de espacio se hizo más abstracto y se liberó de los cuerpos particulares que lo llenaban. El espacio pasó a ser un conjunto infinito de puntos donde podían ser ubicados los objetos físicos y al cual llegó a atribuirse tres dimensiones. La introducción de esas dimensiones permite afirmar que la posición de un objeto en el espacio podía conocerse recurriendo a tres y solo tres números.

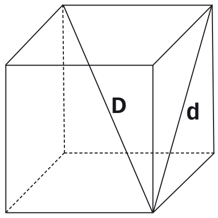
En la actualidad, algunas teorías de la Física han ampliado el número de dimensiones a cuatro, cinco, diez y más. Estas nuevas dimensiones se creen compactadas en ovillos tan pequeños que, hasta ahora, ha resultado imposible detectarlas.

- ¿Qué significado atribuyes a la expresión: imagen 3**D**?

ANALIZA EL PROBLEMA

Un especialista en cristalografía ha logrado observar un cristal de forma cúbica y medir la longitud, **d**, de la diagonal de una de sus caras.
La diagonal midió 2.5 μm.

El especialista desea determinar, sin romper el cristal, la longitud, **D**, de cualquiera de sus diagonales. ¿Cómo lo harías si te hallaras frente al problema del cristalógrafo?

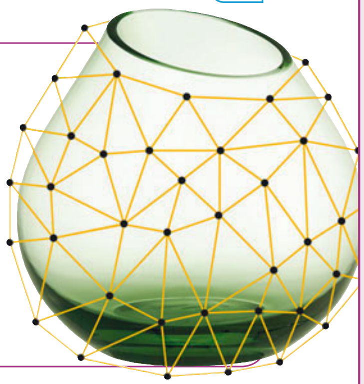


Trabajo colectivo de apertura

- **Punto de partida:** Guíe a sus estudiantes a leer y comentar en el grupo las informaciones expuestas en el apartado *Punto de partida*, que refiere los cambios experimentados por el concepto de *espacio* con el paso del tiempo y el desarrollo de la Geometría.
- **Analiza el problema:** En este apartado se plantea que un especialista en cristalografía desea determinar la longitud de la diagonal de cualquiera de las caras de un cristal con forma cúbica.
- **Plantea una solución:** En este apartado analizarán el problema planteado en la sección anterior y, luego, describirán cómo harían para determinar la longitud de cualquiera de las diagonales del cristal.

Detalle de una superficie. La estructura poliédrica muestra profundidad en la imagen.

PLANTEA UNA SOLUCIÓN



- Analiza el problema del cristalógrafo.
  - ¿Cómo son las aristas de un cristal cúbico? *Iguales.*
  - ¿Cuánto miden los ángulos entre dos aristas que comparten un vértice común? *Miden 90º.*
  - ¿Te ayudaría a resolver el problema expresar cada una de las diagonales, **d** y ***D***, en términos de la arista de éste cuerpo? Justifica tu respuesta.
- A partir de tus respuestas, idea una estrategia que conduzca a una solución del problema. Expón y argumenta tu solución en el aula.

Como, $\mathbf{d} = \mathbf{a}\sqrt{2}$; $\mathbf{D} = \mathbf{a}\sqrt{3}$, *entonces:* $\mathbf{D} = \frac{1}{2}\,\mathbf{d}\sqrt{3}$.

Esquema conceptual de la unidad

Geometría del espacio

Se ocupa del

Concepto de espacio — *en donde se calcula una* — Distancia

en el que se definen

Ángulos diedros y triedros → Cuerpos poliedros

Cuerpos poliedros → Simetrías; Proyecciones

Actividad de motivación

Pida a sus estudiantes que lean en la sección: *Conceptos y procedimientos*, los temas que trabajarán en la unidad y las actitudes y valores que estarán presentes en el desarrollo de la misma. Luego, para que interioricen la importancia de conocer los conceptos relacionados con la Geometría del espacio, formúleles preguntas como las siguientes: *¿Cómo se determina el espacio que ocupa un objeto? ¿Cuáles son las dimensiones de un cuerpo geométrico? ¿Qué dimensiones intervienen para determinar el área de un cuerpo? ¿Qué dimensiones intervienen para determinar el volumen de un cuerpo?*

Actividad interactiva

Poliedros

Actividad interactiva de recuperación de experiencias, en la que clasificarán los cuerpos representados, en poliedros o en no poliedros, seleccionando, en cada caso, la opción correcta.

Actitudes y valores

Ciencia y tecnología

Aproveche la situación planteada en el apartado *Punto de partida* y en las imágenes de la ilustración para conversar con sus estudiantes acerca de los recursos tecnológicos y la eficiencia en el trabajo. Pregunte al grupo: *¿Creen que los avances tecnológicos han hecho más fácil el trabajo del hombre? ¿Cuál es la importancia del uso de maquinarias en la producción agrícola? ¿Qué papel juegan las computadoras en las operaciones financieras?*

Indicadores de logro

- **Identifica** el concepto de *espacio* y sus postulados.
- **Identifica** las posiciones relativas de dos planos en el espacio.

Más información

Rectas perpendiculares

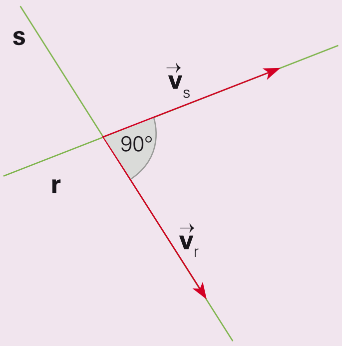
- Dos rectas son perpendiculares si tienen sus pendientes inversas y, por lo tanto, signo negativo.

$$m_s = -\frac{1}{m_r}$$

- Dos rectas son perpendiculares si sus vectores directores son perpendiculares.

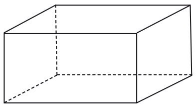
$$\vec{v}_r - \vec{v}_s = 0$$

- Las rectas perpendiculares forman ángulos rectos congruentes al cruzarse.



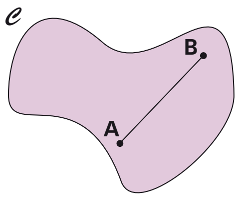
RECUPERACIÓN

Copia la figura y, luego, haz lo que se pide.



- Identifica y, luego, colorea tres planos.
- Traza tres rectas que pasen por tres aristas con un vértice común.

Conjunto convexo



$\mathcal{C}$ es convexo si para dos puntos cualesquiera **A**, **B** $\in \mathcal{C}$ se cumple $\overline{AB} \in \mathcal{C}$:

$$\forall\, A, B \in \mathcal{C}: \overline{AB} \subset \mathcal{C}$$

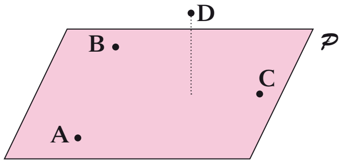
1 El espacio. Postulados

El espacio, $\mathcal{E}$, es el conjunto de totalidad de los puntos.

El postulado del espacio muestra que: *El espacio contiene al menos cuatro puntos no pertenecientes a un mismo plano.*

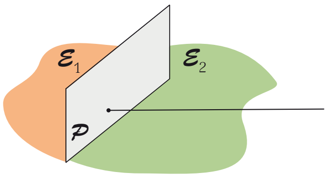
$A, B, C \in \mathcal{P}$; $D \notin \mathcal{P}$

$A, B, C, D \in \mathcal{E}$



Así como una recta corta al plano en dos semiplanos, un plano divide al espacio en dos conjuntos de puntos, $\mathcal{E}_1$ y $\mathcal{E}_2$, llamados semiespacios.

$\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2$

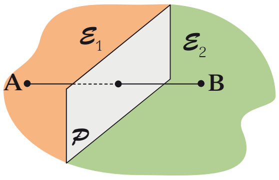


Los semiespacios $\mathcal{E}_1$ y $\mathcal{E}_2$ son conjuntos convexos de puntos.

El postulado de la separación del espacio indica que:

Los puntos que pertenecen a semiespacios distintos se conectan con un segmento que corta al plano frontera.

$A \in \mathcal{E}_1$; $B \in \mathcal{E}_2$; $\overline{AB} \cap \mathcal{P} = \{P\}$

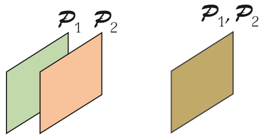


2 Posiciones relativas de dos planos en el espacio

Dos planos del espacio pueden ser:

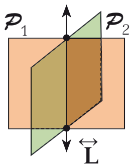
- Paralelos: si no tienen puntos comunes o todos sus puntos son comunes.

  $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 = \varnothing \vee \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 = \mathcal{P}_1$



- Secantes: si tienen una recta en común.

  $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 = \overleftrightarrow{L}$

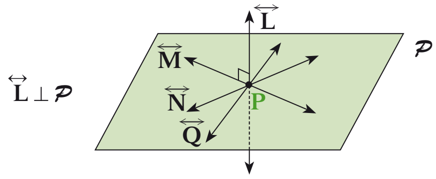


Sugerencias didácticas

- **Inicio:** Oriente a sus estudiantes para que lean y respondan la actividad vinculada a la recuperación de experiencias previas propuesta en el apartado *Recuperación*, en la que copiarán la figura representada y, luego, identificarán los planos y trazarán las rectas que se les indican.
- **Desarrollo:** Pida a sus estudiantes que lean cuidadosamente el contenido de la doble página, que observen las representaciones gráficas y el desarrollo de los conceptos. Haga que reproduzcan los planos y las rectas en sus cuadernos. Haga que observen la representación del conjunto convexo en el margen izquierdo de la página.

3 Recta perpendicular a un plano

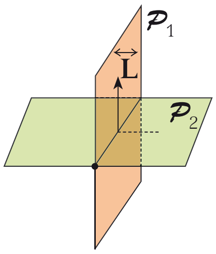
Una recta $\overleftrightarrow{L}$ es perpendicular a un plano $\mathcal{P}$, si es perpendicular a las rectas que pasan por el punto **P**, que es la intersección de $\overleftrightarrow{L}$ y $\mathcal{P}$.



La recta $\overleftrightarrow{L}$ es perpendicular a toda recta del plano que pase por el punto **P** del mismo. En la figura se muestran tres de esas rectas $\overleftrightarrow{M}$, $\overleftrightarrow{N}$ y $\overleftrightarrow{Q}$.

Dos planos, $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$ son perpendiculares si en uno de ellos existe una recta que sea perpendicular al otro.

Si la recta $\overleftrightarrow{L}$, contenida en el plano $\mathcal{P}_1$, es perpendicular al plano $\mathcal{P}_2$, entonces: $\mathcal{P}_1 \perp \mathcal{P}_2$.

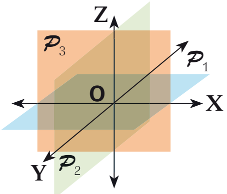


Tres planos perpendiculares determinan tres ejes coordenados **X**, **Y**, **Z**, que representan al espacio.

La posición de cualquier punto **P** en el espacio queda determinada mediante una terna de valores, (**x**, **y**, **z**), que generaliza a la posición de un punto en el plano.

Un punto sobre el plano **XY** está dado por las coordenadas (**x**, **y**, 0), porque su tercera coordenada es nula, **z** = 0.

Tres planos perpendiculares



$\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_3 = \mathbf{X}$

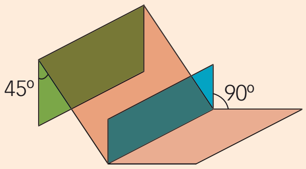
$\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 = \mathbf{Y}$

$\mathcal{P}_2 \cap \mathcal{P}_3 = \mathbf{Z}$

$\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \cap \mathcal{P}_3 = \mathbf{O}$

ACTIVIDADES

1. Identifica, en la figura de la derecha, dos planos …
   - paparalelos.
   - secantes.
   - perpendiculares.



2. Responde la pregunta justificando tu respuesta con un ejemplo.
   - ¿Dos rectas en el espacio pueden, sin ser paralelas, no cortarse?
     Sí.
3. Investiga qué son rectas alabeadas o cruzadas.

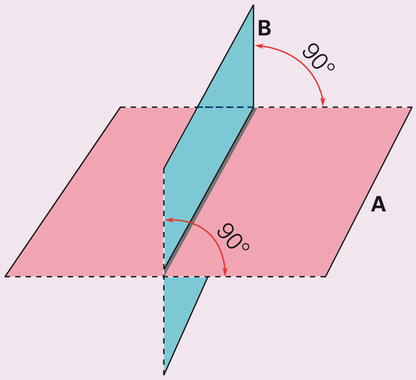
Competencia comunicativa

Planos perpendiculares

Dos planos son perpendiculares si una recta contenida en uno de ellos es perpendicular a otra recta contenida en el otro.

Las semirrectas que forman los bordes de los dos planos **A** y **B** en la figura representada, son perpendiculares, entonces, los planos que contienen a dichas semirrectas también son perpendiculares.

Al intersectarse dos planos forman una recta:



Ficha 41.

- **Desarrollo:** Muéstreles los conceptos desarrollados en la doble página con sus representaciones gráficas correspondientes. Pídales que desarrollen los gráficos en sus cuadernos. Haga que establezcan las diferencias entre rectas y planos perpendiculares. Pídales que lean y reproduzcan en sus cuadernos el contenido del apartado titulado *Tres planos perpendiculares*.
- **Cierre:** Motive a sus estudiantes a realizar los ejercicios del apartado *Actividades*. En la actividad 1, identificarán en la figura de la derecha dos planos paralelos, dos secantes y dos perpendiculares. En la actividad 2, responderán, justificando sus respuestas, si dos rectas en el espacio pueden, sin ser paralelas, no cortarse. En la actividad 3, investigarán qué son rectas alabeadas o cortadas.

Aprender a aprender

Pregunte a sus estudiantes: *¿Qué conocimientos previos sobre rectas y planos perpendiculares recuerdan? ¿Creen que esos conocimientos facilitaron el trabajo? ¿Por qué?*

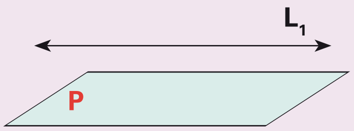
Indicadores de logro

- **Identifica** ángulos entre dos rectas en el espacio y entre una recta y un plano.
- **Identifica** ángulos entre dos planos.
- **Identifica** ángulos diedros y poliedros.

Más información

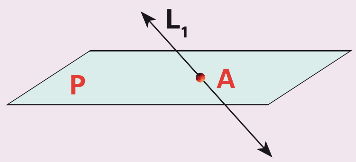
Recta y plano paralelos

- No tienen ningún punto en común.



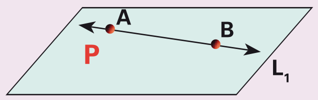
Recta y plano secante

- Tienen un punto en común.



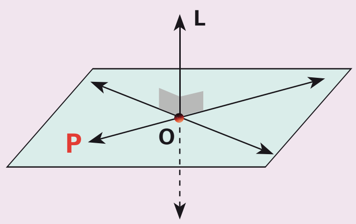
Rectas contenidas en el plano

- La recta que pasa por dos puntos del plano.



Recta secante al plano P

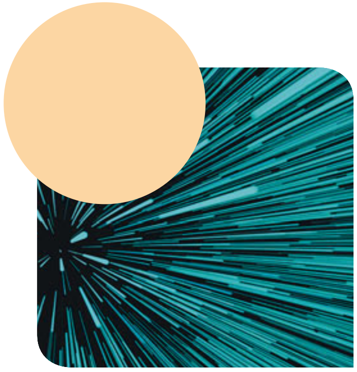
- Perpendicular a dos rectas contenidas en el plano.



RECUPERACIÓN

Responde.

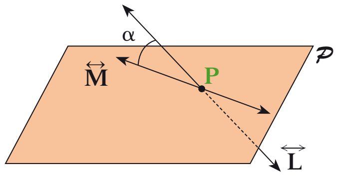
- ¿Cuántos ángulos se forman cuando se cortan dos rectas de un mismo plano?
- ¿Cómo son esos ángulos?



Desintegración. En Física de Altas Energías se observan trayectorias que son rectas concurrentes en el espacio.

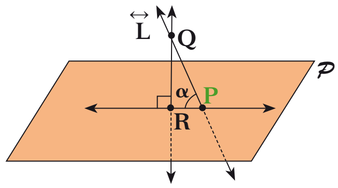
1 Ángulos entre dos rectas en el espacio y entre una recta y un plano

Observa la figura siguiente. La recta $\overleftrightarrow{M}$ pertenece al plano $\mathcal{P}$. La recta $\overleftrightarrow{L}$, contenida en otro plano, corta al plano $\mathcal{P}$ en un punto **P**:



El ángulo α entre las rectas del espacio $\overleftrightarrow{L}$ y $\overleftrightarrow{M}$ es el menor de los ángulos formado por la intersección de dichas rectas.

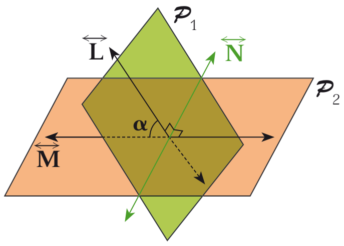
En la figura siguiente, la recta $\overleftrightarrow{L}$ corta al plano $\mathcal{P}$ en **P**. Sea **Q** un punto de $\overleftrightarrow{L}$ distinto de **P** y $\overleftrightarrow{QR}$ la recta perpendicular a $\mathcal{P}$ y que corta a ese plano en **R**.



El ángulo α entre la recta del espacio $\overleftrightarrow{L}$ y el plano $\mathcal{P}$ es el menor de los ángulos formado por la interseción de $\overleftrightarrow{L}$ y la recta, $\overleftrightarrow{PR}$, perteneciente a $\mathcal{P}$.

2 Ángulo entre dos planos

En la figura siguiente, los planos secantes $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$ tienen en común la recta $\overleftrightarrow{N}$ y las rectas $\overleftrightarrow{L} \in \mathcal{P}_1$ y $\overleftrightarrow{M} \in \mathcal{P}_2$ son, ambas, perpendiculares a la recta $\overleftrightarrow{N}$.



El ángulo α entre los planos $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$ es el menor de los ángulos entre dos rectas, $\overleftrightarrow{L}$ y $\overleftrightarrow{M}$, pertenecientes a uno y otro plano.

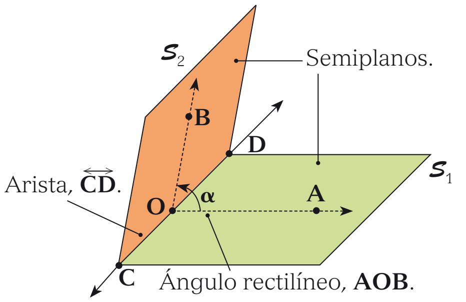
Sugerencias didácticas

- **Inicio:** Oriente a sus estudiantes para que lean y respondan en el aula las preguntas vinculadas a la recuperación de experiencias previas propuestas en el apartado *Recuperación*, las cuales están relacionadas con ángulos formados por rectas de un mismo plano.
- **Desarrollo:** Pida a sus estudiantes que lean cuidadosamente el contenido de la doble página, que observen las representaciones gráficas y el desarrollo de los conceptos. Pídales que observen la imagen de la desintegración de energías ubicada en el margen izquierdo y que lean y comenten la información al pie de la misma.

3 Ángulos diedro y poliedro

Un ángulo diedro es la unión de dos semiplanos, S_1 y S_2, con una recta en común, $\overleftrightarrow{CD}$.

En la figura se muestra un ángulo diedro y sus elementos.



El diedro de la figura anterior se designa **A – CD – B**.

Los semiplanos S_1 y S_2 son las caras del diedro.

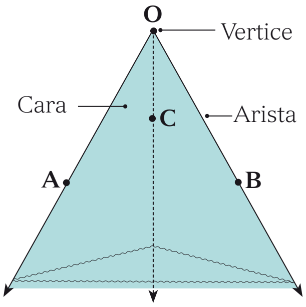
El ángulo **AOB**, formado por las semirrectas $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$ situadas en cada semiplano y perpendiculares a la recta $\overleftrightarrow{CD}$ en **O**, es el ángulo rectilíneo del diedro.

Un ángulo poliedro es la unión de tres o más semiplanos que tienen un punto en común.

Un ángulo poliedro como el de la figura de la derecha es un triedro, formado por tres diedros. El punto **O** de este ángulo poliedro es su vértice.

Los ángulos **AOB**, **BOC** y **AOC** se llaman ángulos planos del triedro y la suma de sus medidas es menor que 360º:

$$m \sphericalangle AOB + m \sphericalangle BOC + m \sphericalangle AOC < 360^\circ.$$



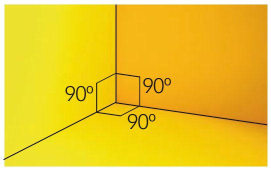
SABER MÁS

Triedro trirrectángulo

El ángulo triedro formado por tres ángulos planos rectos es trirrectángulo.

Es la unión de tres diedros de medida 90º cada uno.

Observa abajo un triedro trirrectángulo.

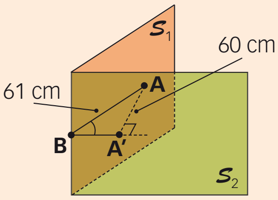


ACTIVIDADES

4 Fíjate en la figura de la derecha. El segmento **AA'** es perpendicular al semiplano S_2.

- ¿A qué distancia se encuentra el punto **A'** de la arista del diedro? *A 11 cm de la arista.*

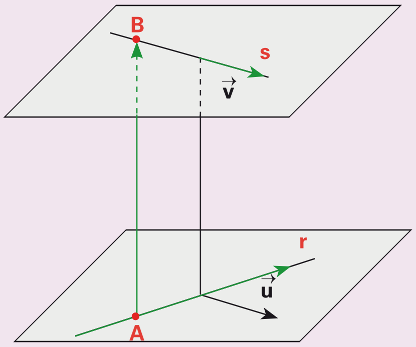
5 Explica. ¿Por qué la suma de los ángulos planos de un triedro no llega a 360º? *Porque dichos ángulos llegarían a estar en un mismo plano.*

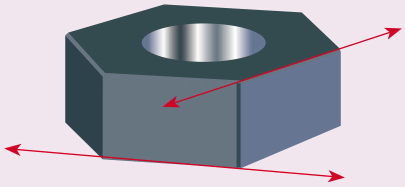


Competencia comunicativa

Rectas cruzadas o alabeadas

- Dos rectas alabeadas no se interceptan, no son paralelas y no existe un plano que las contenga.
- Se encuentran en planos paralelos, pero las rectas no son paralelas.
- Las rectas alabeadas no se cortan, ni están en el mismo plano.
- La distancia mínima entre dos rectas alabeadas es la longitud del segmento perpendicular que las separa.





Ficha 42.

- **Desarrollo:** Muestre a sus estudiantes los conceptos desarrollados en esta doble página. Pídales que reproduzcan las diversas posiciones formadas por ángulos, rectas y planos en sus cuadernos. Motíveles para que lean y reproduzcan en sus cuadernos el contenido del apartado *Saber más*, que muestra el ángulo triedro trirrectángulo formado por tres ángulos rectos.
- **Cierre:** Motive a sus estudiantes a realizar los ejercicios del apartado *Actividades*. En la actividad 4, se fijarán en la figura de la derecha, que el segmento **AA**' es perpendicular al segmento $\mathbf{S}_2$, después, responderán la pregunta. En la actividad 5, explicarán por qué la suma de los ángulos planos de un triedro no llega a 360°.

Aprender a aprender

Pregunte a sus estudiantes: *¿Qué aplicaciones en la solución de problemas cotidianos podrían tener los conceptos desarrollados en esta doble página?*

Indicadores de logro

- **Identifica** el concepto de *cuerpos poliedros* y **los clasifica** en cóncavos y convexos.
- **Determina** la característica de Euler en poliedros regulares.

Actividad interactiva

Poliedros regulares. Clasificación

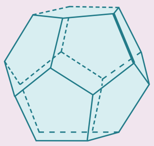
Actividad interactiva de aplicación al concepto de poliedro y sus propiedades, en la que completarán una tabla con el nombre del poliedro, número de caras y los polígonos que las forman.

Más información

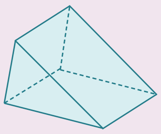
Tipos de poliedros

Los poliedros se clasifican en:

- *Regulares*: Sus caras son poliedros regulares y son todas iguales. Todos sus ángulos poliedros también son iguales.
- *Irregulares*: Sus caras son polígonos y no todas son iguales.

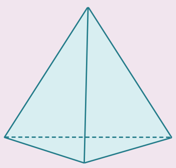


Poliedro regular

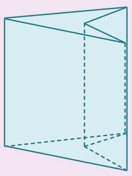


Poliedro irregular

- *Convexo*: Toda pareja de puntos de la superficie puede ser unida por una línea recta que no sale, de ninguna manera, del interior del poliedro.
- *Cóncavo*: Cuando existe, al menos, un par de puntos de su superficie que, para unirlos mediante una línea recta, necesariamente esta tiene que salir del interior del poliedro.



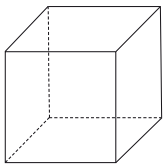
Poliedro convexo



Poliedro cóncavo

RECUPERACIÓN

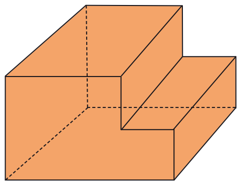
Responde.



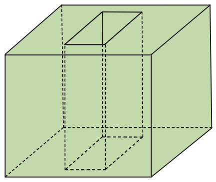
- ¿Cuántos ángulos diedros identificas en el sólido geométrico? *12.*
- ¿Y ángulos triedros? *8.*

Poliedros cóncavos

Con un entrante:

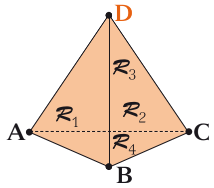


Con un agujero:



1 Concepto de poliedro. Clasificación

Un poliedro es una región finita del espacio, constituida por un número $\mathbf{N} \geq 4$, pero finito, de planos y tales que, una cualquiera de sus aristas es común a dos y solo dos de dichos planos.



Las caras (**C**) de un poliedro son regiones poligonales, $\mathcal{R}_n$, limitadas por sus lados, que son las aristas (**A**) del poliedro. Las intersecciones de tres o más aristas son los vértices (**V**) del poliedro.

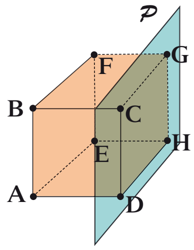
Si vemos al poliedro **ABCD** de frente, $\mathcal{R}_1$ es la región poligonal que está delante y a la izquierda y $\mathcal{R}_2$, la región poligonal que está delante y a la derecha. Su intersección, $\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2$, es la arista **BD**.

La intersección de las aristas **AD**, **BD** y **CD** es el vértice **D**.

El poliedro **ABCD** es el mínimo construible: no existe un poliedro con menos de 4 caras y menos de 3 aristas concurrentes en un vértice.

Un poliedro convexo está contenido en el semiespacio generado por el plano que contiene a una cualquiera de sus caras.

Cara **CDHG** $\subset \mathcal{P}$



El poliedro **ABCDEFGH** es convexo: está contenido en el semiespacio de la izquierda del plano $\mathcal{P}$, al que pertenece su cara **CDHG**.

Un poliedro que no sea convexo, es cóncavo.

Los poliedros cóncavos se distinguen de los convexos por tener entrantes, salientes o agujeros.

Sugerencias didácticas

- **Inicio:** Oriente a sus estudiantes para que respondan en el aula las preguntas de recuperación de experiencias previas formuladas en el apartado *Recuperación*, en la que expresarán cuántos ángulos diedros y triedros identifican en el sólido geométrico representado.
- **Desarrollo:** Haga que lean cuidadosamente el contenido de la doble página, que observen las representaciones gráficas y los procedimientos para determinar la característica de Euler de un poliedro. Motíveles para que reproduzcan el ejemplo resuelto en sus cuadernos. Pídales que observen ejemplos de poliedros cóncavos ubicados en el margen izquierdo de la página.

2 Característica de Euler. Poliedros regulares

La característica de Euler, χ, de un poliedro es el número que resulta de restar el número de aristas, **A**, de la suma de su número de caras, **C,** y de vértices, **V**: $\chi = \mathbf{C} + \mathbf{V} - \mathbf{A}$.

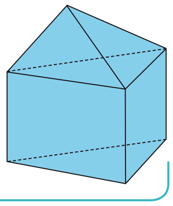
Todo poliedro convexo tiene una característica de Euler igual a 2. Esta es una propiedad distintiva de esa clase de poliedro. La característica de un poliedro cóncavo es distinta de 2.

EJEMPLO RESUELTO:

- Comprobar que la característica de Euler del poliedro de la derecha es 2.

  De la figura se ve que: **C** = 7; **V** = 7; **A** = 12.

  Entonces : $\chi = 7 + 7 - 12 = 2$.



Un poliedro regular tiene caras que son polígonos regulares y en cuyos vértices concurre el mismo número de aristas.

Solo existen cinco poliedros regulares convexos, los llamados sólidos platónicos,que son:

	Caras	Vértices	Aristas
Tetraedro	4	4	6
Hexaedro	6	8	12
Octaedro	8	6	12
Dodecaedro	12	20	30
Icosaedro	20	12	30

SABER MÁS

Fórmulas útiles relativas a sólidos platónicos

Si **A**, **C** y **V** es el número de aristas, caras y vértices, respectivamente, de un sólido platónico:

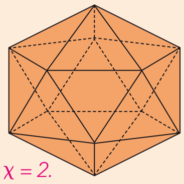
$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}\,\mathbf{n_l}\,\mathbf{C}$$

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}\,\mathbf{n_a}\,\mathbf{V}$$

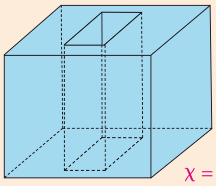
Donde $\mathbf{n_l}$ es el número de lados del polígono de las caras y $\mathbf{n_a}$, el número de aristas que concurren en un vértice.

ACTIVIDADES

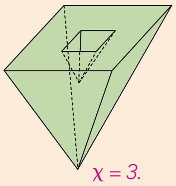
6 Determina la característica de Euler de cada poliedro.



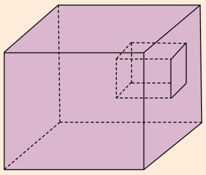
$\chi = 2$.



$\chi = 2$.



$\chi = 3$.



$\chi = 3$.

7 Haz lo que se te pide en cada caso.

- Identifica polígono de las caras de un octaedro regular.

  Triángulos.

- Obtén el número de las aristas que concurren en cualquier vértice de un dodecaedro.

  Concurren tres aristas.

- **Desarrollo:** Muestre a sus estudiantes los ejemplos y sus procedimientos desarrollados en la doble página relacionados con los poliedros y su clasificación. Diseñe ejemplos adicionales. Pídales que lean y reproduzcan el contenido del apartado *Saber más*, que trata sobre las fórmulas útiles relativas a sólidos platónicos o poliedros regulares convexos.
- **Cierre:** Motive a sus estudiantes a realizar los ejercicios del apartado *Actividades*. En la actividad 6, determinarán la característica de Euler de cada poliedro representado. En la actividad 7, identificarán el polígono de las caras de un octaedro regular y obtendrán el número de las aristas que concurren en cualquier vértice de un dodecaedro.

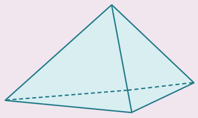
Más informacíón

Tipos de poliedros regulares

Un poliedro regular es aquel cuyas caras y aristas son todas iguales.

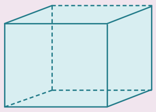
Son cinco los poliedros regulares:

- *Tetraedro*: Poliedro cuya superficie está formada por cuatro triángulos equiláteros iguales.



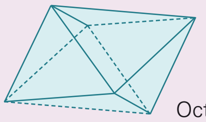
Tetraedro

- *Hexaedro* o *cubo*: Poliedro compuesto por seis cuadrados iguales.



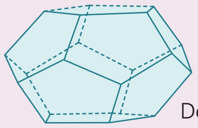
Cubo

- *Octaedro regular*. Poliedro cuya superficie está constituida por ocho triángulos equiláteros iguales.



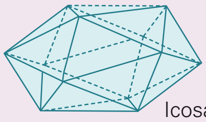
Octaedro

- *Dodecaedro*: Poliedro formado por doce pentágonos regulares iguales.



Dodecaedro

- *Icosaedro*: Poliedro cuyas caras son veinte triángulos equiláteros iguales.



Icosaedro

Ficha 43.

Aprender a aprender

Pregunte al grupo: *¿Les parecieron importantes los conceptos estudiados en esta oportunidad? ¿Podrían dar ejemplos de las aplicaciones cotidianas de estos conceptos?*

Indicadores de logro

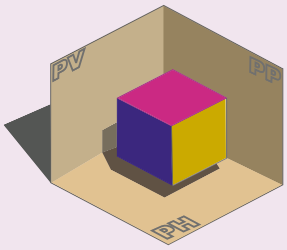
- **Realiza** proyecciones de un punto y de un segmento sobre un plano.
- **Realiza** proyecciones de un cuerpo sobre un plano.

Competencias fundamentales

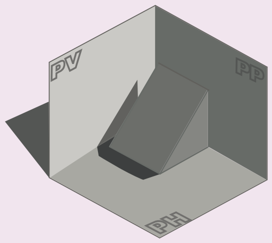
Competencia comunicativa

Las siguientes figuras representan los distintos tipos de planos.

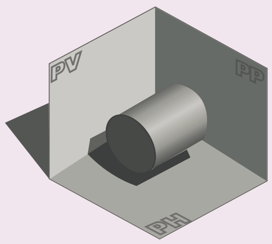
Plano paralelo



Plano oblicuo



Plano curvo

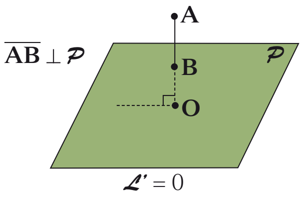


RECUPERACIÓN

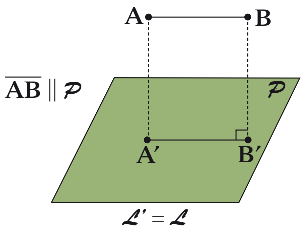
Responde.

- ¿Cómo cambia el largo de la sombra de un palo plantado verticalmente en el suelo, conforme avanza el día?

Se va acortando, alcanza un mínimo y, luego, se alarga.



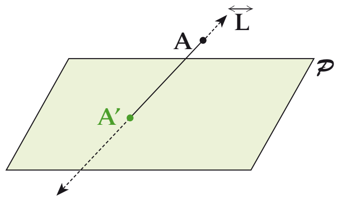
$\overline{AB} \perp \mathcal{P}$, $\ell' = 0$



$\overline{AB} \parallel \mathcal{P}$, $\ell' = \ell$.

1 Proyecciones de un punto y de un segmento sobre un plano

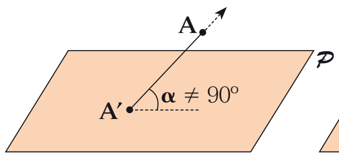
La proyección de un punto **A** sobre un plano, $\mathcal{P}$, es el punto **A′** del plano que es extremo del un segmento $\mathbf{\overline{AA'}}$.



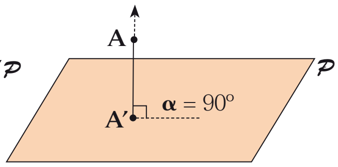
La recta $\overleftrightarrow{L} \supset \overline{AA'}$ es la recta proyectante y el plano $\mathcal{P}$, es el plano de proyección del punto **A**.

La proyección del punto **A** sobre $\mathcal{P}$ es única, **A′**: $P_{\mathcal{P}}(A) = A'$.

La proyección de un punto sobre un plano puede ser oblicua, si la recta proyectante forma con el plano de proyección un ángulo distinto a uno recto; u ortogonal, si la recta proyectante forma con el plano de proyección un ángulo recto.



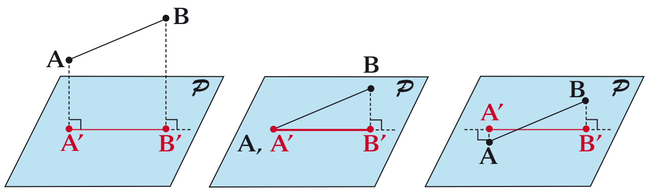
Proyección oblicua



Proyección ortogonal

La proyección de un segmento sobre un plano es el resultado de proyectar todos sus puntos sobre el plano. Las rectas proyectantes de cada punto son paralelas.

Observa tres proyecciones ortogonales de **AB** sobre $\mathcal{P}$.



$P_{\mathcal{P}}(\overline{AB}) = \overline{A'B'}$ $\quad P_{\mathcal{P}}(\overline{AB}) = \overline{AB'}$ $\quad P_{\mathcal{P}}(\overline{AB}) = \overline{A'B'}$

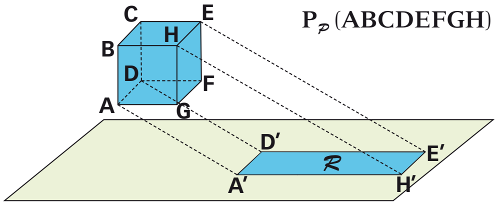
Si ℓ es la longitud del segmento original, **AB**, y ℓ' la de su proyección ortogonal, **A′B′**, entonces: $0 \leqslant \ell' \leqslant \ell$.

Sugerencias didácticas

- **Inicio:** Oriente a sus estudiantes para que lean y respondan en el aula la pregunta vinculada a la recuperación de experiencias previas planteada en el apartado *Recuperación*, en la que expresarán cómo cambia el largo de la sombra de un palo plantado verticalmente en el suelo, conforme avanza el día.
- **Desarrollo:** Pídales que lean el contenido de la doble página, que observen las representaciones gráficas y los procedimientos aplicados en el desarrollo de las proyecciones de los diversos cuerpos sobre el plano. Pídales que observen las imágenes de las proyecciones ortogonales ubicadas en el margen izquierdo de la página.

2 Proyecciones de un cuerpo sobre un plano

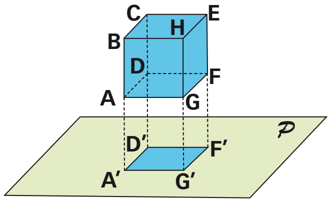
La proyección de un cuerpo, $\mathcal{C}$, sobre un plano es el resultado de proyectar todos los puntos de dicho cuerpo sobre dicho plano.



$P_{\mathcal{P}}(ABCDEFGH) = \mathcal{R}$.

La proyección del cubo **ABCDEFGH** es una región poligonal, $\mathcal{R}$.

La proyección ortogonal del **ABCDEFGH** sobre el plano $\mathcal{P}$ es el cuadrado, **A'D'F'G'**.

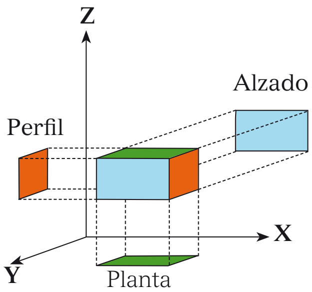


Las proyecciones ortogonales de un cuerpo en los tres planos del triedro trirrectángulo que representa el espacio forman las vistas ortogonales de dicho cuerpo.

Las vistas son la planta, que es la proyección ortogonal sobre el plano **XY**; el perfil, que es la proyección ortogonal sobre el plano **YZ** y el alzado, que es la proyección ortogonal sobre el plano **XZ**.

Cualquier cuerpo $\mathcal{C}$ se reconstruye a partir de sus vistas ortogonales, que son figuras planas.

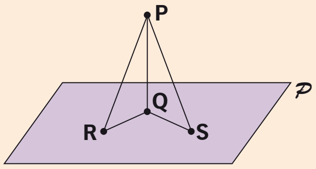
Las tres vistas de un cuerpo



ACTIVIDADES

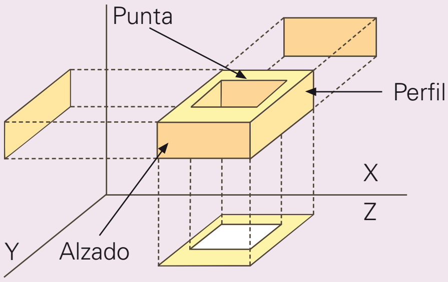
8 Observa la figura, lee y, luego, responde.

- El punto **Q** es una proyección ortogonal del punto **P**. Si $\overline{PQ} = 2$ dm, $\overline{PR} = \overline{PS} = \sqrt{5}$ dm y $\overline{QR} \perp \overline{QS}$, ¿cuál es la distancia entre los puntos **R** y **S**?
  ***d*(R, S) = $\sqrt{2}$ dm.**

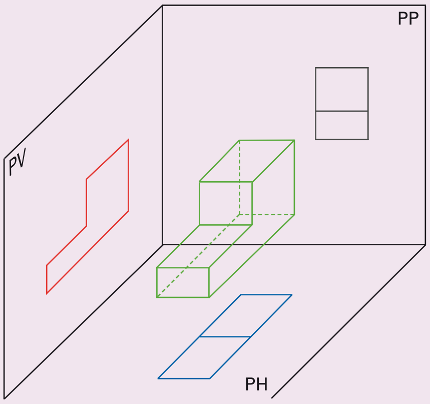


Más información

Proyecciones sobre el plano



Proyecciones sobre el plano



Ficha 44.

- **Desarrollo:** Muestre a sus estudiantes las diversas proyecciones de un punto, un segmento y de un cuerpo desarrolladas en esta doble página. Haga que reproduzcan estas proyecciones en sus cuadernos utilizando la instrumentación correspondiente. Propóngales que observen y analicen en el grupo las tres vistas de un cuerpo en el margen derecho de esta página.
- **Cierre:** Motive a sus estudiantes a realizar los ejercicios propuestos en el apartado *Actividades*. En la actividad 8, observarán la proyección ortogonal del punto **P** de la figura representada y, luego, determinarán cuál es la distancia entre los puntos **Q** y **S**. Ofrézcales las orientaciones necesarias.

Aprender a aprender

Pregunte al grupo: *¿Creen que los conocimientos previos hicieron más fácil el trabajo en esta oportunidad? ¿Por qué?*

Indicadores de logro

- **Identifica** simetrías presentes en cuerpos geométricos.

Actividad interactiva

Ejes de simetría

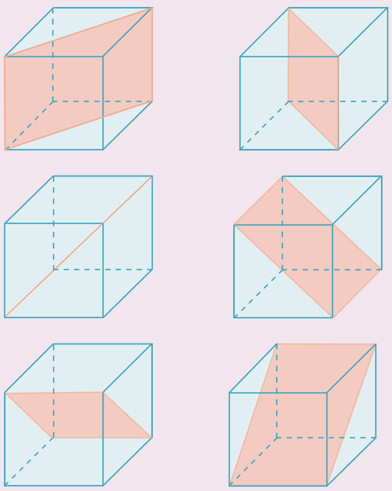
Actividad interactiva de recuperación de experiencias, en la que identificarán los ejes de simetría en diversas figuras geométricas, seleccionando, en cada figura, el o los ejes correctos.

Competencias fundamentales

Competencia comunicativa

Un hexaedro o cubo regular tiene:

- Un centro de simetría.
- Tres ejes de simetría de orden cuatro, que pasan por los centros de caras opuestas.
- Cuatro ejes de simetría de orden tres, que pasan por vértices opuestos.
- Seis ejes de simetría de orden dos, que pasan por los puntos medios de aristas opuestas.
- Seis planos de simetría, que pasan por aristas opuestas.
- Tres planos de simetría, que pasan por el punto medio de aristas opuestas.



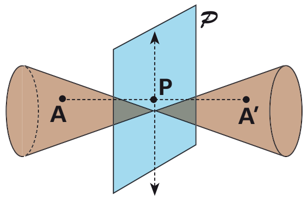
RECUPERACIÓN

Responde.

- ¿Qué ángulos debe girar un triángulo equilátero para colocarse en una posición indistinguible de la original?
  120º, 240º y 360º.

1 Simetría de un cuerpo

El siguiente es un cuerpo simétrico: a un punto cualquiera **A** de la parte del cuerpo que está a la derecha del plano $\mathcal{P}$, le corresponde un punto **A′** de la parte de la izquierda, tal que **A** y **A′** se encuentran a igual distancia del plano $\mathcal{P}$ esto es, dichos puntos cumplen con: $\overline{\mathbf{AP}} = \overline{\mathbf{A'P}}$.



Un cuerpo puede presentar tres tipos de simetría: respecto a un plano, una recta o un punto.

2 Simetría respecto a un plano

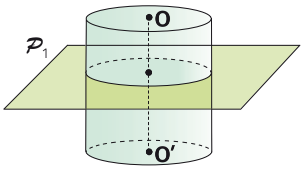
Si un plano, $\mathcal{P}$, corta a un cuerpo en dos partes y se cumple que, por cada punto **A** de una de las partes existe un punto **A′** de la otra parte y **d**(**A**, $\mathcal{P}$) = **d**(**A′**, $\mathcal{P}$), el cuerpo es simétrico con respecto a un plano.

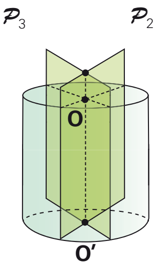
El cuerpo de la figura que se muestra arriba es simétrico con respecto al plano $\mathcal{P}$.

La transformación geométrica asociada a una simetría respecto a un plano es una reflexión cuyo espejo es dicho plano.

El plano de simetría $\mathcal{P}_1$ divide al cilindro siguiente en dos partes simétricas, las dispuestas por encima y por debajo de dicho plano.

El cilindro tiene, además, infinitos planos de simetría cuya intersección es el segmento que une los centros, **O** y **O′**, de sus bases circulares.

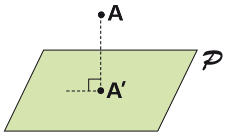




SABER MÁS

Distancia de un punto a un plano

Si **A** es un punto y **A′** su proyección ortogonal sobre un plano $\mathcal{P}$, la distancia de **A** a $\mathcal{P}$ es la longitud del segmento perpendicular $\overline{\mathbf{AA'}}$.



d(**A**, $\mathcal{P}$) = $\mathcal{L}$ (**AA′**)

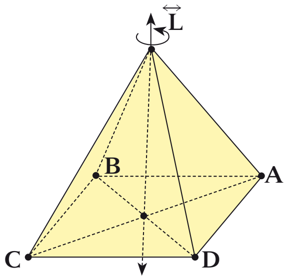
Sugerencias didácticas

- **Inicio:** Oriente a sus estudiantes para que lean y respondan en el aula la pregunta vinculada a la recuperación de experiencias previas planteada en el apartado *Recuperación*, en la que expresarán qué ángulos debe girar un triángulo equilátero para colocarse en una posición indistinguible de la original.
- **Desarrollo:** Pídales que lean el contenido de la doble página, que observen las representaciones gráficas y el desarrollo de los conceptos relacionados con simetría del espacio. Haga que lean y comenten el contenido del apartado *Saber más*, que trata sobre la distancia de un punto a un plano.

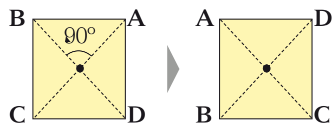
3 Simetría con respecto a una recta

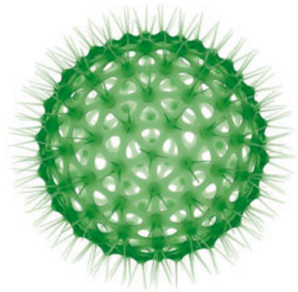
El cuerpo que al experimentar un giro alrededor de una recta $\overleftrightarrow{L}$ que lo atraviesa adopta su orientación original, presenta una simetría con respecto a la recta $\overleftrightarrow{L}$, llamada eje de simetría.

El tetraedro regular siguiente es simétrico con respecto a la recta que pasa por el centro de una de sus caras y el vértice opuesto a la misma. No se altera por rotaciones de ángulos que sean múltiplos de 90º.



Rotación de 90º alrededor de $\overleftrightarrow{L}$





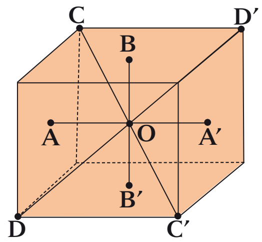
Volvox. Colonia de algas microscópicas con simetría central.

4 Simetría con respecto a un punto

Un cuerpo geométrico presenta simetría con respecto a un punto, **O**, cuando para cualquier punto, **A**, del cuerpo existe otro punto **A'** del mismo tal que $\measuredangle(\mathbf{AO}) = \measuredangle(\mathbf{A'O})$.

El cubo es simétrico con respecto a un punto **O** situado en su centro: A cualquier punto **A** del cubo le corresponde un punto **A'**, tal que **A** y **A'** equidistan del centro. Otros pares de puntos que equidistan del centro del cubo son **B** y **B'**; **C** y **C'** y **D** y **D'**.

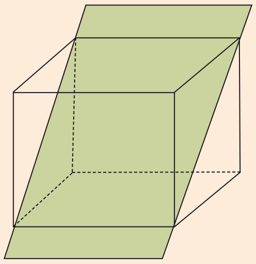
A la simetría de un cuerpo con respecto a un punto del espacio se le llama también simetría central.



ACTIVIDADES

9 Observa en el cubo de la derecha uno de sus planos de simetría y, luego, dibuja todos los demás planos.

- Responde. ¿Cuántos planos de simetría tiene el cubo?
  9 planos.



10 Responde las preguntas, argumentando tus respuestas.

- ¿Cuántos ejes de simetría tiene un prisma de base pentagonal regular?
  6 ejes de simetría.
- ¿Cuántos ejes de simetría tiene una esfera?
  Infinitos ejes de simetría.

- **Desarrollo:** Muestre a sus estudiantes las diversas simetrías de un cuerpo, respecto a un plano y a una recta desarrolladas en esta doble página. Haga que reproduzcan las representaciones gráficas en sus cuadernos. Propóngales que observen y comenten la información al pie de la imagen del volvox (Colonia de algas microscópicas).
- **Cierre:** Motive a sus estudiantes a realizar los ejercicios propuestos en el apartado *Actividades*. En la actividad 9, observarán en el cubo de la derecha uno de sus planos de simetría y, luego, dibujarán todos los demás planos. En la actividad 10, responderán cuántos ejes de simetría tiene un prisma de base pentagonal y cuántos ejes de simetría tiene una esfera.

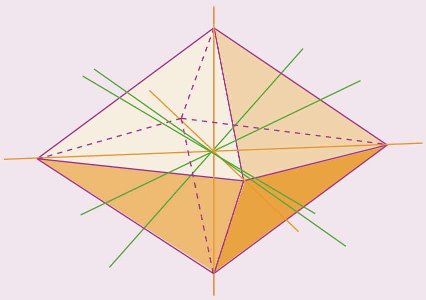
Otras actividades

Simetría de octaedro

Un octaedro regular consta de:

- Tres ejes de simetría de orden cuatro, las líneas que unen vértices opuestos.
- Seis ejes de simetría de orden dos, las líneas que unen los centros de aristas opuestas.
- Cuatro ejes de simetría de orden tres, las líneas que unen los baricentros de las caras opuestas.
- Nueve planos de simetría, tres que contienen cada grupo de aristas coplanares, y seis perpendiculares a cada par de aristas paralelas.
- Un centro de simetría.
- El orden de simetría total del octaedro es de:

  2x (3 x 4 + 6 x 2 + 4 x 3) = 72



Ficha 45.

Aprender a aprender

Pregunte al grupo: *¿Qué similitud tienen los conceptos desarrollados en esta doble página con temas que trabajaron en grados anteriores? ¿Creen que esta similitud hizo más fácil el aprendizaje?*

Indicadores de logro

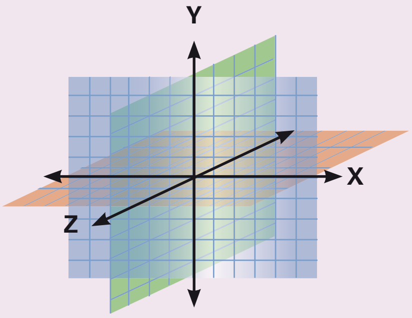
- **Representa** puntos en el espacio y **calcula** distancias, perímetros y áreas en el espacio.

Más información

Sistema de coordenadas en el espacio

El *sistema de coordenadas en el espacio* está formado por tres planos perpendiculares denominados planos coordenados.

- El *origen o punto 0*, es aquel punto en el cual se cortan los planos coordenados.
- Los *ejes coordenados* son las rectas o líneas de intersección de los planos coordenados. Son los ejes **x**, **y**, **z**. El sentido positivo o negativo de cada eje se indica con una flecha.
- Los tres planos coordenados dividen el espacio en ocho regiones llamadas *octantes*.
- El *primer octante* es la parte positiva de los ejes coordenados.



RECUPERACIÓN

Responde.

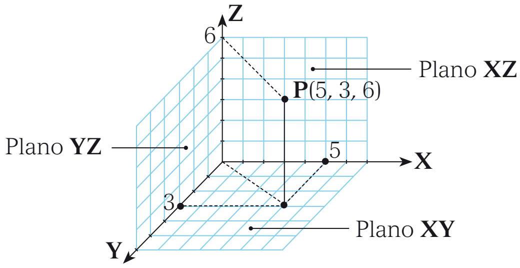
- ¿Cómo calculas la distancia entre los puntos **A**(2, 3) y **B**(4, 1) del plano? ¿Cuál es? $2\sqrt{2}$.

1 Coordenadas de un punto en el espacio

Un punto **P** en el espacio se localiza utilizando tres coordenadas en vez de dos: la abscisa, **x**; la ordenada, **y** y la cota, **z**.

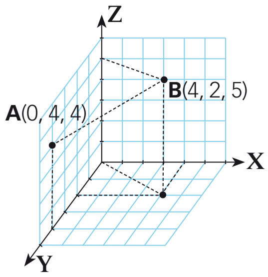
La abscisa es la distancia del punto al plano **YZ**; la ordenada, su distancia al plano **XZ** y la cota, su distancia al plano **XY**.

Fíjate dónde se ubica en el espacio el punto **A**(5, 3, 6).



EJEMPLO RESUELTO:

- Obtener la distancia que separa los puntos **A** y **B**.



Aquí:

$x_1 = 0$; $y_1 = 4$; $z_1 = 4$

$x_2 = 4$; $y_2 = 2$; $z_2 = 5$.

$x_2 - x_1 = 4 - 0 = 4$;

$y_2 - y_1 = 2 - 4 = -2$;

$z_2 - z_1 = 5 - 4 = 1$.

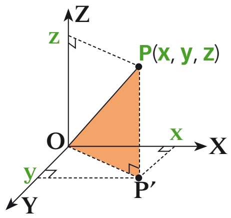
Luego:

$\mathbf{d} = \sqrt{4^2 + (-2)^2 + 1^2}$

$\mathbf{d} = \sqrt{21} \approx 4.58$ unidades.

2 Distancia en el espacio

Observa la figura siguiente.



El punto **P**(**x**, **y**, **z**) se encuentra a una distancia **d**(**O**, **P**) del origen **O** del sistema de coordenadas. El punto **P'**(**x**, **y**, 0) es la proyección ortogonal de **P**(**x**, **y**, **z**) sobre el plano **XY**.

La distanciadel origen **O** al punto **P**, **d**(**O**, **P**) es la hipotenusa del triángulo rectángulo **P'OP**:

$$\mathbf{d}(\mathbf{O}, \mathbf{P}) = \sqrt{(\mathbf{OP'})^2 + (\mathbf{PP'})^2}$$

Como $\mathbf{OP'} = \sqrt{\mathbf{x}^2 + \mathbf{y}^2}$ es la hipotenusa del triángulo rectángulo **OP'x**, contenido en el plano **XY** y **PP'** = **z**:

$$\mathbf{d}(\mathbf{O}, \mathbf{P}) = \sqrt{\mathbf{x}^2 + \mathbf{y}^2 + \mathbf{z}^2}$$

La distancia entre dos puntos, $\mathbf{P}(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1, \mathbf{z}_1)$ y $\mathbf{Q}(\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2, \mathbf{z}_2)$, se consigue generalizando la expresión anterior:

$$\mathbf{d}(\mathbf{O}, \mathbf{P}) = \sqrt{(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)^2 + (\mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_1)^2 + (\mathbf{z}_2 - \mathbf{z}_1)^2}$$

En el cálculo de la distancia entre dos puntos no importa cuál de los puntos tomamos en primer lugar, si **P** o **Q**.

Sugerencias didácticas

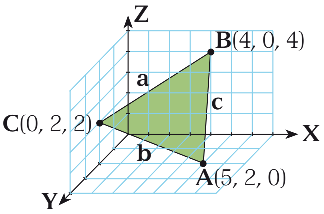
- **Inicio:** Oriente a sus estudiantes para que lean y respondan en el aula la pregunta vinculada a la recuperación de experiencias previas planteada en el apartado *Recuperación*, en la que expresarán cómo calculan la distancia entre los puntos dados del plano.
- **Desarrollo:** Pídales que lean el contenido de la doble página, que observen las representaciones gráficas y el desarrollo de los conceptos y los ejemplos resueltos. Haga que reproduzcan los ejemplos resueltos y los gráficos correspondientes en sus cuadernos.

3 Perímetro y área en el espacio

Conocido el modo de calcular la distancia entre dos puntos del espacio, el perímetro de un polígono es la suma de las distancias entre dos vértices consecutivos.

EJEMPLOS RESUELTOS:

- Obtener el perímetro del triángulo cuyos vértices son los puntos siguientes: **A**(5, 2, 0), **B**(4, 0, 4) y **C**(0, 2, 2).



Las longitudes de los lados del triángulo **ABC** son:

$\mathbf{a} = \mathbf{d}(\mathbf{B}, \mathbf{C}) = \sqrt{(0-4)^2 + (2-0)^2 + (2-4)^2} = \sqrt{24} \approx 4.90$

$\mathbf{b} = \mathbf{d}(\mathbf{A}, \mathbf{C}) = \sqrt{(5-0)^2 + (2-2)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{29} \approx 5.39$

$\mathbf{c} = \mathbf{d}(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \sqrt{(4-5)^2 + (0-2)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{21} \approx 4.58$

El perímetro del triángulo es: 14.87 unidades.

- Determinar el área, $\mathcal{A}$, del triángulo del ejemplo anterior.

El área del triángulo **ABC** se obtiene empleando la fórmula de Herón:

$$\mathcal{A} = \sqrt{\mathbf{s}(\mathbf{s}-\mathbf{a})(\mathbf{s}-\mathbf{b})(\mathbf{s}-\mathbf{c})}, \text{ con } \mathbf{s} = \frac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})$$

Como $\mathbf{s} = \frac{1}{2}(14.87) = 7.435$ unidades:

$\mathcal{A} = \sqrt{7.435\,(7.435-4.90)\,(7.435-5.39)\,(7.435-4.58)} = 10.49.$

El área del triángulo **ABC** es de 10.49 unidades^2.

INTELIGENCIA COLABORATIVA

Octantes

- Investiguen qué son los octantes y, luego, hagan lo que se les pide.
- Representen, sobre un pliego de cartulina, los siguientes puntos del espacio.

  P(2, 4, – 3)

  Q(– 4, 5, 6)

  P(3, – 4, – 5)

  Q(– 5, – 3, – 4)
- Socialicen en el aula los resultados obtenidos por el grupo.

ACTIVIDADES

11 Representa los puntos siguientes en el espacio.

- **A**(4, 3, 1) • **B**(1, 0, 4) • **C**(6, 5, 5) • **D**(6, 0, 0) • **E**(7, 3, 5) • **F**(6, 6, 0)

12 Con los puntos dados arriba, obtén las distancias d(A, B), d(C, D), d(D, E) y d(B, F).

$\mathbf{d}(A, B) = 3\sqrt{3}$; $\mathbf{d}(C, D) = 5\sqrt{2}$; $\mathbf{d}(D, E) = \sqrt{35}$; $\mathbf{d}(B, F) = \sqrt{77}$.

13 Estima el perímetro y el área de los triángulos especificados abajo.

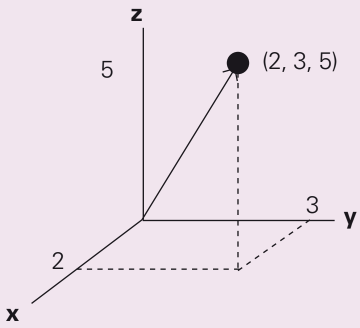
- **ABC** *P = 17.24; A = 12.74.*
- **ABD** *P = 15.34; A = 9.72.*
- **BCE** *P = 16.16; A = 7.58.*
- **DEF** *P = 17.8; A = 15.16.*
- **ACF** *P = 13.74; A = 8.66.*

Atención a la diversidad

Actividades de refuerzo: Motive al grupo para que, usando la regla y papel cuadriculado, representen o grafiquen los puntos indicados a continuación en el espacio.

- **A** (5, –3, 2).
- **B** (4, –2, 3).
- **C** (2, 0, 5).
- **D** (5, 4, 3).
- **E** (6, 5, 7).

Ejemplo:



Ficha 46.

- **Desarrollo:** Diseñe ejercicios similares a los propuestos en esta doble página en los que grafiquen puntos y calculen perímetros y áreas en el espacio. Haga que realicen los gráficos sobre papel cuadriculado. Motíveles para que realicen la actividad propuesta en el apartado *Inteligencia colaborativa*.
- **Cierre:** Motive a sus estudiantes a realizar los ejercicios propuestos en el apartado *Actividades*. En la actividad 11, representarán sobre papel cuadriculado los puntos especificados. En la actividad 12, con los puntos anteriores, obtendrán las distancias expresadas en cada caso. En la actividad 13, estimarán el perímetro y el área de los triángulos especificados. Acompáñeles en la realización de estas actividades.

Aprender a aprender

Pregunte al grupo: *¿Tuvieron alguna dificultad en el proceso de calcular perímetros y áreas en el espacio? ¿En qué consistió el problema?*

Competencias

- Comunicativa.
- Usa algoritmos.
- Resolución de problemas.

Indicadores de logro

- **Identifica** el concepto de *espacio* y sus postulados. **Identifica** las posiciones relativas de dos planos en el espacio. **Identifica** ángulos entre dos rectas en el espacio y entre una recta y un plano. **Identifica** ángulos entre dos planos. **Identifica** ángulos diedros y poliedros. **Identifica** el concepto de *cuerpos poliedros* y **los clasifica** en cóncavos y convexos. **Determina** la característica de Euler en poliedros regulares. **Realiza** proyecciones de un punto y de un segmento sobre un plano. **Realiza** proyecciones de un cuerpo sobre un plano. **Identifica** distintas simetrías presentes en cuerpos geométricos. **Representa** puntos en el espacio y **calcula** distancias, perímetros y áreas en el espacio. **Resuelve** problemas del contexto que involucran conceptos relacionados con la geometría del espacio.

Competencias específicas

Competencia comunicativa

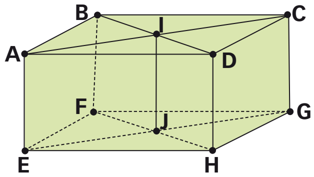
Es necesario que los estudiantes adquieran las habilidades para identificar distintos tipos de ángulos y posiciones relativas de planos en el espacio y, además, reconocer los procedimientos para realizar proyecciones sobre el plano y, al mismo tiempo, puedan desarrollar las competencias comunicativas que les permitan expresar estos conocimientos.

Usa algoritmos

Las reglas y procedimientos en la resolución de operaciones aritméticas son vitales para la persecución de resultados correctos. Por ejemplo, en las operaciones que involucran el cálculo de distancias en el espacio.

ACTIVIDADES

14 Observa el cuerpo geométrico y, luego, marca con √ las afirmaciones que son verdaderas.



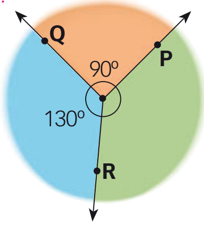
- ☑ *Las rectas que contienen a los lados **AB** y **BC** pertenecen a un mismo plano.*
- ☑ *Las rectas que contienen a los lados **AB** y **BC** concurren solo en el vértice **B**.*
- ☐ *Los planos a los que pertenecen las caras **ABEF** y **EFGH** se cortan en más de una línea recta.*
- ☐ *Las rectas que pasan por los puntos **A** y **B** y por **D** y **H** están en un mismo plano.*
- ☑ *Existe exactamente una recta común a los planos de las caras **ADEH** y **EFGH**.*
- ☑ *Los planos que contienen las regiones rectangulares **BDHF** y **ACGE** son secantes.*
- ☐ *La recta que pasa por los puntos **I** y **J** no es perpendicular al plano **EFGH**.*

15 Piensa y, luego, responde.

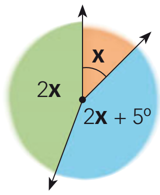
- Un plano $\mathcal{P}_1$ es perpendicular a otro $\mathcal{P}_2$ y este último es perpendicular a otro plano $\mathcal{P}_3$. ¿Qué posiciones relativas tienen los planos $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_3$?
  $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_3$ son paralelos.
- Representa los planos $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ y $\mathcal{P}_3$ en sus relaciones mutuas.

16 Fíjate en la vista de planta de un triedro y determina por debajo de qué valor deberá estar la medida del ángulo plano **POR**.

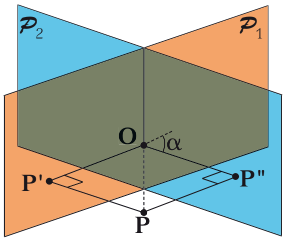
$m\ \sphericalangle POR < 140°$.



17 Determina la medida **x** del ángulo plano que satisface las condiciones que se muestran en el ángulo triedro. *$x < 71°$.*



18 Los puntos **P'** y **P"** son proyecciones ortogonales del punto **P** en los planos $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$. Si la medida del ángulo formado por los segmentos **PP'** y **PP"** es 60°, ¿cuánto mide el ángulo α?
$m < \alpha = 120°$.



- Describe lo que hiciste para obtener α.

19 Copia y, luego, completa las tablas.

Poliedro regular	Número de ...	
	lados de sus caras	aristas del poliedro
Tetraedro	3	*6*
Octaedro	*3*	8
Icosaedro	*3*	30

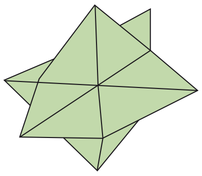
Poliedro regular	Número de ...	
	aristas que convergen	vértices del poliedro
Hexaedro	*3*	8
Icosaedro	*5*	12
Dodecaedro	3	*20*

Sugerencias didácticas

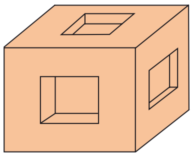
- Las actividades propuestas en esta página están estrechamente vinculadas a los conceptos y procedimientos desarrollados a lo largo de la unidad. Haga que lean cuidadosamente las instrucciones y, después, verifique los resultados obtenidos.
- Es importante observar de cerca que los estudiantes aplican correctamente los procedimientos para realizar las proyecciones geométricas sobre el plano desarrolladas en la unidad.

20 Determina la característica de los siguientes poliedros.

- Poliedro formado colocando pirámides de base cuadrada en las seis caras de un cubo. *$x = 2$.*



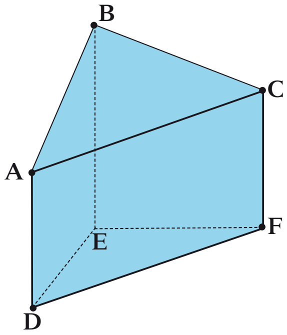
- Poliedro resultado de sacar una porción en forma de prisma rectangular en cada una de las caras de un cubo. *$x = 8$.*



21 Lee y, luego, haz lo que se te pide.

> La suma, **S**, de los ángulos internos de los polígonos que forman las caras de un poliedro convexo de **V** vértices se obtiene con: **S** = 360º (**V** – 2).

- Obtén la suma de los ángulos internos de las caras del siguiente poliedro. ***S** = 1 440º.*



- Comprueba tu respuesta sumando los resultados de todas las caras del poliedro.
S = 180º + 180º + 360º + 360º + 360º = 1 440º.

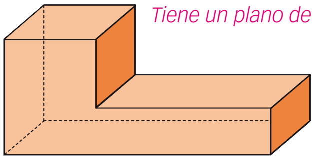
22 Resuelve el problema.

La suma de los ángulos internos de las caras de un poliedro convexo es 4 680º. ¿Cúantos vértices tiene el poliedro?
El poliedro tiene 15 vértices.

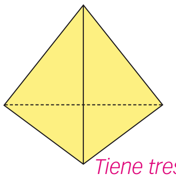
23 Observa la maqueta de un edificio y, luego, dibuja sus tres vistas.

24 Dibuja los planos de simetría de los siguientes cuerpos poliedros.

- Un cuerpo compuesto por dos prismas de bases cuadradas distintas. *Tiene un plano de simetría.*



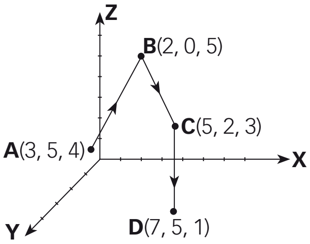
- Una pirámide regular de base triangular.



Tiene tres planos de simetría.

25 Resuelve el problema.

La representación del recorrido de un objeto estelar, tomando a la Tierra como punto de referencia.



- Si el recorrido en cada tramo utiliza como unidad de medida el año-luz, ¿cuál es la distancia recorrida por el objeto al moverse de **A** hasta **D**? *Recorrido = 13.44 años-luz.*

Competencias fundamentales

Pensamiento lógico, creativo y crítico

Los conocimientos adquiridos por por los estudiantes son necesarios para identificar las alternativas más convenientes en la persecución de la solución de problemas que forman parte de su diario vivir. En este aspecto radica la importancia de que adquieran las destrezas necesarias para resolver problemas que involucren los aspectos relacionado con la Geometría del espacio estudiados en la unidad.

Criterios de evaluación

Competencia comunicativa:

- Adaptación de las representaciones gráficas, simbólicas y numéricas a la situación de comunicación.

Competencia algoritmo:

- Seguimiento de las reglas, instrucciones y procedimientos.

Competencia pensamiento lógico, creativo y crítico

- Selecciona una estrategia, la aplica y evalúa su efectividad.

Sugerencias didácticas

Resolución de problemas

- Proponga a sus estudiantes que lean detenidamente las instrucciones de los problemas propuestos en las actividades 20, 21, 22, 23, 24 y 25. Estos problemas son aplicaciones cotidianas de los conceptos y procedimientos relacionados con la Geometría del espacio trabajados en la unidad.
- Acompañe a sus estudiantes en la realización de estas actividades y ofrézcales las orientaciones necesarias.

Aprender a aprender

Motive a sus estudiantes para que inventen ejemplos de las aplicaciones cotidianas de los conceptos desarrollados en la unidad. Por ejemplo, pregunte: *¿Qué conocimientos deben tener para realizar proyecciones de figuras sobre el plano?* Discuta las diversas respuestas con el grupo.

Indicadores de logro de la evaluación

- **Identifica** el concepto de *espacio* y sus postulados. **Identifica** las posiciones relativas de dos planos en el espacio. **Identifica** ángulos entre dos rectas en el espacio y entre una recta y un plano. **Identifica** ángulos entre dos planos. **Identifica** ángulos diedros y poliedros. **Identifica** el concepto de *cuerpos poliedros* y **los clasifica** en cóncavos y convexos. **Determina** la característica de Euler en poliedros regulares. **Realiza** proyecciones de un punto y de un segmento sobre un plano. **Realiza** proyecciones de un cuerpo sobre un plano. **Identifica** distintas simetrías presentes en cuerpos geométricos. **Representa** puntos en el espacio y **calcula** distancias, perímetros y áreas en el espacio. **Resuelve** problemas del contexto que involucran conceptos relacionados con la geometría del espacio. **Utiliza** recursos virtuales y electrónicos: computadora, softwares educativos, juegos interactivos y otros, en la búsqueda de información.

Competencias específicas

- Comunica.
- Razona y argumenta.
- Modela y representa.
- Usa algoritmos.
- Conecta.
- Resuelve problemas.

Aprender a aprender

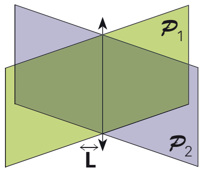
Plantee al grupo: *¿Qué importancia tiene para el diseño en las construcciones y edificaciones, la simetría de los cuerpos poliedros?*

EVALUACIÓN

Comunica

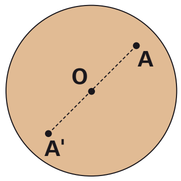
26 Construye, a partir de la figura siguiente, una definición de planos secantes.

Dos planos son secantes si tienen en común una y solo una recta.



27 Escribe una oración que se refiera a la simetría central del cuerpo $\mathcal{C}$ respecto a **O**.

*$\mathcal{C}$ tiene simetría respecto a un centro **O**, si para dos puntos cualesquiera del cuerpo, **A** y **A'**: **OA** = **OA'**.*



Razona y argumenta

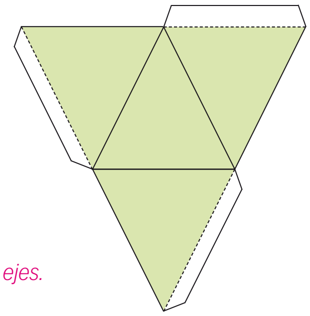
28 Responde justificando tu respuesta.

- ¿Puede haber un poliedro convexo tal que su número de caras y de aristas sea el mismo?
  No. Porque tendría solo dos vértices.

Modela y representa

29 Copia, recorta la plantilla del tetraedro y constrúyelo. Luego, haz lo que se te pide.

- Perfora en el tetraedro el punto medio de cada arista y pasa un alambre por los puntos medios de una arista y su opuesta. ¿El alambre pasa por un eje de simetría? ¿Cuántos ejes de simetría tiene, en total, el tetraedro?

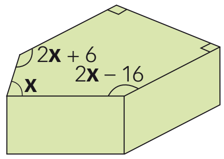


7 ejes.

Usa algoritmos

30 Determina el número mínimo de aristas que debe tener un poliedro cuyo número de caras es igual al de vértices. *A = 2(C – 1), como un poliedro tiene un mínimo de **C** = 4 caras, entonces: **A** = 6.*

31 Obtén lo que se te pide.



- La medida desconocida de los ángulos internos, de las caras pentagonales del poliedro. *74°, 154° y 132°.*
- La suma de las medidas de los ángulos internos de las caras del poliedro. *2 880°.*

32 Determina el número de vértices de un poliedro tal que la suma de los ángulos internos de sus caras poligonales es 3 600°. *Tiene **V** = 12 vértices.*

- ¿Cuál es su número de aristas, si tiene 10 caras? *Tiene **A** = 20 aristas.*

33 Representa los siguientes puntos.

- **A**(4, 6, 9)
- **B**(2, 4, 3)
- **C**(– 5, – 6, 3)

34 Lee y, luego, haz lo que se te pide.

Las coordenadas del punto medio del segmento que une a **P**(x_1, y_1, z_1) y **Q**(x_2, y_2, z_2) son: $\frac{1}{2}(x_1 + x_2)$; $\frac{1}{2}(y_1 + y_2)$; $\frac{1}{2}(z_1 + z_2)$.

- Un triángulo tiene por vértices los puntos del espacio **A**(0, 4, 1); **A**(3, 5, 2) y **A**(4, 3, 0). Determina los puntos medios de sus lados y, luego, calcula cuántas veces mayor es el área del triángulo original en relación con el área del triángulo que une esos puntos medios. *4.67 veces.*

Conecta

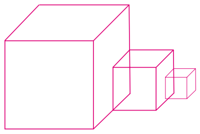
35 Resuelve el problema.

Un avión se halla en un punto de coordenadas **P**(10, 15, 24) y se dirige en línea recta a otro punto de coordenadas **Q**(36, 13, 10). ¿En qué posición lo ubicaría una torre de control cuando vaya a mitad de su recorrido?

En la posición P_m (23, 14, 17).

Sugerencias didácticas para la evaluación

- Es importante verificar, antes de dar inicio a las actividades de evaluación, que sus estudiantes identifican y clasifican los tipos de ángulos en el espacio y reconocen y clasifican poliedros diversos. Observe que representan puntos y calculan distancias en el espacio.

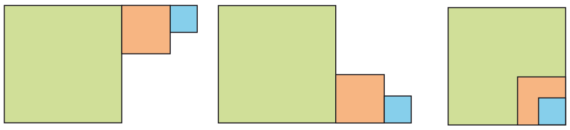


SABER HACER

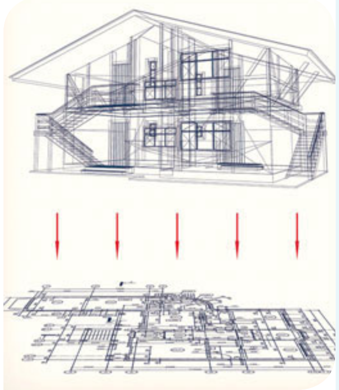
36 **Resolución de problemas**. Lean el texto y, luego, hagan lo que se les pide.

A partir de las tres vistas ortogonales de un cuerpo, este puede ser reconstruido. Las vistas constituyen las figuras en dos dimensiones necesarias y suficientes para poder representar un cuerpo tridimensional.

- Observen las vistas de un cuerpo poliedro y, a partir de ellas, reconstruyan dicho cuerpo.



Planta Alzado Perfil



Maqueta. Vista de planta de una edificación.

37 Responde las preguntas.

- ¿Cómo ha impactado el desarrollo de la ciencia y la tecnología en la vida de la humanidad? Da ejemplos.
- ¿Crees que es suficiente el avance tecno-científico para conseguir una civilización más humana?

APRENDIZAJE AUTÓNOMO

38 Marca según tus logros.

	Iniciado	En proceso	Logrado
• Identifico las posiciones relativas de dos planos.			
• Identifico distintos tipos de ángulos en el espacio.			
• Reconozco y clasifico poliedros diversos.			
• Realizo proyecciones de figuras sobre el plano.			
• Identifico las simetrías presentes en cuerpos geométricos.			
• Represento puntos y calculo distancias en el espacio.			

39 Reflexiona sobre tu aprendizaje.

- ¿Cuáles contenidos de la unidad trabajaste con más entusiasmo y dedicación? ¿Por qué?
- ¿Tuviste algunas dificultades con algunos contenidos? ¿Cómo podrías superarlas?

Sugerencias didácticas para la evaluación

- Pregunte a sus estudiantes:
  — *¿Cuáles son las posiciones relativas de dos planos?*
  — *¿Qué tipos de ángulos pueden identificar en el espacio?*
  — *¿Cómo se clasifican los poliedros?*
  — *¿Cuáles son las características de un cuerpo simétrico?*

Saber hacer

En la actividad 36, *Saber hacer,* se aplica la estrategia de evaluación *Resolución de problemas*. Formados en grupos, observarán la ilustración de la maqueta que representa la vista de planta de una edificación, luego, leerán el texto y después, seguirán las instrucciones al pie de la letra. En este caso, a partir de tres vistas ortogonales de un cuerpo poliedro, reconstruirán dicho cuerpo. Las vistas representan las figuras de dos dimensiones, las cuales son suficientes para construir un cuerpo tridimensional.

Actitudes y valores

Ciencia y tecnología

En la sección destinada a *Actitudes y valores*, actividad 37, responderán, por qué se afirma que la vida en nuestro planeta tiene todas las características de un sistema complejo de interrelaciones. Expresarán por qué debemos velar por la sostenibilidad de la diversidad biológica en la Tierra. Dirán cómo expresan este cuidado.

Aprendizaje autónomo

En el apartado *Aprendizaje autónomo*, actividad 38, evaluarán por ellos mismos si los conceptos y procedimientos que trabajaron en la unidad se encuentran en estado de iniciación, en proceso o logrado. En la actividad 39, reflexionarán sobre su proceso de aprendizaje.

Aprender a aprender

Haga que sus estudiantes apliquen los conceptos aprendidos en la unidad en situaciones de la cotidianidad, por ejemplo, pregunte: *¿Qué conocimientos son necesarios para construir un cuerpo tridimensional?*

9 Poliedros: área y volumen

Propuesta de programación

COMPETENCIAS	CONTENIDOS
Específicas • **Razona y argumenta**: **Clasifica** los cuerpos geométricos poliedros y **establece** los pasos para encontrar su área y su volumen. • **Comunica**: **Expresa** con la notación adecuada las experiencias con el cálculo de área y volumen de cuerpos poliedros que ha experimentado en su diario vivir. • **Modelar y representar**: **Representa** adecuadamente los cuerpos geométricos de caras planas. • **Usa algoritmos**: **Sigue** las reglas que le permiten obtener un resultado al resolver problemas que involucran el cálculo de área y de volumen de diversos cuerpos poliedros. • **Conecta**: **Construye** y **resuelve** problemas relacionados con la vida cotidiana que involucran cuerpos poliedros. • **Resuelve problemas**: **Resuelve** problemas que involucran el cálculo de área y de volumen de diversos cuerpos geométricos poliedros. • **Utiliza herramientas tecnológicas**: **Utiliza** soportes tecnológicos como la Internet, la calculadora científica y otros dispositivos. **Fundamentales** **Resolución de problemas**: **Identifica** y **utiliza** estrategias, y **genera** alternativas de solución.	**Conceptos** • El prisma. • La pirámide. • Sección transversal de una pirámide. • Poliedros regulares. **Procedimientos** • Identificación de distintas clases de prismas y obtención de sus áreas y volúmenes. • Identificación de distintas clases de pirámides y obtención de sus áreas y volúmenes. • Cálculo del área y el volumen de poliedros regulares. • Actitudes y valores. • Valoración del ingenio y la creatividad humana. • Apreciación del esmero en el trabajo. **Actitudes y valores** • Valoración del ingenio y la creatividad humana. • Apreciación del esmero en el trabajo.

Tiempo estimado de trabajo: 2 semanas

INDICADORES DE LOGRO

- **Identifica** el concepto de *prisma*, sus elementos y su clasificación.
- **Determina** el área y el volumen de diversos prismas.
- **Identifica** el concepto de *pirámide*, sus elementos y su clasificación.
- **Calcula** el área y el volumen de diversas pirámides.
- **Identifica** el polígono resultante de la sección transversal de una pirámide.
- **Determina** el área y el volumen de los poliedros regulares.
- **Resuelve** problemas del contexto que involucran aplicar el cálculo de área y de volumen de diversos poliedros.
- **Utiliza** recursos virtuales y electrónicos: computadora, softwares educativos, juegos interactivos y otros, en la búsqueda de información.

Valor transversal: Trabajo

Recursos digitales

Plataforma digital

CD

BIBLIOTECA DEL DOCENTE

- DOCUMENTOS PARA LA PLANIFICACIÓN

CUADERNO DE ACTIVIDADES

UNIDAD 9	Poliedros: área y volumen

RECURSOS DE REFUERZO Y AMPLIACIÓN

LibroMedia

ACTIVIDADES INTERACTIVAS

PÁGINA 161	Clasificación de prismas y pirámides II.
PÁGINA 162	Área de poliedros.
PÁGINA 164	Área de cuerpos compuestos.

CD DE RECURSOS DIGITALES: PLAN REGULAR

Pleno: PRUEBA DE EVALUACIÓN FORMATIVA DE LA UNIDAD

Estrategias pedagógicas

- Recuperación de experiencias previas.
- Trabajo en equipo.
- Aprendizaje basado en problemas (ABP).

Unidad 9

- **Lee** y **comenta** las informaciones expuestas en el apartado *Punto de partida*.
- **Responde** preguntas relacionadas con las informaciones expuestas en el apartado *Punto de partida*.
- **Recupera** experiencias vividas mediante la observación de las imágenes de la ilustración.
- **Analiza** un problema de la vida cotidiana vinculado a los conceptos y procedimientos que desarrollarán en la unidad, en el apartado *Analiza el problema*.
- **Plantea** soluciones al problema leído y analizado anteriormente, en el apartado *Plantea una solución.*

Apertura de la unidad

Dentro de los objetivos principales de la apertura de esta unidad se encuentran el plantear una situación de aprendizaje, una problemática o un texto que sirve para contextualizar el tema de la unidad. Todo esto con la finalidad de motivar y despertar la curiosidad de los estudiantes.

A partir de la situación o texto planteado, el problema a analizar y las imágenes de la ilustración se conecta al estudiante con el tema a tratar, a la vez que vincula con la realidad o cotidianidad los temas que se van a desarrollar.

Todos los elementos que conforman la portada promueven la recuperación de experiencias o conocimientos previos y la motivación o el interés por los conocimientos que adquirirán en la unidad.

9 Poliedros: área y volumen

Conceptos

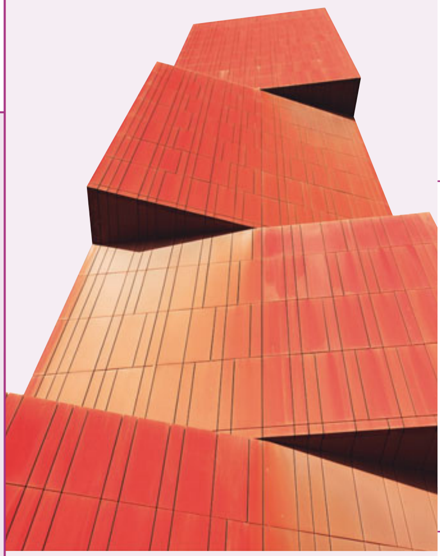
- El prisma.
- La pirámide.
- Sección transversal de una pirámide.
- Poliedros regulares.

Procedimientos

- Construcciones.
- Resolución de problemas.

Actitudes y valores

- Valoración del ingenio y la creatividad humana.
- Esmero en el trabajo.



Punto de partida

Los cuerpos geométricos ejercieron una gran fascinación a las grandes civilizaciones antiguas, tanto que muchas de sus propiedades matemáticas fueron conocidas y aprovechadas en construcciones y obras de ingeniería públicas. En tablillas de Mesopotamia, papiros de Egipto y documentos de China se muestran algunos problemas geométricos y sus soluciones.

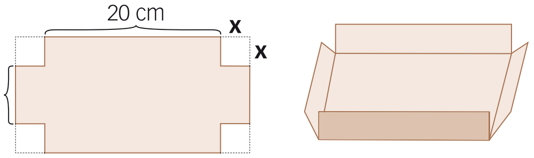
Son asombrosos los conocimientos adquiridos y transmitidos por los constructores de las pirámides sobre la. geometría de la pirámide y los sofisticados cálculos de la capacidad de los almacenes de grano en Babilonia.

Todo este conocimiento matemático antiguo, conseguido para la resolución de problemas prácticos, es recibido por los geómetras griegos quienes se encargaron de incluirlo en un cuerpo organizado de teoremas fundado en principios de demostración y cuya culminación es la obra *Elementos* de Euclides.

- ¿Qué peculiaridad tiene la actividad matemática entre los griegos que la diferencia de civilizaciones anteriores?

ANALIZA EL PROBLEMA

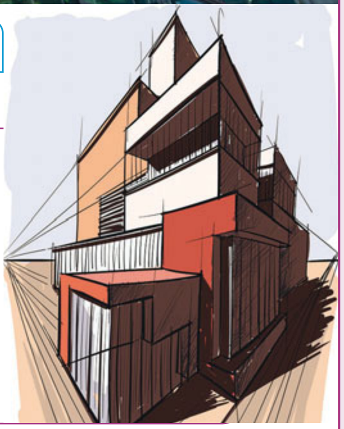
En una fábrica de cajas para placas de radiografía se dispone de un rectángulo de cartón de 30 cm x 15 cm. Para construir las cajas se cortan en cada uno de los vértices del rectángulo cuadrados congruentes. Si la diagonal de la caja debe ser de $9\sqrt{11}$ cm, ¿cuál debe ser la longitud, **x**, de los lados de cada uno de los cuadrados que se quitan al rectángulo?



Trabajo colectivo de apertura

- **Punto de partida:** Guíe a sus estudiantes a leer y comentar en el grupo las informaciones expuestas en el apartado *Punto de partida*, que refiere la fascinación que generaron los cuerpos geométricos en las grandes civilizaciones antiguas y cómo fueron aprovechadas sus propiedades matemáticas en obras y en construcciones de ingeniería.
- **Analiza el problema:** Se plantea que una fábrica construye cajas para empacar placas de radiografías, para lo cual cuenta con un rectángulo de cartón, al que se le cortarán cuadrados congruentes en cada uno de sus vértices. Se debe determinar la longitud de los lados de cada uno de los cuadrados.
- **Plantea una solución:** En este apartado responderán preguntas relacionadas con los datos del proplema planteado y las posibles soluciones del mismo.

Edificios modernos. La geometría de los poliedros es ampliamente utilizada en la arquitectura moderna.



PLANTEA UNA SOLUCIÓN

- Piensa, antes de responder.
  - ¿De cuáles datos dispones para resolver el problema?
  - ¿Qué magnitud debes conocer antes de resolver el problema?
    La diagonal de la base después de quitar los cuadrados.
- A partir del análisis anterior, ¿qué pasos pueden conducirte a la solución?
  Solución: $\mathbf{x} = 10 - \sqrt{74} \approx 1.4$ *cm.*
  - De las soluciones posible, ¿descartarás alguna? ¿Por qué?
    Se descarta $x = 10 + \sqrt{74}$ *cm, porque* $2\mathbf{x}$ *es mayor que cualquiera de los lados del rectángulo.*
- Comprueba tu solución del problema y muestra en el aula, justificándolo, qué procedimiento seguiste para resolverlo.

Esquema conceptual de la unidad

Poliedros: área y volumen

La Geometría se ocupa de estudiar

Los cuerpos poliedros

entre los que se cuentan

El prisma, la pirámide y la pirámide truncada | Poliedros regulares

a los que se les calcula su

Área y volumen

Actividad de motivación

Pida a sus estudiantes que lean en la sección: *Conceptos y procedimientos*, los temas que trabajarán en la unidad y las actitudes y valores que estarán presentes en el desarrollo de la misma. Luego, para que interioricen la importancia de conocer las propiedades, el área y el volumen de los poliedros, formúleles preguntas como las siguientes: *¿Qué formas poliédricas prevalecen en el diseño de las edificaciones de las ciudades? ¿Qué importancia tienen los conocimientos geométricos en los diseños arquitectónicos? ¿Podrían mencionar alguna construcción en la que se combinen, en su diseño, diversos tipos de poliedros?*

Actividad interactiva

Clasificación de prismas y pirámides II

Actividad interactiva de recuperación de experiencias, en la que compararán objetos de uso cotidiano con las características del prisma y la pirámide. Completarán las expresiones arrastrando con el ratón el complemento de cada información.

Actitudes y valores

Trabajo

Aproveche la situación planteada en el apartado *Punto de partida* y en las imágenes de la ilustración para conversar con sus estudiantes acerca de cómo han evolucionado las construcciones en sus diseños con el paso del tiempo. Pregunte al grupo: *¿Podrían nombrar algunas diferencias entre las construcciones del pasado y las actuales?¿Creen que en la actualidad se aprovechan mejor los espacios? ¿Por qué?*

Indicadores de logro

- **Identifica** correctamente el concepto de *prisma*, sus elementos y su clasificación.
- **Determina** el área y el volumen de diversos prismas.

Actividad interactiva

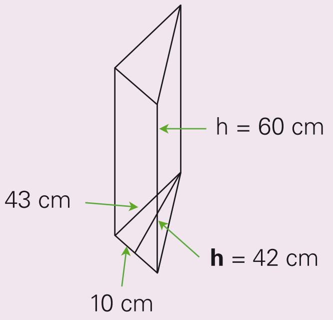
Área de poliedros

Actividad interactiva en la que determinarán, en sus cuadernos, el área lateral, el área de la base y el área total de los poliedros cuyas medidas se especifican. Luego, completarán el cuadro con los datos correspondientes.

Más información

Comente a sus estudiantes que, para calcular el área total de un prisma regular, es necesario conocer tres medidas:

- El área de una de las bases.
- El perímetro de una de las bases.
- La altura del prisma.



El área total de un prisma regular es igual a la suma del área lateral más dos veces el área de la base.

Área lateral = Perímetro de la base por la altura.

Al = (43 + 43+ 10) (60) = 5 760 cm^2.

Área de la base = (10) (42) ÷ 2 = 210 cm^2.

Área total = 5 760 + 2(210) = 6 180 cm^2.

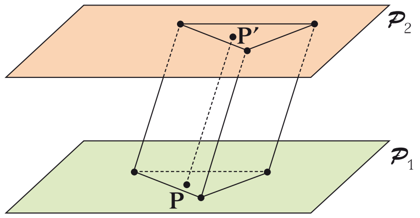
RECUPERACIÓN

Responde.

- ¿Qué es una región poligonal simple?
- ¿Qué diferencia a un polígono de una región poligonal?

1 Concepto de prisma. Elementos y clasificación

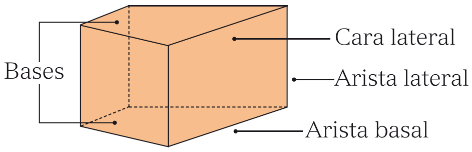
Un prisma es la unión de los segmentos paralelos de extremos **P** y **P'**, que pertenecen a regiones poligonales simples de dos planos, $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$, paralelos y no coincidentes.



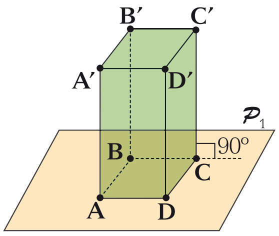
Si $P_1\,P'_1$, $P_2\,P'_2$, … son segmentos que cumplen la condición anterior, un prisma es un cuerpo $\mathcal{C}$ tal que: $\mathcal{C} = P_1\,P'_1 \cup P_2\,P'_2 \cup \ldots$

Las regiones poligonales de los planos $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$ son paralelas por pertenecer a planos paralelos y congruentes. Estas regiones son caras del prisma, llamadas bases. Las demás son caras laterales que son paralelogramos.

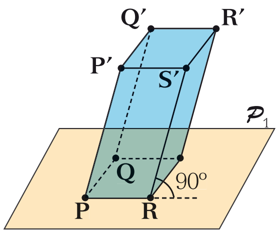
Los segmentos paralelos que unen los vértices correspondientes de ambas bases y los que unen dos vértices consecutivos en cada una de las bases son las aristas laterales y basales del prisma, respectivamente.



Un prisma es recto si los segmentos **PP'** son perpendiculares a cualquiera de los planos, $\mathcal{P}_1$ o $\mathcal{P}_2$, y oblicuos, si estos segmentos no son perpendiculares a alguno de esos planos.



Prisma recto



Prisma oblicuo

Un prisma es regular si las regiones poligonales de los planos $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$ están limitadas por polígonos regulares.

RECUERDA

Caras, vértices y aristas de un prisma

Si las bases de un prisma son polígonos de **n** lados, dicho prisma tiene **n** + 2 caras, 2**n** vértices y 3**n** aristas.

Ejemplo resuelto:

- ¿Cuántas caras, vértices y aristas tiene un prisma de bases hexagonales?

  Aquí **n** = 6, entonces:

  C = **n** + 2 = 6 + 2 = 8

  V = 2**n** = 2(6) = 12

  A = 3**n** = 3(6) = 18

  Se cumple la fórmula de Euler, **C** + **V** = **A** + 2:

  8 + 12 = 18 + 2

Sugerencias didácticas

- **Inicio:** Oriente a sus estudiantes para que lean y respondan en el aula las preguntas vinculadas a la recuperación de experiencias previas propuestas en el apartado *Recuperación*, en la que expresarán qué es una región poligonal simple y qué diferencia a un polígono de una región poligonal.
- **Desarrollo:** Pida a sus estudiantes que lean cuidadosamente el contenido de la doble página, que observen las representaciones gráficas y el desarrollo de los conceptos relacionados con el prisma, sus elementos, su clasificación y los procedimientos para determinar su área y su volumen. Haga que lean, comenten y reproduzcan el contenido del apartado *Recuerda*.

2 Área y volumen de un prisma

El **área total** de un prisma es la suma de las áreas de sus bases, $\mathbf{A_b}$, y de sus caras laterales o área lateral, $\mathbf{A_l}$: $\mathbf{A} = 2\mathbf{A_b} + \mathbf{A_l}$.

El área total de un prisma regular recto cuyas bases tienen **n** lados de longitud **l** y apotema **a** y de altura **h**, se obtiene con:

$$\mathbf{A} = \mathbf{nl}(\mathbf{a} + \mathbf{h})$$

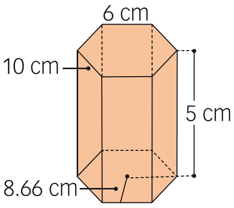
EJEMPLO RESUELTO:

- Determinar el área total del prisma de la derecha.

  Aquí: $\mathbf{n} = 6$; $\mathbf{l} = 10$ cm; $\mathbf{a} = 8.66$ cm; $\mathbf{h} = 5$ cm.

  Entonces, el área total del prisma se obtiene como sigue:

  $\mathbf{A} = 6(10 \text{ cm})(8.66 \text{ cm} + 5 \text{ cm}) = (60 \text{ cm})(13.66 \text{ cm}) = 819.60 \text{ cm}^2$.



El **volumen** de un prisma es el producto del área de una de sus bases, $\mathbf{A_b}$, y su altura, $\mathbf{h}$: $\mathbf{V} = \mathbf{A_b h}$.

El volumen de un prisma regular cuyas bases son polígonos de **n** lados de longitud **l** y apotema **a** y de altura **h**, se obtiene con:

$$\mathbf{V} = \mathbf{n\,l\,a\,h}/2$$

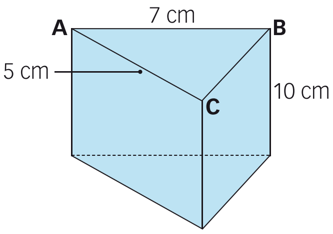
EJEMPLO RESUELTO:

- Calcular el volumen del prisma recto no regular que se muestra a la derecha.

  La longitud del cateto $\overline{\mathbf{BC}}$ es: $\overline{\mathbf{BC}} = \sqrt{7^2 - 5^2} = 2\sqrt{6}$ cm.

  Entonces: $\mathbf{A_b} = (5 \text{ cm})(2\sqrt{6} \text{ cm})/2 = 5\sqrt{6} \text{ cm}^2$.

  Luego: $\mathbf{V} = (5\sqrt{6} \text{ cm}^2)(10 \text{ cm}) = 50\sqrt{6} \text{ cm}^3 \approx 122.47 \text{ cm}^3$.



ACTIVIDADES

1 Piensa y, luego, responde dando razones.

- ¿Puede un prisma tener 21 aristas?
  Sí, porque 21 es múltiplo de 3. Su base es un heptágono.
- ¿Puede un prisma tener 23 vértices?
  No, porque 23 no es múltiplo de 2.

2 Calcula el área total en el primer caso y el volumen en el segundo.

- De un prisma regular recto de base octagonal de arista basal de 8 cm, apotema 9.66 cm y 15 cm de atura. ***A** = 1 578.24 cm²*.
- De un prisma oblicuo cuya base es un triángulo equilátero de lados 12" y de 15" de altura. ***V** = 935.25 pulg³*.

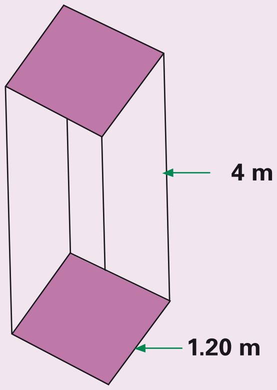
- **Desarrollo:** Muéstreles ejemplos de los conceptos desarrollados en la doble página. Pídales que expresen ejemplos de la presencia del prisma en su entorno. Haga que reproduzcan las representaciones gráficas y desarrollen los ejemplos en sus cuadernos. Diseñe actividades similares a las de estas páginas sobre el cálculo del área y el volumen de prismas regulares.
- **Cierre:** Motive a sus estudiantes a realizar los ejercicios del apartado *Actividades*. En la actividad 1, responderán si puede un prisma tener 21 aristas y 23 vértices. En la actividad 2, calcularán el área y el volumen de un prisma regular recto de base octagonal y de un prisma oblicuo de medidas especificadas.

Más información

Comente a sus estudiantes que para calcular el volumen de un prisma regular es necesario conocer dos medidas:

- El área de una de las bases.
- La altura del prisma.

El volumen de un prisma regular es el producto del área de su base por su altura.



Volumen = $(\mathbf{A_b})(\mathbf{h})$

$\mathbf{V} = (1.20)^2\ (4)$

$\mathbf{V} = 5.76 \text{ m}^3$.

Ficha 47.

Aprender a aprender

Pregunte a sus estudiantes: *¿Qué conocimientos previos sobre el prisma y sus propiedades tenían antes de desarrollar los temas de esta doble página? ¿Creen que esos conocimientos facilitaron el trabajo? ¿Por qué?*

Indicadores de logro

- **Identifica** el concepto de *pirámide*, sus elementos y su clasificación.
- **Calcula** el área y el volumen de diversas pirámides.

Actividad interactiva

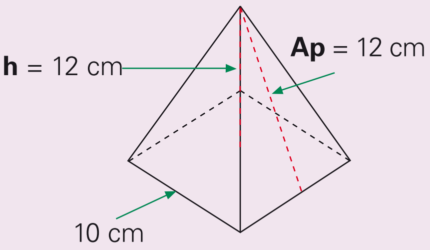
Área de cuerpos compuestos

Actividad interactiva en la que calcularán, en sus cuadernos, el área de cuerpos compuestos por pirámides y prismas. Luego, unirán con flechas los cuerpos a sus áreas correspondientes.

Más información

Comente que para calcular el área total de una pirámide regular es necesario conocer dos medidas:

- El área de la base.
- El área lateral.



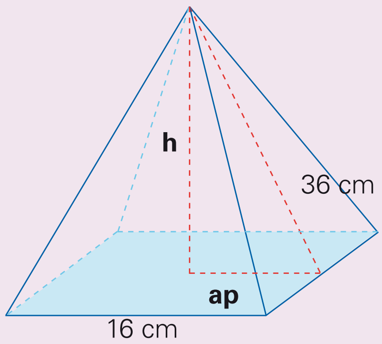
El área lateral = Producto del perímetro de la base por la apotema.

Al = (10 x 4) (13) ÷ 2 = 260 cm^2.

Ab = 102 = 100 cm^2.

At = **Al** + **Ab**

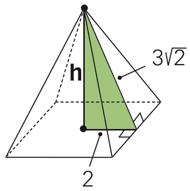
At = 260 + 100 = 360 cm^2.



RECUPERACIÓN

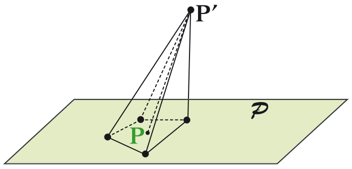
Responde.

- ¿Cómo calcularías la altura, **h**, de la pirámide?



1 Concepto de pirámide. Clasificación

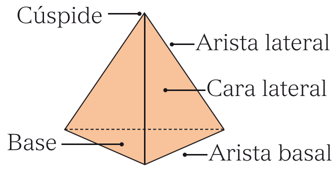
Una pirámide es la unión de los segmentos de extremos **P** y **P′**, tales que los puntos **P** pertenecen a una región poligonal simple de un plano $\mathcal{P}$ y el punto **P′**, que no pertenece a $\mathcal{P}$, es común a todos ellos.



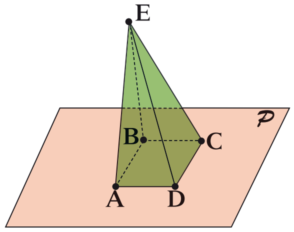
Si P_1P', P_2P', … son segmentos que cumplen la condición anterior, una pirámide es un cuerpo $\mathcal{C}$ tal que: $\mathcal{C} = P_1P' \cup P_2P' \cup \dots$

La región poligonal del plano $\mathcal{P}$ es una cara de la pirámide, llamada base. Las demás son caras laterales que son triángulos.

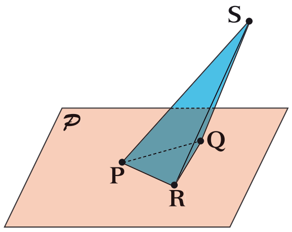
Los segmentos que unen los vértices de la base con el punto **P′** y los que unen dos vértices consecutivos de la base son aristas laterales y aristas basales de la pirámide, respectivamente.



Una pirámide es recta si sus caras laterales son triángulos isósceles y oblicua, cuando no todas sus caras laterales son triángulos isósceles.



Pirámide recta



Pirámide oblicua

Una pirámide es regular si es recta y su base es un polígono regular. En cualquier otro caso, la pirámide es irregular.

La altura de los triángulos isósceles que son las caras laterales de una pirámide regular es la apotema lateral de dicha pirámide.

RECUERDA

Caras, vértices y aristas de una pirámide

Si las bases de una pirámide son polígonos de **n** lados, la pirámide tiene **n** + 1 caras, **n** + 1 vértices y 2**n** aristas.

Ejemplo resuelto:

- ¿Cuántas caras, vértices y aristas tiene una pirámide de base pentagonal?

Aquí n = 5, entonces:

C = **n** + 1 = 5 + 1 = 6

V = **n** + 1 = 5 + 1 = 6

A = 2**n** = 2(5) = 10

Se cumple la fórmula de Euler, **C** + **V** = **A** + 2 :

6 + 6 = 10 + 2

Sugerencias didácticas

- **Inicio:** Oriente a sus estudiantes para que lean y respondan en el aula la pregunta vinculada a recuperación de experiencias previas planteada en el apartado *Recuperación*, en la que expresarán cómo calcularían la altura, **h**, de la pirámide representada.
- **Desarrollo:** Pídales que lean cuidadosamente el contenido de la doble página, que observen las representaciones gráficas y el desarrollo de los conceptos relacionados con la pirámide, sus elementos, su clasificación y los procedimientos para determinar su área y su volumen. Haga también que lean, comenten y reproduzcan el contenido del apartado *Recuerda*.

2 Área y volumen de una pirámide

El área total de una pirámide es la suma de las áreas de su bases, $\mathbf{A_b}$, y de sus caras laterales o área lateral, $\mathbf{A_l}$: $\mathbf{A} = 2\mathbf{A_b} + \mathbf{A_l}$.

El área total de una pirámide regular cuyas bases tienen **n** lados de longitud **l** y apotema basal $\mathbf{a_b}$ y de apotema lateral $\mathbf{a_l}$, es: $\mathbf{A} = \mathbf{nl}\,(\mathbf{a_b} + \mathbf{a_l})/2$

EJEMPLO RESUELTO:

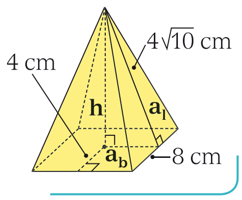
- Determinar el área total de la pirámide regular.

Aquí: $\mathbf{n} = 4$; $\mathbf{l} = 8$ cm;

$\mathbf{a_b} = 4$ cm; $\mathbf{a_l} = 4\sqrt{10}$ cm.

Entonces:

$\mathbf{A} = (4)(8 \text{ cm})(4 \text{ cm} + 4\sqrt{10} \text{ cm})/2$
$= 64(1 + \sqrt{10}) \text{ cm}^2 \approx 266.39 \text{ cm}^2$.



El volumen de una pirámide es un tercio del producto del área de su base, $\mathbf{A_b}$, y su altura, **h**: $\mathbf{V} = \mathbf{A_b h}/3$.

El volumen de una pirámide regular cuya base tiene **n** lados de longitud **l** y apotema $\mathbf{a_b}$ y de altura **h**, se consigue con: $\mathbf{V} = \mathbf{nl\,a_b\,h}/6$

EJEMPLO RESUELTO:

- Obtener el volumen de la pirámide anterior.

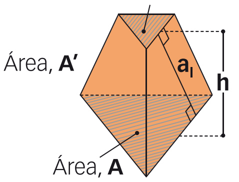
La altura de la pirámide es: $\mathbf{h} = \sqrt{\mathbf{a_l}^2 - \mathbf{a_b}^2} = 12$ cm.

Luego: $\mathbf{V} = (4)(8 \text{ cm})(4 \text{ cm})(12 \text{ cm})/6 = 256 \text{ cm}^3$.

SABER MÁS

Pirámide truncada

Una pirámide truncada o tronco de pirámide es el poliedro generado por un plano que corta a una pirámide paralelamente a su base.



El área total, $\mathbf{A_t}$, de una pirámide regular truncada se obtiene con la expresión:

$$\mathbf{A_t} = \frac{(\mathbf{P} + \mathbf{P'})\mathbf{a_l}}{2} + \mathbf{A} + \mathbf{A'}$$

Su volumen, **V**, se calcula con:

$$\mathbf{V} = \frac{\mathbf{h}(\mathbf{A} + \mathbf{A'} + \sqrt{\mathbf{AA'}})}{3}$$

h es la altura del tronco de pirámide y **p** y **p'** son los perímetros de sus bases mayor y menor, respectivamente.

ACTIVIDADES

3 Piensa y, luego, responde dando razones.

- ¿Puede una pirámide tener 25 aristas?
  No, porque 25 no es múltiplo de 2.
- ¿Puede un pirámide tener 17 caras?
  Sí, porque el número de caras es cualquier número natural mayor que 3.

4 Calcula lo que se te pide.

- El área total de una pirámide regular de base pentagonal de lado de 9 cm, de apotema basal 6.2 cm y apotema lateral 4.8 cm.
  ***A** = 247.50 cm².*
- El volumen de una pirámide de base hexagonal regular de 12.50 cm de lado, apotema basal 10.83 cm y altura 18 cm.
  ***V** ≈ 2 436 cm³.*

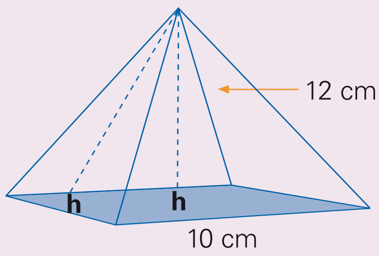
- **Desarrollo:** Muéstreles ejemplos de los conceptos desarrollados en la doble página. Pídales que expresen ejemplos de la presencia de la pirámide en su entorno. Haga que reproduzcan las representaciones gráficas y desarrollen los ejemplos en sus cuadernos. Diseñe actividades similares a las de estas páginas sobre el cálculo del área y el volumen de pirámides regulares. Pídales que lean, comenten y reproduzcan en sus cuadernos el contenido del apartado *Saber más*.
- **Cierre:** Motíveles a realizar los ejercicios del apartado *Actividades*. En la actividad 3, responderán si puede una pirámide tener 25 aristas y 17 vértices. En la actividad 2, calcularán el área total de una pirámide regular y el volumen de una pirámide oblicua de medidas especificadas en cada caso.

Más información

Comente a sus estudiantes que para calcular el volumen de una pirámide regular es necesario conocer dos medidas:

- El área de una de las bases.
- La altura de la pirámide.

El volumen de la pirámide regular es un tercio del producto del área de su base por su altura.



V = (**Ab**) (**h**) ÷ 3

V = (102) (12) ÷ 3

V = (100) (12) ÷ 3

V = 400 cm³.

Ficha 48.

Aprender a aprender

Pregunte a sus estudiantes: *¿Qué conocimientos previos sobre la pirámide y sus propiedades tenían antes de desarrollar los temas de esta doble página? ¿Creen que esos conocimientos facilitaron el trabajo? ¿Por qué?*

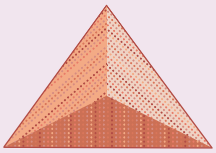
Indicadores de logro

- **Identifica** el polígono resultante de la sección transversal de una pirámide.
- **Determina** el área y el volumen de los poliedros regulares.

Más información

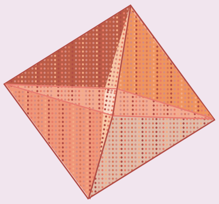
Fórmulas para calcular el área de los poliedros regulares

Tetraedro de arista l^2



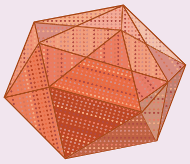
$\mathbf{A} = \sqrt{3} \,.\, \mathbf{l}^2$

Octaedro de arista l^2



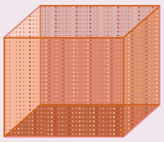
$\mathbf{A} = 2.\sqrt{3} \,.\, \mathbf{l}^2$

Icosaedro de arista l^2



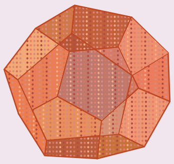
$\mathbf{A} = 5.\sqrt{3} \,.\, \mathbf{l}^2$

Cubo de arista l



$\mathbf{A} = 6.\, \mathbf{l}^2$

Dodecaedro de arista l^2



$\mathbf{A} = 3.\sqrt{25 + 10\sqrt{5}} \,.\, \mathbf{l}^2$

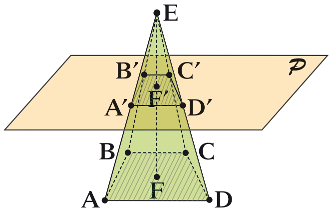
RECUPERACIÓN

Responde.

- ¿Cómo un plano debe cortar a un cubo para que la intersección sea un rectángulo?
  Cortando diagonalmente.
- ¿Y para que la intersección sea un triángulo?
  Cortando un vértice.

1 Sección transversal de una pirámide

La sección transversal de una pirámide es el polígono que resulta de la intersección de la pirámide y un plano paralelo a su base.



El polígono **A′B′C′D′** es la sección transversal resultado de cortar con el plano 𝓟, a la pirámide **ABCDE**:

$$\mathbf{A'B'C'D'} = \mathbf{ABCDE} \cap \mathcal{P}.$$

Si **EF′** = **h′** y **EF** = **h**, se puede establecer que:

$$\frac{\text{Área } \mathbf{A'B'C'D'}}{\text{Área } \mathbf{ABCD}} = \left(\frac{\mathbf{h'}}{\mathbf{h}}\right)^2$$

EJEMPLO RESUELTO:

- Determinar el área de la sección transversal, $\mathcal{A}'$, de una pirámide de base $\mathcal{A} = 36$ cm², si un plano paralelo a esta base corta a la pirámide a 2/3 de su altura.

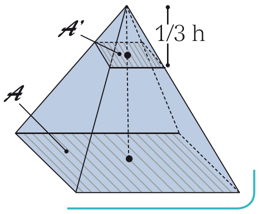
Aquí: **h′** = **h**/3.

Entonces:

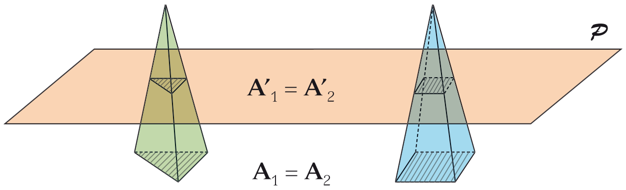
$$\frac{\mathcal{A}'}{\mathcal{A}} = \left(\frac{\mathbf{h'}}{\mathbf{h}}\right)^2 = \left(\frac{\mathbf{h}/3}{\mathbf{h}}\right)^2 = 1/9.$$

Finalmente, queda que:

$\mathcal{A}' = \mathcal{A}/9 = 4$ cm².



Dos pirámides de bases de igual área y de iguales alturas y tales que, un plano que las corte a ambas determina en ellas secciones transversales de áreas iguales, tienen igual volumen.



Este es el principio de Cavalieri y no solo se aplica a las pirámides, sino a cualquier cuerpo geométrico.

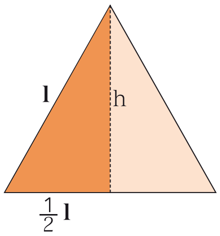
Bonaventura Cavalieri (1598 -1647). Matemático italiano que empleó el seccionamiento de los cuerpos en infinidad de rebanadas para calcular su volumen.

Sugerencias didácticas

- **Inicio:** Oriente a sus estudiantes para que lean y respondan en el aula las preguntas vinculadas a la recuperación de experiencias previas planteadas en el apartado *Recuperación*, en la que expresarán cómo deben cortar un cubo para que la intersección sea un rectángulo y para que la intersección sea un triángulo.
- **Desarrollo:** Pídales que lean cuidadosamente el contenido de la doble página, que observen las representaciones gráficas y el desarrollo de los conceptos relacionados con la sección transversal de una pirámide y el cálculo del área y el volumen de poliedros regulares. Haga que observen la imagen de Bonaventura Cavalieri y comenten la información que la acompaña.

2 Área y volumen de los poliedros regulares

El área de un tetraedro regular es cuatro veces el área, $\mathbf{A_c}$, de una de sus caras que son triángulos equiláteros.



El área del triángulo equilátero **ABC** se obtiene determinando su altura **h** mediante el teorema de Pitágoras:

$\mathbf{h} = \sqrt{\mathbf{l}^2 - (\mathbf{l}/2)^2} = \frac{1}{2}\,\mathbf{l}\sqrt{3}$

Luego, el área de una cara es: $\mathbf{A_c} = \frac{1}{2}(\mathbf{l})(\frac{1}{2}\,\mathbf{l}\sqrt{3}) = \mathbf{l}^2\sqrt{3}/4$.

El área del tetraedro regular es: $\mathbf{A} = 4\mathbf{A_c} = 4(\mathbf{l}^2\sqrt{3}/4) = \mathbf{l}^2\sqrt{3} \approx 1.73\,\mathbf{l}^2$.

El volumen del tetraedro regular es: $\mathbf{V} = \mathbf{l}^3\sqrt{2}/12 \approx 0.12$ l 3.

En el caso del hexaedro regular o cubo, $\mathbf{A} = 6\mathbf{l}^2$ y $\mathbf{V} = \mathbf{l}^3$.

El área y el volumen de los restantes poliedros regulares, ambas en función de su arista **l**, se muestran en la tabla siguiente:

Poliedro	Área	Volumen
Octaedro	$3.46\,\mathbf{l}^2$	$0.47\,\mathbf{l}^3$
Dodecaedro	$20.65\,\mathbf{l}^2$	$7.66\,\mathbf{l}^3$
Icosaedro	$8.66\,\mathbf{l}^2$	$2.18\,\mathbf{l}^3$

EJEMPLO RESUELTO:

- Obtener el área del poliedro de la derecha, formado por dos tetraedros regulares unidos por una de sus caras.

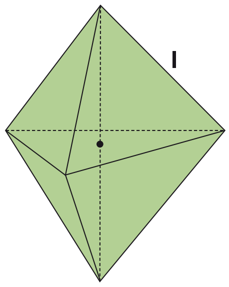
  El área del poliedro es el doble del área del tetraedro, menos las áreas de las 2 caras superpuestas, que se pierden:

  $\mathbf{A} = 2(\mathbf{l}^2\sqrt{3}) - 2(\mathbf{l}^2\sqrt{3}/4) = 3\mathbf{l}^2\sqrt{3}/2 = 3(\sqrt{10})^2\sqrt{3}/2 = 15\sqrt{3}$ cm^2.

INTELIGENCIA COLABORATIVA

Física y geometría

Un cuerpo metálico tiene forma y aristas, **l**, como las que se muestran abajo.

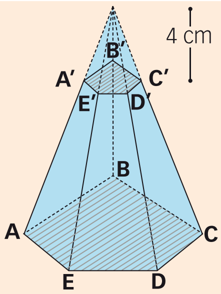


- Busquen una expresión que permita calcular su volumen.
  $\mathbf{V} = (\sqrt{2} + 3\sqrt{3})\,\mathbf{l}^3/12$.
- La densidad del cobre es de 8.80 g/cm^3 y la del latón de 8.55 g/cm^3. ¿De cuál de estos metales está hecha la pieza, si tiene una masa de 462.127 g?
  La pieza es de latón.
- Expliquen qué hicieron para responder.

ACTIVIDADES

5 Observa la figura de la derecha y, luego, resuelve el problema.

- En una empresa metalmecánica se construyen piezas con forma de pirámide truncada, cortando una pirámide de base de 72 cm^2 y altura 12 cm con una cortadora, 4 cm por debajo de su cúspide. ¿Cuál es el área de la sección transversal de la pieza?
  $\mathbf{A'} = 8$ cm^2.



6 Obtén el área y el volumen de un ...

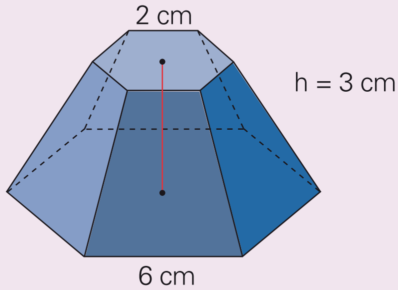
- octaedro de 12.5 cm de arista.
  $\mathbf{A} = 540.625$ cm^2; $\mathbf{V} = 917.969$ cm^3.
- icosaedro de $\sqrt{17}$ cm de arista.
  $\mathbf{A} = 58.82$ cm^2; $\mathbf{V} = 7.99\sqrt{17}$ cm^3.

- **Desarrollo:** Muestre a sus estudiantes, con ejemplos prácticos, los procedimientos para determinar áreas de secciones transversales en pirámides y para determinar el área y el volumen de poliedros regulares. Pídales que realicen las actividades propuestas en el apartado *Inteligencia colaborativa* relacionadas con la Física y la Geometría.
- **Cierre:** Motive a sus estudiantes a realizar los ejercicios del apartado *Actividades*. En la actividad 5, observarán la figura de la derecha y, luego, calcularán el área de la sección transversal de una pieza metálica con forma piramidal cuyas medidas se les indican. En la actividad 6, obtendrán el área y el volumen de un octaedro y un icosaedro cuyas medidas se les especifican.

Actividad grupal

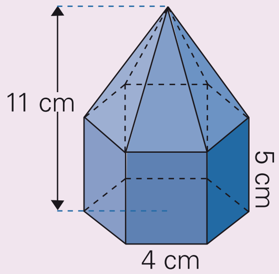
Forme varias agrupaciones de estudiantes y, luego, pídales que calculen:

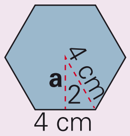
Área total



- Área base menor = 10.38 cm^2.
- Área base mayor = 93.6 cm^2.
- Área de una de las caras laterales = 18.36 cm^2.
- Área total = 10.38 + 93.6 + (6)(18.36) = 214.14 cm^2.

Volumen





- Área de la base = 41.52 cm^2.
- Volumen del prisma = 207.6 cm^3.
- Volumen de la pirámide = 83.04 cm^3.
- Volumen total = 290.64 cm^3.

Ficha 49.

Aprender a aprender

Pregunte al grupo: *¿Les parecieron importantes los conceptos estudiados en esta oportunidad? ¿Qué utilidad para la cotidianidad tienen estos conceptos?*

Competencias

- Comunicativa.
- Usa algoritmos.
- Resolución de problemas.

Indicadores de logro

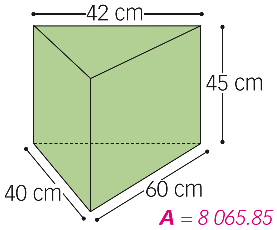
- **Identifica** el concepto de *prisma*, sus elementos y su clasificación. **Determina** el área y el volumen de diversos prismas. **Identifica** el concepto de *pirámide*, sus elementos y su clasificación. **Calcula** el área y el volumen de diversas pirámides. **Identifica** el polígono resultante de la sección transversal de una pirámide. **Determina** el área y el volumen de los poliedros regulares. **Resuelve** problemas del contexto que involucran aplicar el cálculo de área y de volumen de diversos poliedros.

ACTIVIDADES

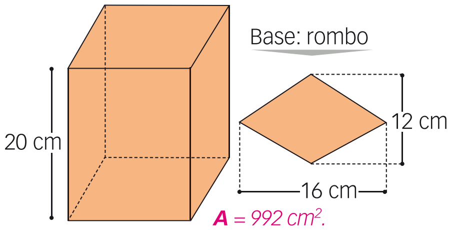
7 Responde las preguntas.

- ¿Cuántas aristas tiene un prisma cuya base es un heptágono? *21 aristas.*
- ¿Cuántos vértices tiene un prisma cuya base es un dodecágono? *24 aristas.*
- ¿Cuántas caras tiene un prisma cuya base es un eneágono? *11 aristas.*
- Los ángulos internos del polígono regular de la base de un prisma miden 156º. ¿Cuántas aristas tiene el prisma? *45 aristas.*

8 Obtén el área total de cada prisma.

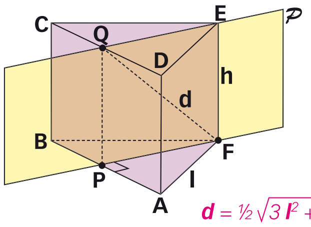


A *= 8 065.85 cm²*.



A *= 992 cm²*.

9 Un plano vertical corta a un prisma recto cuya base es un triángulo equilátero, perpendicularmente a la arista **AB** y por su punto medio, **P**.

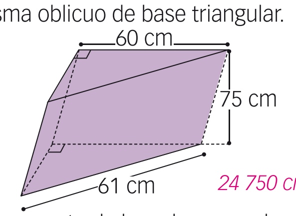


$d = \frac{1}{2}\sqrt{3l^2 + 4h^2}$

- Encuentra una expresión para la longitud, **d**, del segmento $\overline{QF}$ en función de **l** y **h**.
- ¿Qué longitud tendrá $\overline{QF}$ si **l** = 10″ y **h** = 6″. ***d*** *≈ 10.54″.*

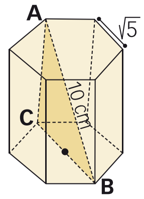
10 Obtén el volumen de cada prisma.

- Prisma oblicuo de base triangular.



24 750 cm³.

- Prisma recto de base hexagonal regular.

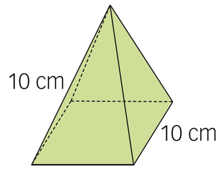


116 19 cm³.

11 Responde las preguntas.

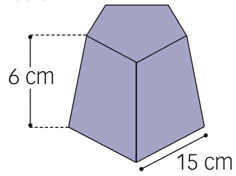
- ¿Cuántos vértices tiene una pirámide cuya base es un decágono? *11 vértices.*
- ¿Cuántas aristas tiene una pirámide oblicua cuya base es un decágono? *22 aristas.*
- La suma de los ángulos internos del polígono de la base de una pirámide es de 1 080º. ¿Cuántas caras tiene la pirámide? *9 caras.*

12 Obtén el área y el volumen de la pirámide recta de base cuadrada y cuyas aristas son todas de igual longitud, 10 cm.
A *= 273.21 cm²;* ***V*** *= 235.70 cm³.*



13 Obtén el volumen del tronco de pirámide de apotemas basales de 10.32 cm y 4.13 cm.

V *= 1 207.58 cm³.*



Competencias específicas

Competencia comunicativa

Es necesario que los estudiantes adquieran las habilidades para identificar y clasificar diversas clases de prismas y pirámides, además, calcular el área y el volumen de poliedros diversos, y que al mismo tiempo puedan desarrollar las competencias comunicativas que les permitan expresar estos conocimientos.

Usa algoritmos

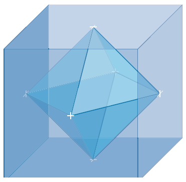
Las reglas y procedimientos en la resolución de operaciones aritméticas son vitales para la persecución de resultados correctos. Por ejemplo, en las operaciones que involucran los pasos para calcular el área y el volumen de prismas y pirámides.

Sugerencias didácticas

- Las actividades propuestas en esta página están estrechamente vinculadas a los conceptos y procedimientos desarrollados a lo largo de la unidad. Haga que lean cuidadosamente las instrucciones y, después, verifique las respuestas obtenidas.
- Es importante observar de cerca que los estudiantes calculan correctamente el área y el volumen de los cuerpos geométricos estudiados en la unidad.

14 Lee y, luego, haz lo que se te pide.

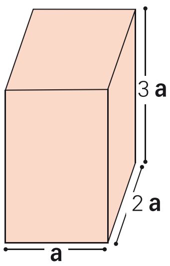
El poliedro dual o conjugado de un poliedro regular dado es el poliedro cuyos vértices son los centros del poliedro dado.



- La estructura microscópica de un cristal muestra una forma cúbica y en su interior un octaedro regular dual del cubo. Las aristas del cubo miden 10 µm.
  - ¿Cuánto miden las aristas del octaedro? *$l = ½ L\sqrt{2}$.*
  - ¿Cuántas veces mayor es la superficie del cubo de su poliedro dual? *$2\sqrt{3}$ veces.*

15 Resuelve el problema.

Se quiere construir una caja en forma de prisma recto rectangular de área 2 200 cm². Las aristas de la caja deben cumplir con la condición de que dos de ellas son el doble y el triplo de la menor. ¿Qué volumen tendrá la caja una vez construida?

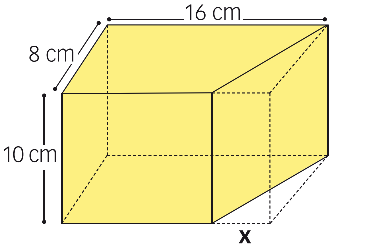


V = 6 000 cm³.

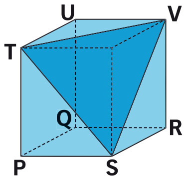
16 Resuelve el problema.

Se construirá una pieza de 674.17 cm² de área total a partir de un prisma de madera de base rectangular, cortándolo como se muestra en la figura siguiente. ¿Cuántos centímetros deben rebajarse a las aristas horizontales de la cara frontal del prisma original?

x = 5.29 cm.



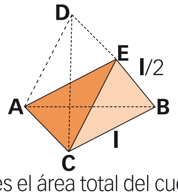
17 Observa la figura y, luego, haz lo que se te pide.



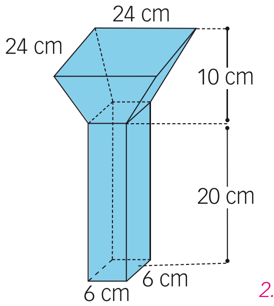
- Describe, en tu cuaderno, un procedimiento para calcular el área del poliedro que resulta de eliminar la pirámide regular **STVW** del cubo **PQRSTUVW**. *$A = ½ (9 + \sqrt{3})\, l^2$.*
- Determina el área del poliedro **PQRSTUV** si la arista del cubo es de 10 cm. *A = 536.60 cm².*
- Obtén el volumen del poliedro **PQRSTUV**, sabiendo que la apotema de un triángulo equilátero de lado **l** es **l**$\sqrt{3}/6$. *V = 764.30 cm³.*
- Socializa tus resultados en el aula.

18 Resuelve los problemas.

- Si $\overline{EB}$ = 1/2 **l**, ¿cuál es el área de **AEC** expresada en función de la longitud **l**? NOTA: $\overline{AE} = \overline{CE}$ = ½ $\sqrt{3}$ **l**. *$A = l^2\sqrt{2}/4$.*



  - ¿Cuál es el área total del cuerpo, si su arista **l** mide 1.2 cm? *A = 1.756 cm².*
- Determina la capacidad, en litros, del recipiente que se muestra a continuación.



2.52 L.

Competencias fundamentales

Pensamiento lógico, creativo y crítico

Los conocimientos adquiridos por por los estudiantes son necesarios para identificar las alternativas más convenientes en la persecución de la solución de problemas que forman parte de su diario vivir. En este aspecto radica la importancia de que adquieran las destrezas necesarias para resolver problemas que involucren los conceptos y procedimientos estudiados en la unidad.

Criterios de evaluación

Competencia comunicativa:

- Adaptación de las representaciones gráficas, simbólicas y numéricas a la situación de comunicación.

Competencia algoritmo:

- Seguimiento de las reglas, instrucciones y procedimientos.

Competencia pensamiento lógico, creativo y crítico

- Selecciona una estrategia, la aplica y evalúa su efectividad.

Sugerencias didácticas

Resolución de problemas

- Proponga a sus estudiantes que lean detenidamente las instrucciones de los problemas propuestos en las actividades 14, 15, 16, 17 y 18. Estos problemas son aplicaciones del cálculo de área y volumen de poliedros diversos. Acompañe a sus estudiantes en la realización de estas actividades y ofrézcales las orientaciones necesarias.

Aprender a aprender

Motive a sus estudiantes para que inventen ejemplos de las aplicaciones cotidianas de los conceptos desarrollados en la unidad. Por ejemplo, pregunte al grupo: *¿Qué pasos deben seguir para calcular el volumen de un recipiente de forma de pirámide truncada?* Discuta las diversas respuestas con el grupo.

Indicadores de logro de la evaluación

- **Identifica** el concepto de *prisma*, sus elementos y su clasificación. **Determina** el área y el volumen de diversos prismas. **Identifica** el concepto de *pirámide*, sus elementos y su clasificación. **Calcula** el área y el volumen de diversas pirámides. **Identifica** el polígono resultante de la sección transversal de una pirámide. **Determina** el área y el volumen de los poliedros regulares. **Resuelve** problemas del contexto que involucran aplicar el cálculo de área y de volumen de diversos poliedros. **Utiliza** recursos virtuales y electrónicos: computadora, softwares educativos, juegos interactivos y otros, en la búsqueda de información.

Competencias específicas

- Comunica.
- Razona y argumenta.
- Modela y representa.
- Usa algoritmos.
- Conecta.
- Resuelve problemas.

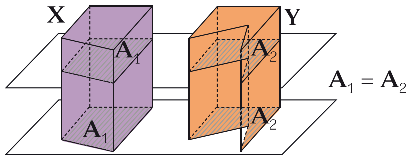
Aprender a aprender

Pregunte al grupo: *¿Qué pasos deben dar para calcular el volumen de una caja de galletas con forma de pirámide truncada? ¿Qué medidas de esta pirámide deben conocer?*

EVALUACIÓN

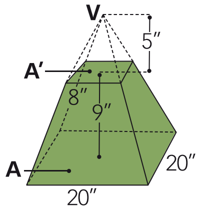
Comunica

19 Enuncia la igualdad de volúmenes de los cuerpos de igual altura.



Razona y argumenta

20 Observa la figura y, luego, responde.



- ¿Por qué hay un error en la medida 5″ de la distancia de la sección de área **A′** al punto **V**? *Porque: 10/14 ≠ 4/5.*
- ¿Qué valor debería tener esa distancia? *6″.* *10/15 = 4/6 = 0.666.*

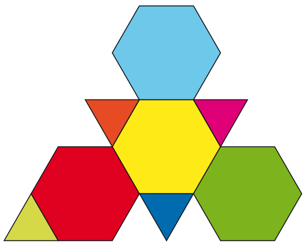
21 Infiere, a partir de las expresiones del *Saber más* de la página 165, la siguiente expresión, válida para poliedros regulares.

$$\frac{1}{\mathbf{n_l}} + \frac{1}{\mathbf{n_a}} = \frac{1}{2} + \frac{2}{\mathbf{A}}$$

NOTA: $\mathbf{n_l}$ es el número de lados del polígono de las caras; $\mathbf{n_a}$, el número de aristas que llega a un vértice y **A**, el de caras del poliedro.

Modela y representa

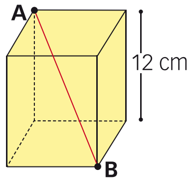
22 Copia la red, construye el cuerpo e infiere una expresión para calcular su área.



Usa algoritmos

23 Obtén el área total del prisma de base cuadrada siguiente.

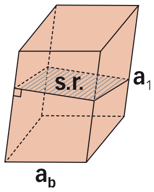
$\overline{\mathbf{AB}} = \sqrt{194}$ cm.



$\mathbf{A}$ = 290 cm².

24 Lee y, luego, haz lo que se te pide.

La sección recta del prisma oblicuo es la región poligonal determinada por un plano que lo corta perpendicularmente a cualquiera de sus aristas laterales.

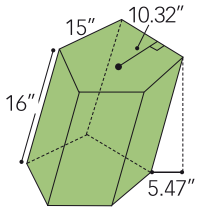


Su área total se calcula con:

$$\mathbf{A_t} = 2\mathbf{A_b} + \mathbf{P_{sr}}\ \mathbf{a_l}$$

- Calcula el área total de un prisma oblicuo de base cuadrada de arista basal de 10 cm y arista lateral de 18 cm. El perímetro de su sección recta, $\mathbf{P_{sr}}$, es de 37.32 cm. *$\mathbf{A}$ = 871.76 cm².*

25 Determina el volumen del prisma oblicuo de base pentagonal regular. *$\mathbf{V}$ = 5 818.9 pulg³.*



Conecta

26 Resuelve el problema.

El pedestal en que se colocará una estatua conmemorativa tiene forma de pirámide truncada de bases hexagonales. Si la altura del pedestal es de 3 m y las áreas de sus bases miden, la mayor 23.4 m² y la menor 13.8 m², ¿cuál es el volumen del pedestal? *$\mathbf{V}$ = 55.17 m³.*

Sugerencias didácticas para la evaluación

- Es importante verificar, antes de dar inicio a las actividades de evaluación, que sus estudiantes identifican y clasifican los poliedros estudiados en la unidad, que calculan el área de secciones transversales en pirámides. Observe que determinan correctamente el área y el volumen de poliedros diversos.

SABER HACER

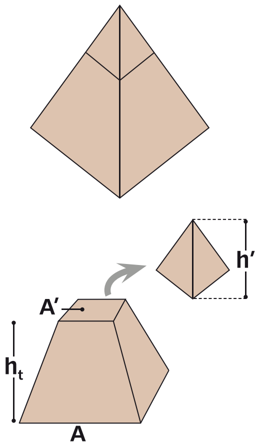
27 **Resolución de problemas**. Lean el texto y, luego, respondan.

Un artesano quiere construir piezas de madera en forma de pirámide truncada de base cuadrada. Para construirlas, corta una pirámide pequeña a una pirámide grande inicial, de altura **h**. Quiere saber qué altura, **h'**, dará a la pirámide pequeña que debe cortar, para que el área, **A'**, de la base menor de la pirámide truncada sea la mitad del área de su base mayor, **A**. El problema lo tiene ocupado, sin que haya podido resolverlo satisfactoriamente.

- ¿Cómo podrían ayudar al artesano a resolver el problema?
- ¿Qué solución encontraron y cómo la comprueban? $h' = h/\sqrt{2}$.

- Demuestren que la altura, h_t, de un tronco de pirámide se relaciona con la altura, **h'**, de la pequeña pirámide mediante:

$$h_t = \frac{(\sqrt{A}-\sqrt{A'})h'}{A'}$$



28 Responde las preguntas.

- ¿Qué importancia tiene la geometría en los oficios y profesiones dedicados a la construcción? Da ejemplos.
- ¿Cómo la geometría ayuda al necesario rigor de los proyectos de construcción y a su seguridad?

APRENDIZAJE AUTÓNOMO

29 Marca según tus logros.

	Iniciado	En proceso	Logrado
• Identifico distintas clases de prisma.			
• Obtengo áreas y volúmenes de prismas diversos.			
• Reconozco distintas clases de pirámide.			
• Calculo áreas y volúmenes de pirámides diversas.			
• Calculo el área y el volumen de una pirámide truncada.			
• Determino áreas y volúmenes de poliedros regulares .			

30 Reflexiona sobre tu aprendizaje.

- ¿Cómo calificas tu trabajo con los contenidos estudiados?
- ¿Trabajaste con entusiasmo y dedicación? ¿Por qué?

Sugerencias didácticas para la evaluación

- Pregunte a sus estudiantes:
  - — *¿Cuáles son los elementos de un prisma?*
  - — *¿Cuáles son los elementos de una pirámide?*
  - — *¿Cuáles son los cinco poliedros regulares?*
  - — *¿Cómo se determinan el área y el volumen de un prisma recto?*
  - — *¿Cómo se determinan el área y el volumen de una pirámide?*

Saber hacer

En la actividad 27, *Saber hacer*, se aplica la estrategia de evaluación *Resolución de problemas*. Formados en grupos, leerán y comentarán el problema planteado. En este caso, describirán cómo podrían ayudar al artesano a construir una pieza de metal de forma de pirámide truncada como se muestra en la ilustración de la derecha. Después, expresarán qué solución encontraron y, finalmente, demostrarán que la altura de un tronco de pirámide se relaciona con la pequeña pirámide mediante la expresión indicada.

Actitudes y valores

Trabajo

En la sección destinada a *Actitudes y valores*, actividad 28, responderán qué importancia tiene la Geometría en los oficios y profesiones dedicados a la construcción. Darán ejemplos. Expresarán cómo la Geometría ayuda al necesario rigor de los proyectos de construcción y a su seguridad.

Aprendizaje autónomo

En el apartado *Aprendizaje autónomo*, actividad 29, evaluarán por ellos mismos si los conceptos y procedimientos que trabajaron en la unidad se encuentran en estado de iniciación, en proceso o logrado. En la actividad 30, reflexionarán sobre su proceso de aprendizaje.

Aprender a aprender

Haga que sus estudiantes apliquen los conceptos aprendidos en la unidad en situaciones de la cotidianidad, por ejemplo, pregunte: *¿Cuáles son los pasos para reproducir una pieza de cartón con forma de un tetraedro?*

10 Cuerpos redondos: área y volumen

Propuesta de programación

COMPETENCIAS	CONTENIDOS
Específicas • **Razona y argumenta**: **Clasifica** los cuerpos geométricos redondos y **establece** los pasos para encontrar su área y su volumen. **Establece** relación y diferencia entre los distintos elementos de una esfera. • **Comunica**: **Expresa** con la notación adecuada las experiencias con el cálculo de área y volumen de cuerpos redondos que ha experimentado en su diario vivir. • **Modela y representa**: **Representa** situaciones de la cotidianidad usando cuerpos redondos y sus propiedades. • **Usa algoritmos**: **Sigue** las reglas que le permiten obtener un resultado al resolver problemas que involucran el cálculo de área y de volumen de diversos cuerpos redondos. • **Conecta**: **Construye** y **resuelve** problemas relacionados con la vida cotidiana que involucran cuerpos redondos. • **Resuelve problemas**: **Resuelve** problemas que involucran el cálculo de área y de volumen de diversos cuerpos geométricos redondos. • **Utiliza herramientas tecnológicas**: **Utiliza** soportes tecnológicos como la Internet, la calculadora científica y otros dispositivos. **Fundamentales** **Resolución de problemas**: **Identifica** y **utiliza** estrategias, y **genera** alternativas de solución**.**	**Conceptos** • El cilindro. • El cono. • La esfera. • Secciones de la esfera. • Esferas tangentes entre sí. • Cuerpos compuestos. **Procedimientos** • Identificación y clasificación de los cilindros y cálculo de sus áreas y volúmenes. • Identificación y clasificación de los conos y cálculo de sus áreas y volúmenes. • Cálculo del área y el volumen de una esfera. • Reconocimiento de secciones de una esfera y cálculo de áreas y volúmenes. • Identificación de las posiciones relativas de dos esferas. • Cálculo del área y el volumen de cuerpos geométricos compuestos diversos. **Actitudes y valores** • Valoración del saber científico. • Apreciación de la búsqueda de la verdad.

Tiempo estimado de trabajo: 2 semanas

INDICADORES DE LOGRO

- **Identifica** el concepto general de *cilindro*.
- **Identifica** el concepto de *cilindro circular* y su clasificación.
- **Calcula** el área y el volumen del cilindro circular.
- **Identifica** el concepto general de *cono*.
- **Identifica** el concepto de *cono circular* y su clasificación.
- **Calcula** el área y el volumen del cono circular.
- **Identifica** el concepto general de *esfera*.
- **Calcula** el área y el volumen de la esfera.
- **Reconoce** los conceptos de *casquete*, *segmento*, *cuña* y *sector esféricos*.
- **Calcula** el área y el volumen de secciones de la esfera.
- **Identifica** las diferentes posiciones relativas de dos esferas.
- **Identifica** esferas inscrita y circunscrita en un poliedro.
- **Identifica** el concepto general de *cuerpos compuestos* y **calcula** su área y su volumen.
- **Resuelve** problemas del contexto que involucran el cálculo de área y de volumen de cuerpos redondos.
- **Utiliza** recursos virtuales y electrónicos: computadora, softwares educativos, juegos interactivos y otros, en la búsqueda de información.

Valor transversal: Ciencia y tecnología

Recursos digitales

Plataforma digital

CD

BIBLIOTECA DEL DOCENTE

- DOCUMENTOS PARA LA PLANIFICACIÓN
- EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA
- GUÍA DE RECURSOS TIC

CUADERNO DE ACTIVIDADES

UNIDAD 10	Cuerpos redondos: área y volumen

RECURSOS DE REFUERZO Y AMPLIACIÓN

LibroMedia

ACTIVIDADES INTERACTIVAS

PÁGINA 173	Cuerpos redondos.
PÁGINA 176	Áreas de cuerpos redondos.
PÁGINA 180	Volumen de cuerpos redondos.

CD DE RECURSOS DIGITALES: PLAN REGULAR

Pleno — PRUEBA DE EVALUACIÓN FORMATIVA DE LA UNIDAD

Estrategias pedagógicas

- Recuperación de experiencias previas.
- Trabajo en equipo.
- Aprendizaje basado en problemas (ABP).

Unidad 10

- **Lee** y **comenta** las informaciones expuestas en el apartado *Punto de partida*.
- **Responde** preguntas relacionadas con las informaciones expuestas en el apartado *Punto de partida*.
- **Recupera** experiencias vividas mediante la observación de las imágenes de la ilustración.
- **Analiza** un problema de la vida cotidiana vinculado a los conceptos y procedimientos que desarrollarán en la unidad, en el apartado *Analiza el problema*.
- **Plantea** soluciones al problema leído y analizado anteriormente, en el apartado *Plantea una solución*.

Apertura de la unidad

Dentro de los objetivos principales de la apertura de esta unidad se encuentran el plantear una situación de aprendizaje, una problemática o un texto que sirve para contextualizar el tema de la unidad. Todo esto con la finalidad de motivar y despertar la curiosidad de los estudiantes.

A partir de la situación o texto planteado, el problema a analizar y las imágenes de la ilustración se conecta al estudiante con el tema a tratar, a la vez que vincula con la realidad o cotidianidad los temas que se van a desarrollar.

Todos los elementos que conforman la portada promueven la recuperación de experiencias o conocimientos previos y la motivación o el interés por los conocimientos que adquirirán en la unidad.

10 Cuerpos redondos: área y volumen

Conceptos

- El cilindro
- El cono.
- La esfera.
- Secciones de la esfera.
- Esferas tangentes entre sí.
- Cuerpos compuestos.

Procedimientos

- Construcciones geométricas.
- Resolución de problemas.

Actitudes y valores

- Valoración del saber científico.
- Aprecio por la búsqueda de la verdad.

Dibujo de Hildegarda de Bingen. Representación medieval de la Tierra esférica, centro del cosmos.

Punto de partida

¿Qué forma tiene la Tierra en que habitamos? Esta pregunta ocupó por largo tiempo a las mentes más brillantes de la humanidad. Se le dieron respuestas muy distintas. Para los antiguos habitantes de Mesopotamia, el mundo era un círculo plano, cubierto por una bóveda semiesférica en donde se movían los astros. Este disco flotaba sobre un océano caótico y oscuro.

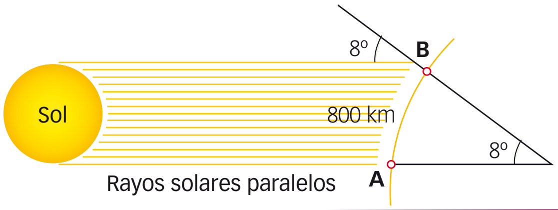
Los griegos, con escasas excepciones, sostuvieron la idea de que la Tierra era una esfera y entre ellos, Eratóstenes, en el siglo III antes de la era común, midió su circunferencia empleando conceptos y procedimientos de la geometría. Un siglo antes, Aristóteles había sostenido la esfericidad de la Tierra basándose en observaciones astronómicas.

Contrariamente a lo que sostienen algunos, la imagen de la esfera de la Tierra fue mayoritaria entre los pensadores desde que fuera sostenida por los griegos antiguos.

- ¿Qué fenómenos del entorno te permiten inferir la forma esférica de la Tierra?

ANALIZA EL PROBLEMA

La distancia entre dos ciudades, **A** y **B**, es de 800 km. A mediodía, los rayos del Sol caen verticalmente sobre la ciudad **A** y a esa misma hora, forman un ángulo de 8º con respecto a una línea vertical que pasa por la ciudad **B**. Los rayos solares se consideran paralelos. ¿Cuánto mide la circunferencia de la Tierra? *36 000 km.*



Trabajo colectivo de apertura

- **Punto de partida:** Guíe a sus estudiantes a leer y comentar en el grupo las informaciones expuestas en el apartado *Punto de partida*, que refiere la historia de las diversas teorías de la forma de la Tierra, desde los planteamientos de los antiguos habitantes de Mesopotamia hasta los pensadores griegos que descubrieron la forma esférica de la misma.
- **Analiza el problema:** Se toma como referencia la distancia entre dos ciudades, la posición vertical de los rayos del Sol sobre una de ellas y el ángulo que forman los rayos con respecto a una línea vertical que pasa por la ciudad, para determinar cuánto mide la circunferencia de la Tierra.
- **Plantea una solución:** En este apartado analizarán el problema planteado en la sección anterior, responderán preguntas y, luego socializarán la solución del mismo en el aula.

Imagen de la Tierra desde el espacio. Se destaca su redondez.

Astrólogo. Grabado de Alberto Durero (1504).

PLANTEA UNA SOLUCIÓN

- Observa la ilustración del problema de la página anterior, piensa y, luego, responde.
  - ¿Dispones de los datos que te permiten resolver el problema?
  - ¿Cuáles son esos datos? Señálalos sobre la ilustración.

    *La distancia **AB** = 800 km y el ángulo de 8°, que forman los rayos solares con la vertical.*
  - ¿Por qué es importante asumir que los rayos solares llegan perpendicularmente a la superficie terrestre?

    *Permite igualar los ángulos correspondientes e inferir que **x** mide 8°.*
- Construye una estrategia para abordar la resolución del problema y, luego, descríbela. *Circunferencia/**AB** = 360°/8°; **C** = 36 000 km.*
- Socializa tu solución al problema en el aula.

Esquema conceptual de la unidad

Cuerpos redondos: área y volumen

Son objeto de estudio de la Geometría los

Cuerpos redondos

- *que se clasifican en*
  - El cilindro
  - El cono
  - La esfera
    - Esferas tangentes entre sí
    - Secciones de la esfera
- *a los que se calcula su*
  - Área y volumen

Actividad de motivación

Pida a sus estudiantes que lean en la sección: *Conceptos y procedimientos*, los temas que trabajarán en la unidad y las actitudes y valores que estarán presentes en el desarrollo de la misma. Luego, para que interioricen la importancia de conocer los conceptos relacionados con los cuerpos redondos y el cálculo de su área y su volumen, formúleles preguntas como las siguientes: *¿Cómo se clasifican los cuerpos redondos? ¿Cuáles son las características de los cuerpos redondos? ¿Qué dimensiones se requieren para determinar el área de un cuerpo redondo? ¿Y para determinar el volumen?*

Actividad interactiva

Cuerpos redondos

Esta es una actividad interactiva de recuperación de experiencias, en la que identificarán los elementos de los cuerpos geométricos redondos y, después, arrastrarán cada parte a su cuerpo correspondiente.

Actitudes y valores

Ciencia y tecnología

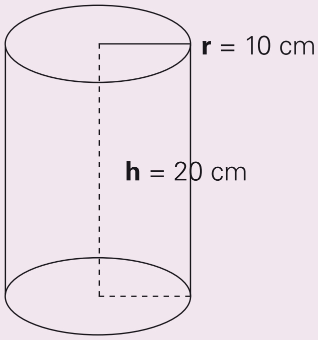
Aproveche la situación planteada en el apartado *Punto de partida* y en las imágenes de la ilustración para conversar con sus estudiantes acerca de la importancia de las investigaciones científicas para la evolución y el desarrollo de las sociedades. Pregunte al grupo: *¿Qué invenciones tecnológicas facilitaron el descubrimiento de la forma de la Tierra y los demás planetas? ¿Creen que los inventos y descubrimientos han hecho más fácil la vida de los seres humanos? ¿Por qué?*

Indicadores de logro

- **Identifica** el concepto general de *cilindro*.
- **Identifica** el concepto de *cilindro circular* y su clasificación.
- **Calcula** el área y el volumen del cilindro circular.

Otras actividades

Proponga a sus estudiantes que calculen el área total y el volumen de los siguientes cilindros representados.

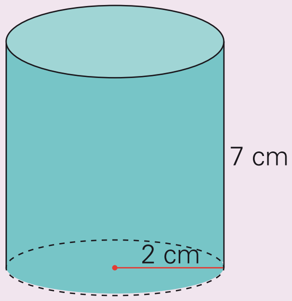


$\mathbf{A}_t = (2)\ (3.1416)\ (10)\ (20 + 10).$

$\mathbf{A}_t = 1\,884.96\ \text{cm}^2.$

$\mathbf{V} = (3.1416)\ (10)^2\ (20).$

$\mathbf{V} = 6\,283.2\ \text{cm}^3.$



$\mathbf{A}_t = (2)\ (3.1416)\ (2)\ (2 + 7).$

$\mathbf{A}_t = 113.10\ \text{cm}^2.$

$\mathbf{V} = (3.1416)\ (2)^2\ (7).$

$\mathbf{V} = 87.96\ \text{cm}^3.$

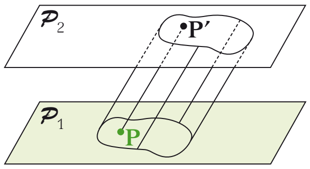
RECUPERACIÓN

Responde.

- ¿Qué características tienen en común un prisma y un cilindro?

1 Concepto general de cilindro

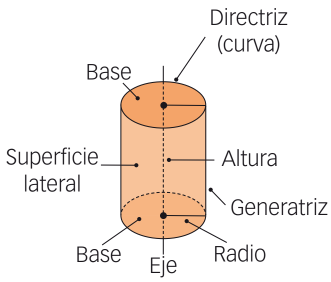
Un cilindro es la unión de los segmentos paralelos de extremos **P** y **P'**, que pertenecen a regiones curvas planas y cerradas de dos planos, $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$, paralelos y no coincidentes.



Si $\overline{P_1\,P'_1}$, $\overline{P_2\,P'_2}$, … son segmentos que cumplen la condición anterior, un cilindro $\mathcal{C}$ es tal que: $\mathcal{C} = \overline{P_1\,P'_1} \cup \overline{P_2\,P'_2} \cup \ldots$

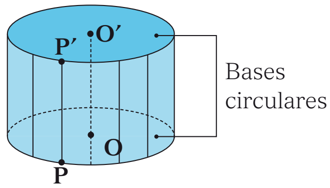
Las regiones curvas planas y cerradas de $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$ son congruentes y paralelas por pertenecer a planos paralelos. Estas regiones planas son las bases del cilindro. El cilindro, además de sus bases planas, tiene una superficie lateral curva.

Elementos del cilindro



2 Cilindro circular. Clasificación

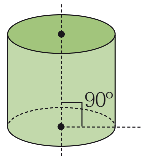
Si la región curva plana de las bases del cilindro es circular tendremos un cilindro circular.



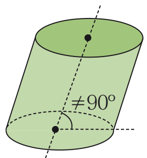
El eje de un cilindro es el segmento que une los centros de los círculos que son sus bases.

Un cilindro recto es tal que su eje es perpendicular a los planos paralelos que contienen sus bases.

Un cilindro oblicuo es tal que su eje no es perpendicular a los planos que contienen sus bases.



Cilindro circular recto



Cilindro circular oblicuo

Sugerencias didácticas

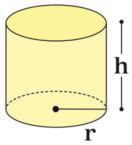
- **Inicio:** Oriente a sus estudiantes para que lean y respondan la pregunta vinculada a la recuperación de experiencias previas planteada en el apartado *Recuperación*, en la que expresarán qué características tienen en común un prisma y un cilindro.
- **Desarrollo:** Pídales que lean cuidadosamente el contenido de la doble página, que observen las representaciones gráficas y el desarrollo de los conceptos. Pídales que observen los elementos del cilindro en el margen izquierdo de la página. Haga que reproduzcan los ejemplos resueltos en sus cuadernos.

3 Área y volumen de un cilindro circular recto

El área total de un cilindro circular recto es la suma de las áreas de sus bases y de su superficie lateral.

Si **r** es el radio de la base y **h** su altura, el área total del cilindro, $\mathbf{A_t}$, se obtiene con la expresión siguiente:

$$\mathbf{A_t} = 2\pi\mathbf{r}\,(\mathbf{r} + \mathbf{h})$$



El volumen del cilindro circular recto es el producto del área de una de sus bases y su altura.

De acuerdo a lo anterior: $\mathbf{V} = \pi\mathbf{r}^2\,\mathbf{h}$

La expresión anterior para calcular el volumen de un cilindro circular es válida, como se deduce del principio de Cavalieri, tanto cilindros rectos como oblicuos.

Si un plano corta no paralelamente a su base a un cilindro, el cuerpo que resulta es un cilindro truncado, que puede ser recto u oblicuo.

EJEMPLO RESUELTO:

- Obtener el área total y el volumen de un cilindro circular de diámetro de 18 cm y altura 15 cm.

  Aquí: $2\mathbf{r} = 18$ cm $\longrightarrow \mathbf{r} = \frac{1}{2}(18 \text{ cm}) = 9$ cm; $\mathbf{h} = 15$ cm.

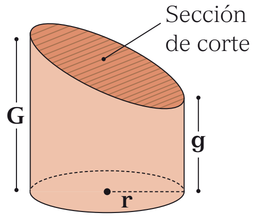
  Luego: $\mathbf{A_t} = 2\pi\mathbf{r}(\mathbf{r} + \mathbf{h}) = 2\pi(9 \text{ cm})(9 \text{ cm} + 15 \text{ cm}) = 432\,\pi \text{ cm}^2$.

  $\mathbf{V} = \pi\mathbf{r}^2\mathbf{h} = \pi(9 \text{ cm})^2(15 \text{ cm}) = 1\,215\,\pi \text{ cm}^3$.

Si el cilindro truncado es recto y de base circular, como el de la figura de la derecha, su volumen se calcula con la expresión siguiente:

$$\mathbf{V} = \frac{1}{2}\pi\mathbf{r}^2(\mathbf{G} + \mathbf{g})$$

Cilindro circular recto truncado

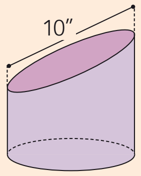


G es la generatriz mayor y **g**, la generatriz menor del cilindro truncado.

ACTIVIDADES

1 Determina lo que se te indica.

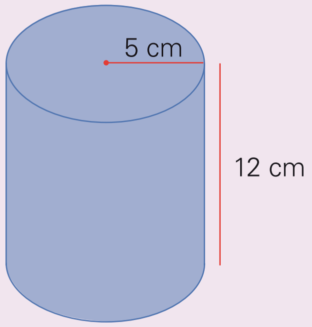
- El área total de un cilindro circular recto de 8 cm de radio y 12 cm de altura. ***A** = 320 π cm².*
- El volumen de un cilindro circular oblicuo de diámetro 10 cm y altura 22 cm. ***V** = 550 π cm³.*
- El volumen del cilindro circular truncado de la derecha, cuyo radio de la base mide 4" y su generatriz menor, 3". ***V** = 96 π pulg³.*



- **Desarrollo:** Muéstreles los conceptos desarrollados en la doble página con sus representaciones gráficas correspondientes. Diseñe ejercicios adicionales similares a los vistos en estas páginas en los que calculen el área y el volumen de diversos cilindros. Pídales que observen el cilindro circular recto truncado y que lean la información al pie de la imagen.
- **Cierre:** Motive a sus estudiantes a realizar los ejercicios del apartado *Actividades*. En la actividad 1, determinarán el área total y el volumen de los cilindros cuyas medidas se les especifican y, además, calcularán el volumen del cilindro circular truncado representado en el margen derecho de esta página.

Atención a la diversidad

Actividades de refuerzo: Proponga a sus estudiantes que calculen el área total y el volumen de los siguientes cilindros representados.

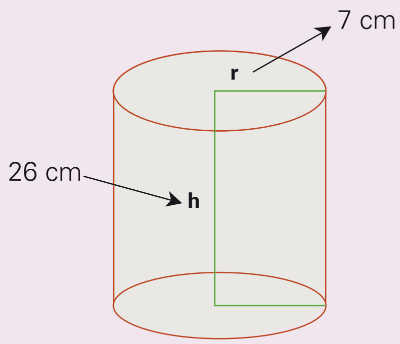


$A_t = (2)\,(3.1416)\,(5)\,(5 + 12)$.

$A_t = 534.07 \text{ cm}^2$.

$V = (3.1416)\,(5)^2\,(12)$.

$V = 942.48 \text{ cm}^3$.



$A_t = (2)\,(3.1416)\,(7)\,(7 + 26)$.

$A_t = 1\,451.42 \text{ cm}^2$.

$V = (3.1416)\,(7)^2\,(26)$.

$V = 4\,002.40 \text{ cm}^3$.

Ficha 50.

Aprender a aprender

Pregunte a sus estudiantes: *¿Qué conocimientos previos sobre el cilindro y sus propiedades recuerdan? ¿Creen que esos conocimientos facilitaron el trabajo? ¿Por qué?*

Indicadores de logro

- **Identifica** el concepto general de *cono*.
- **Identifica** el concepto de *cono circular* y su clasificación.
- **Calcula** el área y el volumen del cono circular.

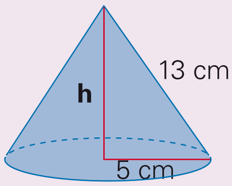
Actividad interactiva

Áreas de cuerpos redondos

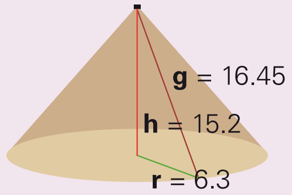
Actividad interactiva en la que completarán expresiones relacionadas con las características de cuerpos redondos y el cálculo de sus áreas. Seleccionarán las opciones correctas.

Otras actividades

Proponga a sus estudiantes que calculen el área total y el volumen de los siguientes conos representados.



$\mathbf{h}^2 = 13^2 - 5^2$
$\mathbf{h}^2 = 169 - 25$
$\mathbf{h} = \sqrt{144}$; $\mathbf{h} = 12$
$\mathbf{A}_t = \boldsymbol{\pi}\mathbf{r}\ (\mathbf{r} + \mathbf{g})$
$\mathbf{A}_t = (3.1416)\ (5)\ (5 + 13)$
$\mathbf{A}_t = 282.74\ \text{cm}^2.$
$\mathbf{V} = \boldsymbol{\pi}\mathbf{r}^2\ \text{h} \div 3$
$\mathbf{V} = (3.1416)\ (5)^2\ (12) \div 3$
$\mathbf{V} = 314.16\ \text{cm}^3.$



$\mathbf{A}_t = \boldsymbol{\pi}\mathbf{r}\ (\mathbf{r} + \mathbf{g})$
$\mathbf{A}_t = (3.1416)\ (6.3)\ (6.3 + 16.45)$
$\mathbf{A}_t = 450.27\ \text{cm}^2.$
$\mathbf{V} = \boldsymbol{\pi}\mathbf{r}^2\ \mathbf{h} \div 3$
$\mathbf{V} = (3.1416)\ (6.3)^2\ (15.2) \div 3$
$\mathbf{V} = 631.76\ \text{cm}^3.$

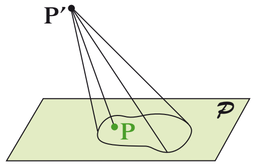
RECUPERACIÓN

Responde.

- ¿Qué características tienen en común una pirámide y un cono?

1 Concepto general de cono

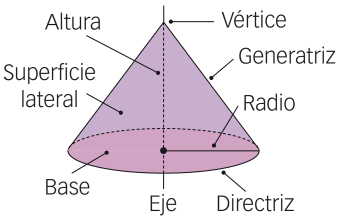
Un cono es la unión de los segmentos de extremos, **P**, que pertenecen a una región curva cerrada de un plano $\mathcal{P}$ y **P'**, un punto común a todos los segmentos y en el exterior de $\mathcal{P}$, llamado vértice.



Si $\overline{P_1P'}$, $\overline{P_2P'}$, … son segmentos que cumplen la condición anterior, un cono $\mathcal{C}$ es tal que: $\mathcal{C} = \overline{P_1P'} \cup \overline{P_2P'} \cup \ldots$

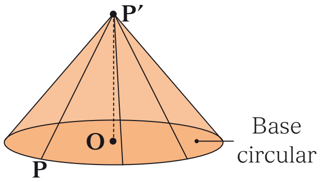
La región curva plana y cerrada de $\mathcal{P}$ es la base del cono. El cono además de su base plana tiene una superficie lateral curva.

Elementos del cono



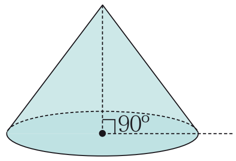
2 Cono circular. Clasificación

Si la región curva plana de la base del cono es circular tendremos un cono circular.

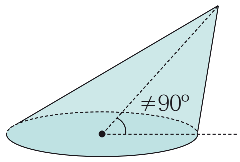


En un cono recto el segmento que une el centro de su base con su vértice es perpendicular al plano que contiene a su base.

En un cono oblicuo el segmento que va del centro de su base al vértice no es perpendicular al plano de la base.



Cono circular recto



Cono circular oblicuo

El eje de un cono recto es el segmento que tiene como extremos el centro del círculo que es su base y el vértice.

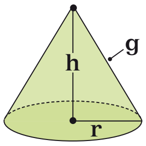
Sugerencias didácticas

- **Inicio:** Oriente a sus estudiantes para que lean y respondan la pregunta vinculada a la recuperación de experiencias previas formulada en el apartado *Recuperación*, en la que expresarán qué características tienen en común una pirámide y un cono.
- **Desarrollo:** Pida a sus estudiantes que lean cuidadosamente el contenido de la doble página, que observen las representaciones gráficas y el desarrollo de los conceptos. Pídales que observen los elementos del cono en el margen izquierdo de la página. Haga que reproduzcan los ejemplos resueltos en sus cuadernos.

3 Área y volumen un cono circular recto

El área total de un cono circular recto es la suma de las áreas de su base y de su superficie lateral.

Si **r** es el radio de la base y **g** su generatriz, el área total del cono, $\mathbf{A_t}$, se obtiene con la expresión siguiente:



$\mathbf{A_t} = \pi\mathbf{r}\,(\mathbf{r} + \mathbf{g})$

El volumen del cono circular recto es un tercio del producto del área de su base y su altura.

De acuerdo a lo anterior: $\mathbf{V} = \pi\mathbf{r}^2\,\mathbf{h}/3$

La expresión anterior para calcular el volumen de un cono circular recto es también válida, como vimos en el caso del cilindro, para el cono circular oblicuo.

EJEMPLO RESUELTO:

- Obtener el área total y el volumen de un cono circular recto de generatriz de 15 cm y diámetro 20 cm.

  Aquí: $\mathbf{r} = \frac{1}{2}(20\text{ cm}) = 10\text{ cm}$; $\mathbf{g} = 15\text{ cm}$; $\mathbf{h} = \sqrt{15^2 - 10^2} = 5\sqrt{5}\text{ cm}$.

  Luego: $\mathbf{A_t} = \pi\mathbf{r}(\mathbf{r} + \mathbf{g}) = 2\pi(10\text{ cm})(10\text{ cm} + 15\text{ cm}) = 500\pi\text{ cm}^2$.

  $\mathbf{V} = \pi\mathbf{r}^2\mathbf{h}/3 = \pi(10\text{ cm})^2(5\sqrt{5}\text{ cm})/3 \approx 1\,170.8\text{ cm}^3$.

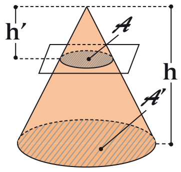
Si un plano corta paralelamente a su base a un cono, el cuerpo que resulta es un cono truncado, que puede ser recto u oblicuo.

El área total, $\mathbf{A_t}$, y el volumen, $\mathbf{V}$, del cono truncado recto de base circular de la derecha se calculan con:

$\mathbf{A_t} = \pi[\mathbf{R}^2 + \mathbf{r}^2 + (\mathbf{R} + \mathbf{r})\mathbf{g}]$ $\quad$ $\mathbf{V} = \pi\mathbf{h}(\mathbf{R}^2 + \mathbf{r}^2 + \mathbf{Rr})/3$

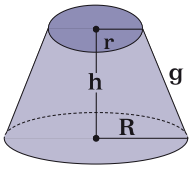
SABER MÁS

Razón de las áreas de la sección transversal y la base de un cono circular



$$\frac{\mathcal{A}'}{\mathcal{A}} = \left(\frac{\mathbf{h}'}{\mathbf{h}}\right)^2$$

Cono circular recto truncado



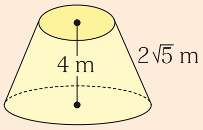
g es la generatriz y **h**, la altura del cono truncado.

R es el radio de la base mayor y **r** el radio de la base menor.

ACTIVIDADES

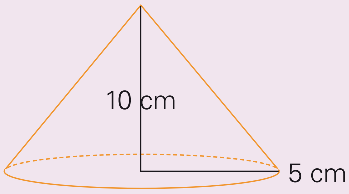
2 Determina lo que se te indica.

- El área total de un cono circular recto de 10 cm de diámetro y 6 cm de altura.
  $\mathbf{A}$ = 201.22 cm².
- El volumen de un cono circular oblicuo de 10 cm de radio y 15 cm de altura.
  $\mathbf{V}$ = 1 570.8 cm³.
- El área y el volumen del cono circular recto truncado de la derecha, cuyos bases mayor y menor tienen radios que miden 5 m y 3 m, respectivamente.
  $\mathbf{A}$ = 219.21 cm²; $\mathbf{V}$ = 205.25 cm³.

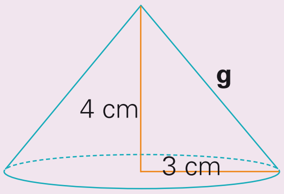


Atención a la diversidad

Actividades de refuerzo: Proponga a sus estudiantes que calculen el área total y el volumen de los siguientes conos representados.



$\mathbf{g}^2 = 10^2 + 5^2$
$\mathbf{g}^2 = 100 + 25$
$\mathbf{g} = \sqrt{125}$
$\mathbf{g} = 11.18$
$\mathbf{A_t} = \boldsymbol{\pi}\mathbf{r}\,(\mathbf{r} + \mathbf{g})$
$\mathbf{A_t} = (3.1416)\,(5)\,(5 + 11.18)$
$\mathbf{A_t} = 254.16\text{ cm}^2$.
$\mathbf{V} = \boldsymbol{\pi}\mathbf{r}^2\,\text{h} \div 3$
$\mathbf{V} = (3.1416)\,(5)2\,(10) \div 3$
$\mathbf{V} = 261.80\text{ cm}^3$.



$\mathbf{g}^2 = 4^2 + 3^2$
$\mathbf{g}^2 = 16 + 9$
$\mathbf{g} = \sqrt{25}$
$\mathbf{g} = 5$
$\mathbf{A_t} = \boldsymbol{\pi}\mathbf{r}\,(\mathbf{r} + \mathbf{g})$
$\mathbf{A_t} = (3.1416)\,(3)\,(3 + 5)$
$\mathbf{A_t} = 75.40\text{ cm}^2$.
$\mathbf{V} = \boldsymbol{\pi}\mathbf{r}^2\,\text{h} \div 3$
$\mathbf{V} = (3.1416)\,(3)^2\,(4) \div 3$
$\mathbf{V} = 37.70\text{ cm}^3$.

Ficha 51.

- **Desarrollo:** Muéstreles los conceptos desarrollados en la doble página con sus representaciones gráficas correspondientes. Diseñe ejercicios adicionales similares a los vistos en estas páginas, en los que calculen el área y el volumen de diversos conos. Pídales que observen el cono circular recto truncado y que lean la información al pie de la imagen. Motíveles para que lean, comenten y reproduzcan en sus cuadernos el contenido del apartado *Saber más*.
- **Cierre:** Motive a sus estudiantes a realizar los ejercicios del apartado *Actividades*. En la actividad 2, determinarán el área total y el volumen de los conos circulares cuyas medidas se les especifican y, además, calcularán el área y el volumen del cono circular recto truncado representado en el margen derecho de esta página.

Aprender a aprender

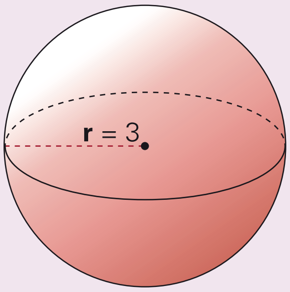
Pregunte a sus estudiantes: *¿Qué aplicaciones en la solución de problemas cotidianos podrían tener los conceptos desarrollados en esta doble página?*

Indicadores de logro

- **Identifica** el concepto general de *esfera*.
- **Calcula** el área y el volumen de la esfera.

Otras actividades

Proponga a sus estudiantes que calculen el área y el volumen de las siguientes esferas representadas.



Área = $4\pi r^2$

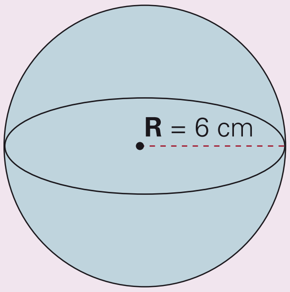
Área = (4) (3.1416) $(3)^2$

Área = 113.10 $\mathbf{u}^2$.

Volumen = $\frac{4}{3}\pi r^3$

Volumen = (4) (3.1416) $(3)^3 \div 3$

Volumen = 113.10 $\mathbf{u}^3$.



Área = $4\pi r^2$

Área = (4) (3.1416) $(6)^2$

Área = 452.39 cm^2.

Volumen = $4/3\ \pi r^3$

Volumen = (4) (3.1416) (6)3 ÷ 3

Volumen = 904.78 cm^3.

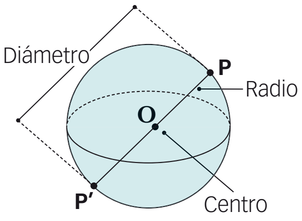
RECUPERACIÓN

Responde.

- ¿Qué distingue a una esfera de otros cuerpos redondos?

Que carece de bases o superficies planas.

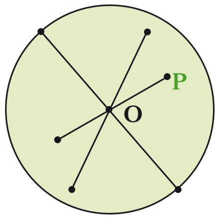
Elementos de la esfera



1 Concepto de esfera

Una esfera, $\mathcal{E}$, es la unión de los segmentos de igual longitud, $\mathbf{OP}$, con **O** como extremo común a todos ellos y tales que los puntos **P** están en el espacio.

Si $\overline{\mathbf{OP}_1}$, $\overline{\mathbf{OP}_2}$, … son segmentos que cumplen la condición anterior, entonces: $\mathcal{E} = \overline{\mathbf{OP}_1} \cup \overline{\mathbf{OP}_2} \cup \ldots$



Los puntos **P** ($\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$, $\mathbf{P}_3$, …) están a igual distancia del punto **O**, llamado centro de la esfera y pertenecen a su superficie.

El radio de la esfera es la longitud, **r**, de los segmentos **OP**:

$$\mathbf{r} = \measuredangle(\overline{\mathbf{OP}}) = \text{constante}.$$

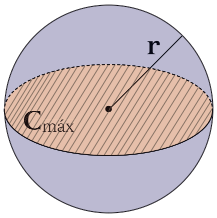
La distancia entre dos puntos opuestos de la superficie de la esfera es el diámetro de esta y es el doble de la longitud, **r**, del radio.

2 Área de la esfera

El área de una esfera es directamente proporcional al cuadrado de su radio o su diámetro.

Si **r** es el radio de la esfera su área, **A**, se obtiene con la expresión siguiente:

$$\mathbf{A} = 4\pi \mathbf{r}^2$$



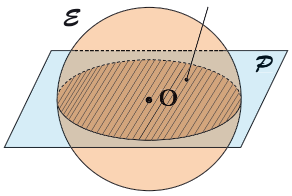
Puesto que $\pi\mathbf{r}^2$ es el área de cualquier círculo máximo de la esfera, su área es equivalente a cuatro de sus círculos máximos: $\mathbf{A} = 4\mathbf{C}_{máx}$.

RECUERDA

Círculo máximo

Un círculo máximo, $\mathbf{C}_{máx}$, es la intersección de una esfera, $\mathcal{E}$, con un plano, $\mathcal{P}$, que contiene al centro de la esfera.

Círculo máximo



$$\mathbf{C}_{máx} = \mathcal{E} \cap \mathcal{P}$$

EJEMPLO RESUELTO:

- Determinar el área de la Tierra asumiendo que nuestro planeta es una esfera perfecta de radio 6.4 x 10^6 m.

  Aquí: $\mathbf{r}$ = 6.4 x 10^6 m.

  Entonces:

  $\mathbf{A} = 4\pi\mathbf{r}^2 = 4\pi\,(6.4 \times 10^6\ \text{m})^2 = 163.84\pi \times 10^{12}\ \text{m}^2.$

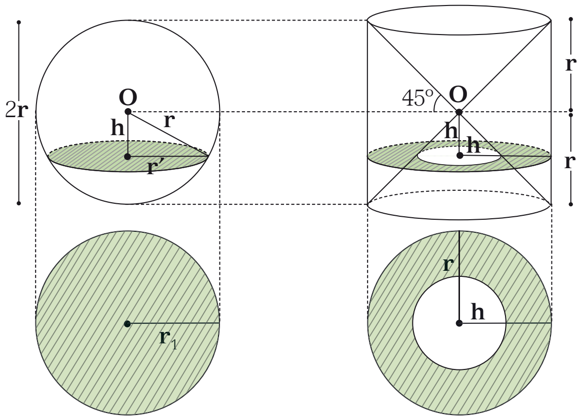
  $\mathbf{A} = 514.72 \times 10^{12} \approx 5.15 \times 10^{14}\ \text{m}^2.$

Sugerencias didácticas

- **Inicio:** Oriente a sus estudiantes para que respondan en el aula la pregunta de recuperación de experiencias previas en el apartado *Recuperación*, en la que expresarán qué distingue a una esfera de los demás cuerpos redondos.
- **Desarrollo:** Haga que lean cuidadosamente el contenido de la doble página, que observen las representaciones gráficas y los procedimientos para determinar el área y el volumen de la esfera. Motíveles para que reproduzcan el ejemplo resuelto en sus cuadernos. Pídales que lean, comenten y reproduzcan en sus cuadernos el contenido del apartado *Recuerda*.

3 Volumen de la esfera

Observa las figuras de una esfera de radio **r** y de un cuerpo geométrico, llamado anticlepsidra, que resulta de extraer dos conos iguales y opuestos por el vértice de un cilindro de radio **r** y altura 2**r**.



Si se aplica el principio de Cavalieri a los cuerpos de la figura anterior, se establece que las áreas de las secciones transversales de la esfera, $\mathbf{A}_{se}$, y la anticlepsidra, $\mathbf{A}_{sa}$, son iguales.

Luego, el volumen de la esfera es igual al volumen de la anticlepsidra, que es la diferencia de los volúmenes del cilindro, $\mathbf{V}_{cilindro}$, y los dos conos iguales, $\mathbf{V}_{cono}$:

$\mathbf{V}_{cilindro} - \mathbf{V}_{cono} = (\pi\mathbf{r}^2)(2\mathbf{r}) - 2(\pi\mathbf{r}^2)(\mathbf{r})/3 = 2\pi\mathbf{r}^3 - 2\pi\mathbf{r}^3/3 = 4\pi\mathbf{r}^3/3$

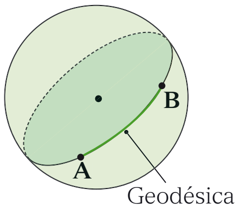
El volumen de una esfera de radio **r** se obtiene con:

$$\mathbf{V} = 4\pi\mathbf{r}^3/3$$

SABER MÁS

Línea geodésica

Una línea geodésica es un arco de circunferencia de un círculo máximo.



La línea geodésica es la línea más corta que une dos puntos de la superficie de una esfera.

EJEMPLO RESUELTO:

- Obtener el volumen de una esfera de 48 cm de diámetro.

Aquí:

$\mathbf{r} = \frac{1}{2}(48 \text{ cm}) = 24 \text{ cm}.$

Luego:

$\mathbf{V} = 4\pi\mathbf{r}^3/3 = 4\pi(24)^3/3$
$= 18\,432\pi \text{ cm}^3.$

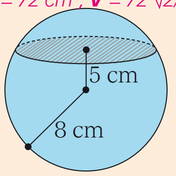
ACTIVIDADES

3 Calcula el área y el volumen de una esfera ...

- cuyo radio mide mide $3\sqrt{2}$ cm de longitud.
  $\mathbf{A} = 72\pi$ cm²; $\mathbf{V} = 72\sqrt{2}\,\pi$ cm³.
- cuya circunferencia máxima mide 8π m.
  $\mathbf{A} = 64\pi$ m²; $\mathbf{V} = 256\pi/3$ m³.
- cuyo círculo máximo mide 18 cm² de área.
  $\mathbf{A} = 72$ cm²; $\mathbf{V} = 72\sqrt{2}/\sqrt{\pi}$ cm³.

4 Lee y, luego, obtén lo que se te pide.

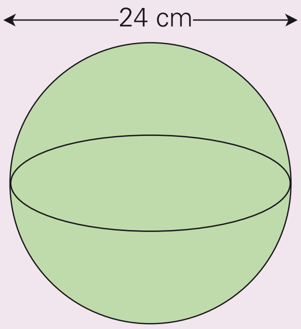
- Un plano corta a una esfera como se muestra en la figura. Si el plano corta a la esfera, de radio 8 cm, 5 cm por encima de su centro, ¿cuál es el área de la sección circular producida por el corte del plano? *$\mathbf{A} = 7.99\sqrt{17}$ cm².*



- **Desarrollo:** Muestre a sus estudiantes los ejemplos y los procedimientos desarrollados en la doble página relacionados con la esfera y el cálculo de su área y volumen. Diseñe ejemplos adicionales. Pídales que lean y reproduzcan el contenido del apartado *Saber más*, que trata sobre el concepto de *línea geodésica*.
- **Cierre:** Motive a sus estudiantes a realizar los ejercicios del apartado *Actividades*. En la actividad 3, calcularán el área y el volumen de las esferas cuyas medidas se especifican. En la actividad 4, determinarán cuál es el área de la sección circular producida por el corte de un plano a una esfera, como se muestra en la figura representada a la derecha de la página.

Atención a la diversidad

Actividades de refuerzo: Proponga a sus estudiantes que calculen el área y el volumen de las siguientes esferas representadas.



Área = $4\pi\mathbf{r}^2$

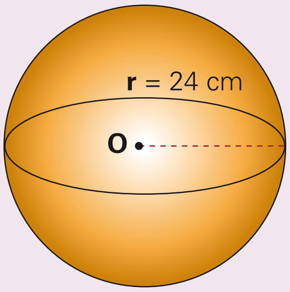
Área = $(4)(3.1416)(12)^2$

Área = $1\,809.56$ cm².

Volumen = $\frac{4}{3}\pi\mathbf{r}^3$

Volumen = $(4)(3.1416)(12)^3 \div 3$

Volumen = $7\,238.25$ cm³.



Área = $4\pi\mathbf{r}^2$

Área = $(4)(3.1416)(42)^2$

Área = $22\,167.13$ mm².

Volumen = $\frac{4}{3}\pi\mathbf{r}^3$

Volumen = $(4)(3.1416)(42)^3 \div 3$

Volumen = $310\,339.81$ mm³.

Ficha 52.

Aprender a aprender

Pregunte al grupo: *¿Les parecieron importantes los conceptos estudiados en esta oportunidad? ¿Podrían dar ejemplos de las aplicaciones cotidianas de estos conceptos?*

Indicadores de logro

- **Reconoce** los conceptos de *casquete, segmento, cuña* y *sector esféricos*.
- **Calcula** el área y el volumen de secciones de la esfera.

Actividad interactiva

Volumen de cuerpos redondos

Actividad interactiva en la que compararán los volúmenes que ocupan diversos cuerpos redondos y, luego, marcarán el cuerpo de mayor volumen en cada conjunto.

Otras actividades

Pida a sus estudiantes que resuelvan las siguientes actividades en sus cuadernos.

- Determinar el área total de un casquete esférico de 6 cm de altura y de 10 cm de radio basal.

  Al = π $(10^2 + 6^2)$

  l = 136π cm^2.

  Ab = 100π cm^2.

  At = $136\pi + 100\pi$

  At = 236π cm^2.

- Determinar el área lateral de una zona o segmento esférico de 6 cm de altura, extraído de una esfera de 8 cm de radio.

  Al = $2\pi hr$

  Al = $2\pi(6)(8)$

  Al = 96π cm^2.

RECUPERACIÓN

Responde.

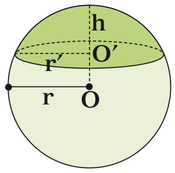
- ¿Cómo queda dividida una esfera al ser cortada por un plano que contiene a su centro?

En partes iguales o semiesferas.

1 Casquete esférico

Un casquete esférico es la menor de las secciones de una esfera producida por el corte de un plano.

La sección destacada resultante de cortar mediante el plano $\mathcal{P}$ a la esfera es un casquete esférico.



El área de la superficie curva o lateral de un casquete esférico, $\mathbf{A_l}$, se obtiene con cualquiera de las dos expresiones siguientes:

$$\mathbf{A_l} = 2\pi \mathbf{hr} \qquad \mathbf{A_l} = \pi(\mathbf{r'}^2 + \mathbf{h}^2)$$

El área total del casquete esférico se obtiene sumando a su área lateral su área basal, $\pi \mathbf{r'}^2$.

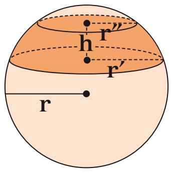
El volumen del casquete puede ser calculado recurriendo a cualquiera de las fórmulas siguientes:

$$\mathbf{V} = \pi \mathbf{h}(3\mathbf{r'}^2 + \mathbf{h}^2)/6 \qquad \mathbf{V} = \pi \mathbf{h}^2(3\mathbf{r} - \mathbf{h})/3$$

2 Segmento esférico

Un segmento esférico es el cuerpo geométrico que resulta de cortar una esfera mediante dos planos paralelos.

El sólido destacado, resultante del corte de la esfera por dos planos paralelos $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$, es un segmento esférico.



El área de la superficie curva de un segmento esférico, llamada zona esférica, $\mathbf{A_l}$, se obtiene con la expresión siguiente, donde **r** es el radio de la esfera y **h**, la distancia entre los planos:

$$\mathbf{A_l} = 2\pi \mathbf{hr}$$

El área total del segmento esférico se obtiene sumando al área de la zona esférica las áreas de las dos bases planas, $\pi \mathbf{r'}^2$ y $\pi\, \mathbf{r''}^2$.

El volumen del segmento esférico es:

$$\mathbf{V} = \pi \mathbf{h}(3\mathbf{r'}^2 + 3\mathbf{r''}^2 + \mathbf{h}^2)/6$$

Sugerencias didácticas

- **Inicio:** Oriente a sus estudiantes para que lean y respondan en el aula la pregunta vinculada a la recuperación de experiencias previas planteada en el apartado *Recuperación*, en la que expresarán cómo queda dividida una esfera al ser cortada por un plano que contiene a su centro.
- **Desarrollo:** Pídales que lean el contenido de la doble página, que observen las representaciones gráficas y los procedimientos aplicados para determinar el área y el volumen de las secciones de la esfera. Pídales que reproduzcan los ejemplos en sus cuadernos.

3 Cuña esférica

Una cuña esférica es el sólido que resulta de cortar una esfera con dos planos que tienen en común la recta que contiene al diámetro.

La cuña resulta de cortar la esfera con dos planos, $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$, con una recta común **L**, que contiene al diámetro de la esfera.

La superficie curva de una cuña se denomina lúnula o huso esférico. Su área, **A**, se determina con la expresión:

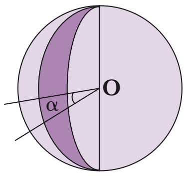
$$\mathbf{A} = \pi\alpha\mathbf{r}^2/90^\circ$$

El área total de una cuña se obtiene sumando al área de la lúnula el área de un círculo máximo de la esfera, $\pi\mathbf{r}^2$.

El volumen de una cuña esférica se obtiene con:

$$\mathbf{V} = \pi\alpha\mathbf{r}^3/270^\circ$$

Cuña esférica



4 Sector esférico

Un sector esférico es el sólido formado por un cono recto y un casquete esférico de igual base.

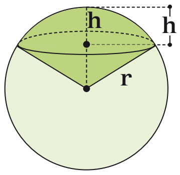
El sólido de la derecha es un sector esférico asociado a una esfera de radio **r**.

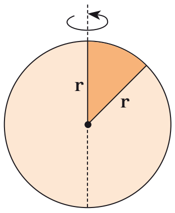
La superficie y el volumen de un sector esférico se obtienen, respectivamente, con:

$\mathbf{S} = 2\pi\mathbf{hr} + \pi\mathbf{r}\sqrt{2\mathbf{hr} - \mathbf{h}^2}$ $\mathbf{V} = 2\pi\mathbf{hr}^2/3$

Un sector esférico es generado por la rotación de un sector circular alrededor de uno de sus radios exteriores o extremos.

Sector esférico





ACTIVIDADES

5 Determina el área …

- total de un casquete esférico de altura 5 cm y de radio basal 9 cm.
  ***A** = 187π cm².*
- de una zona esférica de altura 4 cm extraída de una esfera de 6 cm de radio.
  ***A** = 48π cm².*
- total de la cuña de una esfera de 15 cm de radio con un ángulo de 60º.
  ***A** = 235π cm².*

6 Obtén el volumen de …

- un segmento esférico de altura 6 cm y de radios basales 12 cm y 8 cm.
  ***V** = 660π cm³.*
- una cuña extraída de una esfera de 10" de radio con un ángulo de 3π/5 rad.
  ***V** = 400π pulg³.*
- un sector esférico de $5\sqrt{3}$ cm de radio y altura de 4 cm.
  ***V** = 200π cm³.*

- **Desarrollo:** Muestre a sus estudiantes los ejemplos desarrollados en la doble página. Haga que reproduzcan estos ejemplos en sus cuadernos y diseñe otros adicionales hasta asegurarse de que dominan los conceptos. Propóngales que, formados en grupos, calculen áreas y volúmenes de secciones de la esfera.
- **Cierre:** Motive a sus estudiantes a realizar los ejercicios propuestos en el apartado *Actividades*. En la actividad 5, determinarán el área total de las secciones esféricas especificadas en cada caso. En la actividad 6, obtendrán el volumen de las secciones esféricas cuyas medidas se les indican. Ofrézcales las orientaciones necesarias.

Atención a la diversidad

Actividades de refuerzo: Proponga a sus estudiantes que resuelvan las siguientes actividades en sus cuadernos.

- Determinar el área total de un casquete esférico de 10 cm de altura y de 15 cm de radio basal.

  Al = **π** $(15^2 + 10^2)$

  Al = 325**π cm**².

  Ab = 225**π** cm².

  At = 325**π** + 225**π**

  At = 550**π** cm².

- Determinar el área lateral de una zona o segmento esférico de 10 cm de altura, extraído de una esfera de 20 cm de radio.

  Al = 2**πhr**

  Al = 2**π**(10) (20)

  Al = 200**π** cm².

Ficha 53.

Aprender a aprender

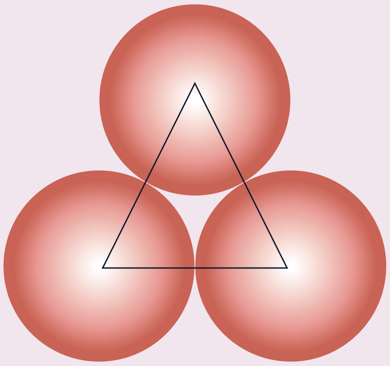
Pregunte al grupo: *¿Tuvieron alguna dificultad que superar al realizar las actividades propuestas en esta doble página? ¿Qué hicieron para superarla?*

Indicadores de logro

- **Identifica** las diferentes posiciones relativas de dos esferas.
- **Identifica** esferas inscrita y circunscrita en un poliedro.

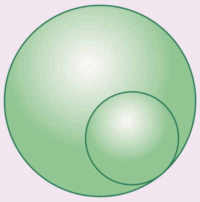
Competencia comunicativa

Esferas tangentes

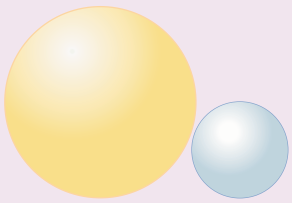


Comente a sus estudiantes que, para comprobar que dos esferas son tangentes, basta con verificar que los centros de las esferas y el punto de tangencia están alineados, es decir, que pertenecen a la misma recta. Es suficiente con encontrar la recta que pasa por los centros de ambas esferas y, luego, comprobar que el punto de tangencia pertenece a dicha recta.

Esfera tangente interior



Esfera tangente exterior



RECUPERACIÓN

Responde.

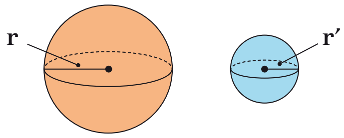
- ¿Qué figura plana resulta de la intersección de dos superficies esféricas?
El círculo.

1 Posiciones relativas de dos esferas

Dos esferas cualesquiera de radios **r** y **r′** pueden estar en cinco posiciones distintas una respecto de la otra.

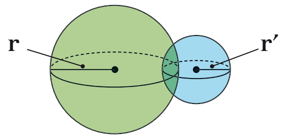
Una esfera puede ser respecto a otra:

- Exterior: Si su superficie no tiene puntos comunes con la superficie de la otra.



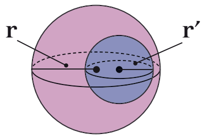
La distancia entre sus centros, **O** y **O′** es mayor que la suma de los radios de ambas esferas: **d**(**O**, **O′**) > **r** + **r′**.

- Secante: Si su superficie tiene más de un punto en común con la superficie de la otra.



La distancia entre sus centros es menor que la suma de los radios y mayor que la diferencia: **r** – **r′** < **d**(**O**, **O′**) < **r** + **r′**.

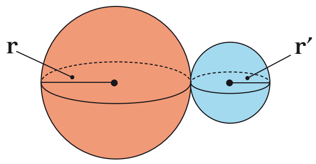
- Interior: Si todos sus puntos pertenecen al interior de la otra.



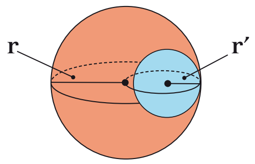
La distancia entre sus centros, es menor que la diferencia de sus radios: **d**(**O**, **O′**) < **r** – **r′**.

- Tangente: Si su superficie tiene un punto en común y solamente uno con la superficie de la otra.

La esfera de centro **O′** puede ser tangente exterior o interior.



Exterior: **d**(**O**, **O′**) = **r** + **r′**

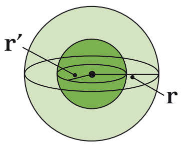


Interior: **d**(**O**, **O′**) = **r** – **r′**

SABER MÁS

Esferas concéntricas

Dos esferas tales que, una es interior a la otra y tienen el mismo centro, son esferas concéntricas.



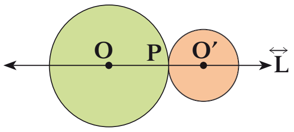
Sugerencias didácticas

- **Inicio:** Oriente a sus estudiantes para que lean y respondan en el aula la pregunta vinculada a la recuperación de experiencias previas planteada en el apartado *Recuperación*, en la que expresarán qué figura es la intersección de dos superficies esféricas.
- **Desarrollo:** Pídales que lean el contenido de la doble página, que observen las representaciones gráficas y el desarrollo de los conceptos relacionados con las posiciones relativas de dos esferas. Haga que lean y comenten el contenido del apartado *Saber más*, que trata sobre las esferas concéntricas.

2 Propiedad de dos esferas tangentes

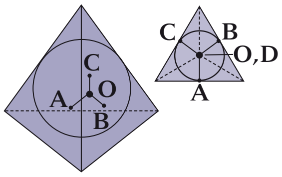
Los centros, **O** y **O'**, y el punto de tangencia **P**, de dos esferas tangentes son colineales.

$\{O, P, O'\} \subset \overleftrightarrow{L}$

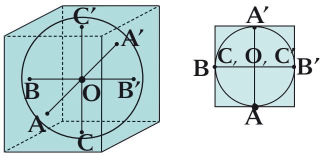


3 Esferas inscrita y circunscrita en un poliedro

Una esfera está inscrita en un poliedro si toca un punto y solo un punto de todas las caras del poliedro; y está circunscrita en un poliedro, si todos los vértices del poliedro son puntos de la superficie de la esfera.



Esfera inscrita en un tetraedro.



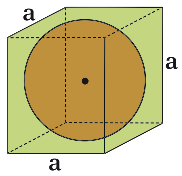
Esfera circunscrita en un cubo.

EJEMPLO RESUELTO:

- Obtener la razón V_{cubo} / V_{esfera} de la figura de la derecha.

  Como la esfera es tangente a las caras del cubo, su diámetro es **a**, luego su radio es ½ **a**.

  La razón buscada es: $V_{cubo} / V_{esfera} = a^3/[4\pi(1/2a)^3/3] = 6/\pi$.



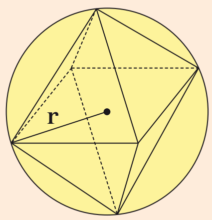
ACTIVIDADES

7 Resuelve el problema.

- El área de una esfera circunscrita a un cubo es de 4π m^2. ¿Cuánto mide la arista del cubo? *La arista mide $2/\sqrt{3}$ m.*

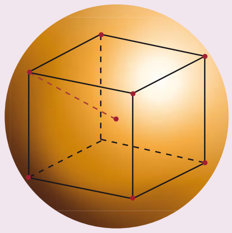
8 Analiza y, luego, responde.

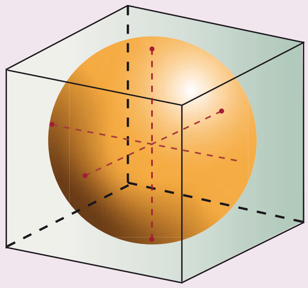
- Se inscribe un octaedro regular en una esfera, como se muestra en la figura. ¿Cuántas veces mayor es el volumen de la esfera que el del octaedro inscrito en ella? *π veces mayor.*

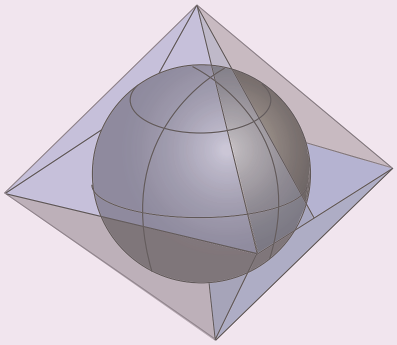


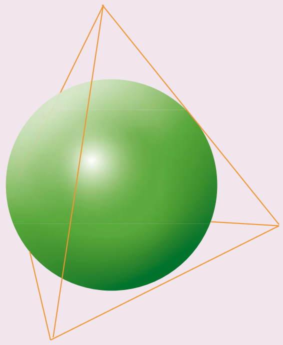
Otras actividades

Esferas inscritas y circunscritas en poliedros









Ficha 54.

- **Desarrollo:** Muestre a sus estudiantes las diversas posiciones relativas de dos esferas desarrolladas en esta doble página. Haga que reproduzcan las representaciones gráficas y los ejemplos resueltos en sus cuadernos y diseñe ejemplos adicionales hasta asegurarse de que dominan los conceptos.
- **Cierre:** Motive a sus estudiantes a realizar los ejercicios propuestos en el apartado *Actividades*. En la actividad 7, dada el área de una esfera circunscrita a un cubo, determinarán la longitud de la arista de dicho cubo. En la actividad 8, determinarán cuántas veces mayor es el volumen de la esfera que el del octaedro inscrito en ella. Ofrézcales las orientaciones necesarias.

Aprender a aprender

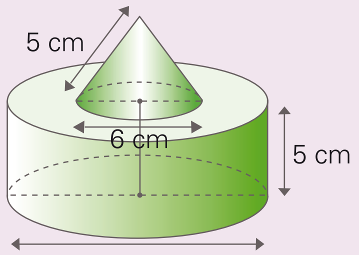
Pregunte al grupo: *¿Qué similitud tienen los conceptos desarrollados en esta doble página con temas que trabajaron en grados anteriores? ¿Creen que esta similitud hizo más fácil el aprendizaje?*

Indicadores de logro

- **Identifica** el concepto general de *cuerpos compuestos* y **calcula** su área y su volumen.

Otras actividades

Volumen de cuerpos compuestos



Formado por un cono y un cilindro

Volumen del cono:

$\mathbf{h}^2 = 5^2 - 3^2$

$\mathbf{h} = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16}$

$\mathbf{h} = 4.$

$\mathbf{V} = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$\mathbf{V} = \frac{1}{3}(3.1416)\,(3)^2\,(4)$

$\mathbf{V} = 37.7 \text{ cm}^3.$

Volumen del cilindro:

$\mathbf{V} = \pi r^2 \mathbf{h}$

$\mathbf{V} = (3.1416)\,(7)^2\,(5)$

$\mathbf{V} = 769.69 \text{ cm}^3.$

Volumen del cuerpo:

$\mathbf{V} = 37.7 + 769.69 = 807.39 \text{ cm}^3.$

RECUPERACIÓN

Responde.

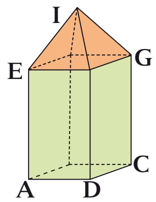
- ¿Cómo queda dividida una esfera al ser cortada por un plano que contiene a su centro?

En partes iguales o semiesferas.

1 Concepto de cuerpo compuesto: área y volumen

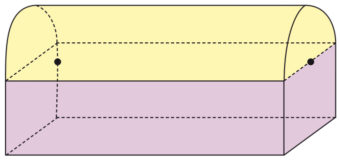
Un cuerpo compuesto está formado por otros cuerpos geométricos o partes de estos.

El cuerpo de la derecha está compuesto por un prisma recto de base cuadrada **ABCDEFGH** y una pirámide de base cuadrada **EFGHI**.



Un cuerpo compuesto puede estar formado por poliedros y cuerpos redondos.

El siguiente cuerpo compuesto está formado por un prisma de base rectangular y un cilindro circular recto cortado.



También se consideran cuerpos compuestos aquellos que resultan de sustraer algunas partes de un cuerpo original.

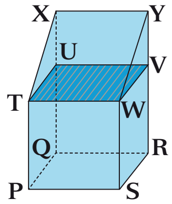
El área total de un cuerpo compuesto es la suma de las áreas no comunes o superpuestas del cuerpo.

Así, el área del poliedro compuesto **ABCDEFGHI** es la suma de las áreas de las caras laterales y de la base del prisma **ABCDEFGH** y el área de las caras laterales de la pirámide **EFGHI**. La cara común no se toma en consideración para calcular el área total del cuerpo.

El volumen de un cuerpo compuesto es la suma de los volúmenes de los cuerpos simples que lo componen y en el caso de que a un cuerpo se le sustraiga una parte, el volumen es la diferencia de su volumen original y el de la parte sustraída.

Para calcular el área total de cuerpo **PQRSTUVWXY** no se toma en cuenta el área común rayada.

En el caso del volumen, se suman los volúmenes de los poliedros **PQRSTUVW** y **TUVWXY**.



Sugerencias didácticas

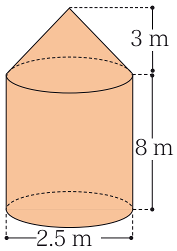
- **Inicio:** Oriente a sus estudiantes para que lean y respondan en el aula la pregunta vinculada a la recuperación de experiencias previas planteada en el apartado *Recuperación*, en la que expresarán cómo queda dividida una esfera al ser cortada por un plano que contiene a su centro.
- **Desarrollo:** Pídales que lean el contenido de la doble página, que observen las representaciones gráficas y el desarrollo de los conceptos y los ejemplos resueltos. Haga que reproduzcan los ejemplos resueltos y los gráficos correspondientes en sus cuadernos.

2 Ejemplos de aplicación

Sigue con atención los ejemplos de aplicación siguientes.

EJEMPLOS RESUELTOS:

- Se quiere pintar la superficie de un obelisco conmemorativo formado por un cilindro recto y un cono con las medidas siguientes. Si se emplea una pintura cuyo rendimiento es de 32 m^2 por galón por mano, ¿cuántos galones de pintura se gastarán dando tres manos de pintura?



Los datos presentes en la figura son:

$2\mathbf{r} = 2.5$ m; $\mathbf{h}_{cilindro} = 8$ m; $\mathbf{h}_{cono} = 3$ m.

Mediante el teorema de Pitágoras se conoce la generatriz del cono:

$\mathbf{g} = \sqrt{(3\text{ m})^2 + (1.25\text{ m})^2} = \sqrt{5}$ m.

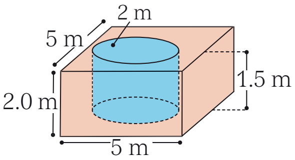
Luego: $\mathbf{A} = 2\pi \mathbf{r}\mathbf{h}_{cilindro} + \pi \mathbf{r}\mathbf{g}$

$= 2\pi\,(1.25\text{ m})(8\text{ m}) + \pi\,(1.25\text{ m})(2.23\text{ m}) \approx 22.8\pi\text{ m}^2$

El número **x** de galones que se gastará en dar una mano de pintura al obelisco se obtiene a partir de la proporción: $\mathbf{x}/22.8\pi = 1/32 \longrightarrow \mathbf{x} = 2.24$ gal.

En dar tres manos de pintura se gastarán 3 x 2.24 gal = 6.72 gal.

- ¿Cuál es el volumen de concreto de una pileta con la forma y dimensiones especificadas en la ilustración?



La respuesta se obtiene restando del volumen del prisma de base rectangular el volumen del cilindro de radio y altura dados:

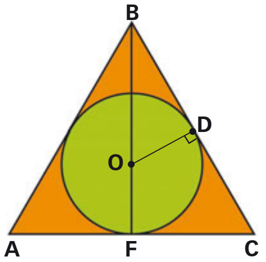
$\mathbf{V} = \mathbf{V}_{prisma} - \mathbf{V}_{cilindro} = \mathbf{abc} - \pi \mathbf{r}^2\mathbf{h}$

$\mathbf{V} = 5\text{ m} \times 5\text{ m} \times 2\text{ m} - \pi \times (2\text{ m})^2 \times 1.5\text{ m} = 31.15\text{ m}^3.$

INTELIGENCIA COLABORATIVA

Esfera inscrita en un cono circular recto

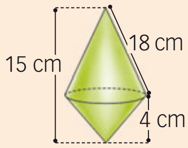
La figura siguiente es una vista lateral de una esfera inscrita en un cono circular recto.



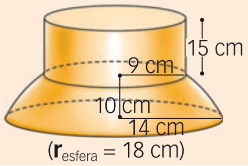
- Demuestren que los triángulos **FBC** y **DOB** son semejantes. *Son triángulos rectángulos para los que ∢**BOD** ≅ ∢**FCB**.*
- Presenten y comenten su demostración en el aula.

ACTIVIDADES

9 Determinen el área y el volumen de los cuerpos siguientes.

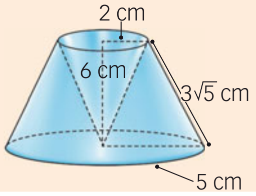


A = 1 468.1 cm²; V = 3 188.7 cm³.



($\mathbf{r}_{esfera}$ = 18 cm)

A = 2 849.4 cm²; V = 8 691.7 cm³.

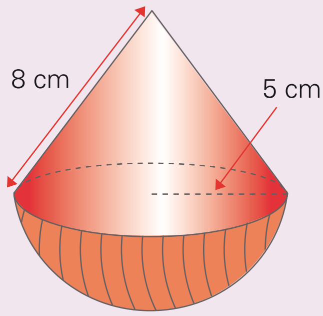


A = 265.8 cm²; V = 219.9 cm³.

Cuaderno: Ficha 55

Otras actividades

Volumen de cuerpos compuestos



Volumen del cono:

$\mathbf{h}^2 = 8^2 - 5^2$

$\mathbf{h} = \sqrt{64 - 25} = \sqrt{39}$

$\mathbf{h} = 6.24$ cm.

$\mathbf{V} = \frac{1}{3}\pi \mathbf{r}^2\,\mathbf{h}$

$\mathbf{V} = \frac{1}{3}(3.1416)\,(5)^2\,(6.24)$

$\mathbf{V} = 163.36\text{ cm}^3.$

Volumen de la semiesfera:

$\mathbf{V} = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\right)\pi \mathbf{r}^3\,)$

$\mathbf{V} = \frac{1}{2}(4 \times 3.1416 \times 125 \div 3)$

$\mathbf{V} = 261.8\text{ cm}^3.$

Volumen del cuerpo:

$\mathbf{V} = 163.36 + 261.8$

$\mathbf{V} = 425.16\text{ cm}^3.$

Ficha 55.

- **Desarrollo:** Diseñe ejercicios similares a los propuestos en esta doble página en los que calculen áreas y volúmenes de cuerpos compuestos. Diseñe ejemplos adicionales y haga que los desarrollen en sus cuadernos. Motíveles para que realicen la actividad propuesta en el apartado *Inteligencia colaborativa*, que trata sobre la esfera inscrita en un cono circular recto.
- **Cierre:** Motive a sus estudiantes a realizar los ejercicios propuestos en el apartado *Actividades*. En la actividad 9, determinarán el área y el volumen de los cuerpos compuestos representados y medidas especificadas.

Aprender a aprender

Pregunte al grupo: *¿Tuvieron alguna dificultad en el proceso de calcular el área y el volumen de cuerpos compuestos? ¿En qué consistió el problema?*

Competencias

- Comunicativa.
- Usa algoritmos.
- Resolución de problemas.

Indicadores de logro

- **Identifica** el concepto general de *cilindro*. **Identifica** el concepto de *cilindro circular* y su clasificación. **Calcula** el área y el volumen del cilindro circular. **Identifica** el concepto general de *cono*. **Identifica** el concepto de *cono circular* y su clasificación. **Calcula** el área y el volumen del cono circular. **Identifica** el concepto general de *esfera*. **Calcula** el área y el volumen de la esfera. **Reconoce** los conceptos de *casquete*, *segmento*, *cuña* y *sector esféricos*. **Calcula** el área y el volumen de secciones de la esfera. **Identifica** las diferentes posiciones relativas de dos esferas. **Identifica** el concepto general de *cuerpos compuestos* y **calcula** su área y su volumen. **Resuelve** problemas del contexto que involucran el cálculo de área y de volumen de cuerpos redondos.

Competencias específicas

Competencia comunicativa

Es necesario que los estudiantes adquieran las habilidades para reconocer y calcular áreas y volúmenes de cuerpos redondos diversos y, además, identificar las posiciones relativas de dos esferas y, al mismo tiempo, puedan desarrollar las competencias comunicativas que les permitan expresar estos conocimientos.

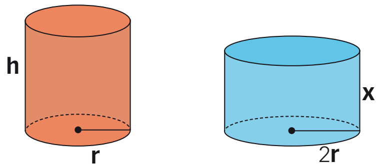
Usa algoritmos

Las reglas y procedimientos en la resolución de operaciones aritméticas son vitales para la persecución de resultados correctos. Por ejemplo, en las operaciones que involucran el cálculo del área y el volumen de cuerpos geométricos diversos.

ACTIVIDADES

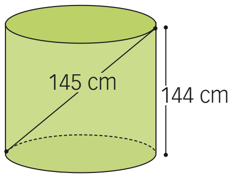
10 Lee, observa la figura y, luego, responde.

El cilindro **B** tiene un radio que es el doble del radio del cilindro **A**. ¿Cuál debe ser la altura, **x**, del cilindro **B** para que ambos tengan la misma área total? *$x = \frac{1}{2}(h - 3r)$.*

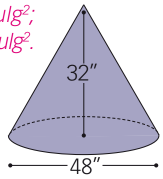


- Explica qué hiciste para responder. *Se hace $2\pi r(r + h) = 2\pi(2r)(2r + x)$ y se despeja x.*
- Si la altura y el radio del cilindro **A** son, respectivamente **r** = 6 cm y **h** = 20 cm, ¿cuál deberá ser la altura del cilindro **B**, de radio dos veces mayor para que tengan igual área total? *La altura de **B** deberá ser 1 cm.*

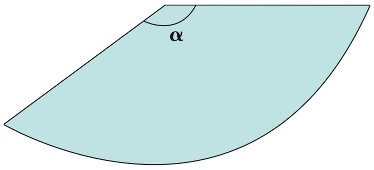
11 Obtén la capacidad, en litros, de un recipiente cilíndrico con las medidas que se muestra abajo. *10. 404 litros.*



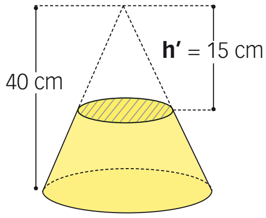
12 Obtén las áreas lateral y total del cono.
$A_l = 960\pi$ pulg^2;
$A_t = 1\,536\pi$ pulg^2.



- El sector circular siguiente es la plantilla de la superficie lateral del cono anterior. ¿Cuánto mide el ángulo α, en el sistema sexagesimal? *$\alpha = 216°$.*

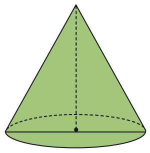


13 Calcula el área basal del cono si el área de la sección transversal es de 20 cm². *$A = 142.22$ cm^2.*



14 Deduce las expresiones correspondientes al área total y al volumen del cono.

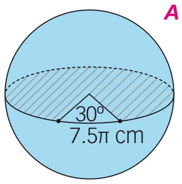
Un cono equilátero es aquel cuya intersección con un plano perpendicular a su base y que pase por un diámetro es un triángulo equilátero.



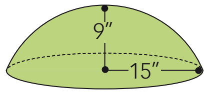
$A = 3\pi r^2$; $V = \pi r^2/\sqrt{3}$.

15 Resuelve el problema.

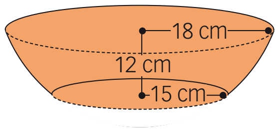
Un ángulo central de 30º intercepta un arco de círculo máximo de 7.5π cm. ¿Cuál es el área de la esfera a la que pertenece el círculo máximo? *$A = 8\,100\pi$ cm^2.*



16 Determina el área total y el volumen del casquete esférico. *$A = 531\pi$ pulg^2; $V = 1\,134\pi$ pulg^3.*



17 Determina el volumen del segmento esférico. *$V = 3\,582\pi$ cm^3.*

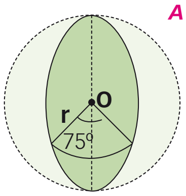


Sugerencias didácticas

- Las actividades propuestas en esta página están estrechamente vinculadas a los conceptos y procedimientos desarrollados a lo largo de la unidad. Haga que lean cuidadosamente las instrucciones y, después, verifique los resultados obtenidos.
- Es importante observar de cerca que los estudiantes aplican correctamente las fórmulas y los procedimientos para calcular el área y el volumen de los cuerpos geométricos estudiados en la unidad.

18 Obtén el área de la lúnula.

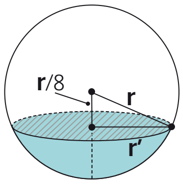
$A = 83.33\pi$ cm².



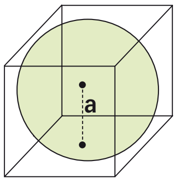
19 Resuelve el problema.

Un fabricante de lámparas construye piezas cortando esferas de vidrio a una distancia de su centro de un 1/8 de su radio. Si el radio de las esferas es de 8 cm, ¿cuál es el área de la sección plana que determina el corte?

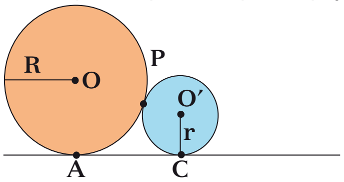
$A = 197.92$ cm².



20 Determina la razón de los volúmenes de los cubos circunscrito e inscrito en la esfera de radio **a**. *Razón = $3\sqrt{3}$*.



21 Observa la figura que muestra dos esferas tangentes en un punto **P**. La esfera mayor tiene un radio **R** = 18 cm y la menor, un radio **r** = 12 cm. Ambas esferas tocan los puntos **A** y **B** de la superficie plana en que se apoyan.



- Encuentra una expresión para la distancia entre los puntos **A** y **B**. ***AB*** *$= 2\sqrt{Rr}$*.
- ¿Cuál es esa distancia? ***AB*** *$= 6\sqrt{6}$ cm*.

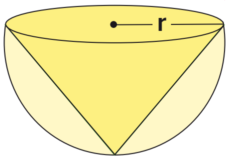
22 Piensa y, luego, responde.

- ¿Qué te dice la intuición en el caso de que las esferas del ejercicio anterior tengan el mismo radio? *Que la distancia **AB** sería igual a **OO'**.*
- ¿Cómo confirmarías tu intuición?

*Como **AB** $= 2\sqrt{Rr}$, si **R** = **r**, entonces: **AB** $= 2\sqrt{r^2} = 2r =$ **OO'**.*

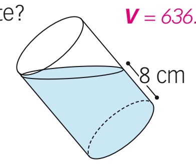
23 Encuentra la razón del área de la semiesfera y el área lateral del cono.

A semiesfera/A lateral del cono $=\sqrt{2}$.



24 Lee y, luego, resuelve el problema.

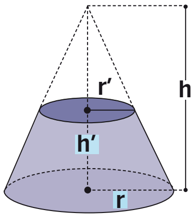
Un recipiente cilíndrico de 12 cm de altura y 9 cm de diámetro contiene una cierta cantidad de agua. Al inclinar el recipiente, el agua contenida se coloca como se indica en la figura. ¿Qué volumen de agua está contenido en el recipiente? *V = 636.17 cm³*.



25 Lee y, luego, haz lo que se te pide.

Un cono de altura **h** es cortado de tal modo que el tronco de cono que resulta tiene una altura **h'** y áreas basales mayor y menor de radios **r** y **r'**, respectivamente. Demuestra que la altura del cono original está relacionada con la del tronco mediante la expresión del recuadro.

$$h = h'\left(\frac{r}{r - r'}\right)$$



Competencias fundamentales

Pensamiento lógico, creativo y crítico

Los conocimientos adquiridos por por los estudiantes son necesarios para identificar las alternativas más convenientes en la persecución de la solución de problemas que forman parte de su diario vivir. En este aspecto radica la importancia de que adquieran las destrezas para resolver problemas que involucren el cálculo del área y el volumen de los cuerpos geométricos redondos vistos en la unidad.

Criterios de evaluación

Competencia comunicativa:

- Adaptación de las representaciones gráficas, simbólicas y numéricas a la situación de comunicación.

Competencia algoritmo:

- Seguimiento de las reglas, instrucciones y procedimientos.

Competencia pensamiento lógico, creativo y crítico

- Interpreta la situación desde diferentes perspectivas.

Sugerencias didácticas

Resolución de problemas

- Proponga a sus estudiantes que lean detenidamente las instrucciones de los problemas planteados en las actividades 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24 y 25. Estos problemas son aplicaciones cotidianas de los conceptos y procedimientos relacionados con el cálculo de área y volumen de cuerpos redondos.
- Acompañe a sus estudiantes en la realización de estas actividades y ofrézcales las orientaciones necesarias.

Aprender a aprender

Motive a sus estudiantes para que inventen ejemplos de las aplicaciones cotidianas de los conceptos desarrollados en la unidad. Por ejemplo, pregunte: *¿Qué conocimientos deben tener para calcular el volumen de una pieza de metal formada por un cono y un cilindro?* Discuta las diversas respuestas con el grupo.

Indicadores de logro de la evaluación

- **Identifica** el concepto general de *cilindro*. **Identifica** el concepto de *cilindro circular* y su clasificación. **Calcula** el área y el volumen del cilindro circular. **Identifica** el concepto general de *cono*. **Identifica** el concepto de *cono circular* y su clasificación. **Calcula** el área y el volumen del cono circular. **Identifica** el concepto general de *esfera*. **Calcula** el área y el volumen de la esfera. **Reconoce** los conceptos de *casquete*, *segmento*, *cuña* y *sector esféricos*. **Calcula** el área y el volumen de secciones de la esfera. **Identifica** las diferentes posiciones relativas de dos esferas. **Identifica** el concepto general de *cuerpos compuestos* y **calcula** su área y volumen. **Resuelve** problemas del contexto que involucran el cálculo de área y volumen de cuerpos redondos. **Utiliza** recursos virtuales y electrónicos: computadora, softwares educativos, juegos interactivos y otros, en la búsqueda de información.

Competencias específicas

- Comunica.
- Razona y argumenta.
- Modela y representa.
- Usa algoritmos.
- Conecta.
- Resuelve problemas.

Aprender a aprender

Pregunte al grupo: *¿Qué importancia tiene para el diseño en las construcciones y edificaciones, conocer el área y el volumen de cuerpos redondos?*

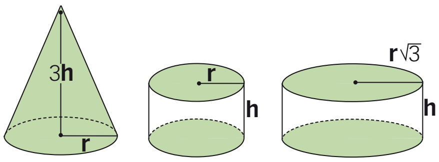
En la tangencia exterior las esferas tienen solo un punto en común el de sus superficies y en la tangencia interior son comunes el punto de tangencia y todos los puntos de la esfera interior.

Comunicación

26 Escribe la diferencia entre la tangencia exterior de dos esferas y la tangencia interior.

Razona y argumenta

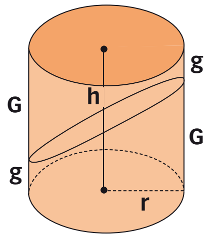
27 Observa los cuerpos y, luego, responde.



*Para el cono, en la proporcionalidad de su volumen con la altura, **h**. Para el cilindro de la derecha, en la proporcionalidad con el cuadrado del radio, **r**.*

¿En cuáles razones te apoyarías para afirmar que los volúmenes de esos cuerpos son iguales? NOTA: Toma como volumen de referencia el del cilindro del centro.

28 A partir de la figura siguiente, infiere la expresión del volumen, **Vtrc**, del cilindro circular recto truncado de la página 175.



$2V_{trc} = \pi r^2 h = \pi r^2(G + g)$, entonces: $V_{trc} = \frac{1}{2}\pi r^2(G + g)$.

- ¿Qué debió asumirse para realizar la inferencia?

Que ambos cilindros truncados tienen igual volumen.

Modela y representa

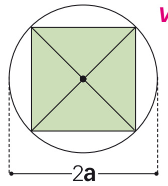
29 Completa la tabla donde se representan los valores numéricos correspondientes al radio, la generatriz y el área total de un cono circular recto.

r (en cm)	**g** (en cm)	A_t (en cm²)
4	*1.9683*	75
1.9683	16	63
12	25	*1 394.867*

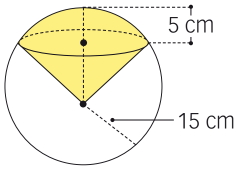
Usa algoritmos

30 La vista de planta corresponde a un cubo de arista **a** inscrito en un cilindro de altura igual a la arista del cubo. Obtén la razón V_{cil}/V_{cubo}.

$V_{cil}/V_{cubo} = \pi/2$.



31 Calcula el área total y el volumen del siguiente sector esférico. *$A = 998.1$ cm²; $V = 2\,356.19$ cm³.*



Conecta

32 Resuelve el problema.

El *Atomium* es una estructura de metal instalada en Bruselas en ocasión de una exposición internacional en 1958. Está formada por 9 esferas iguales con un diámetro de 18 m.

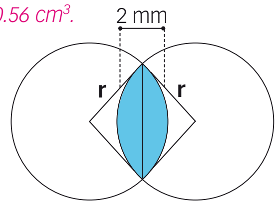
¿Qué radio debería tener una esfera que iguale el volumen de las nueve del Atomium?

$r = 18.72$ m.

33 Observa la figura y, luego, responde.

- La lente convergente está formada por dos casquetes iguales tallados de una esfera de 18 cm de radio. ¿Qué volumen tiene la lente?

$V = 0.56$ cm³.



Sugerencias didácticas para la evaluación

- Es importante verificar, antes de dar inicio a las actividades de evaluación, que sus estudiantes identifican las posiciones relativas de dos esferas y que calculan el área y el volumen de cuerpos compuestos. Observar que aplican correctamente las operaciones de las distintas fórmulas.

SABER HACER

34 **Aprendizaje por descubrimiento**. Lean el texto y, luego, hagan lo que se les pide.

Si un plano corta a un cilindro o un cono paralelamente a sus bases, sus secciones transversales son círculos. Pero cuando el plano corta oblicuamente con respecto a sus bases la intersección deja de ser circular.

- La figura de la derecha corresponde a una red bidimensional de un cuerpo redondo. Copien, recorten y construyan el cuerpo.
- Respondan las preguntas.
  - ¿Qué cuerpo redondo construyeron?
    Un cono truncado oblicuamente.
  - ¿Cómo se modifica la cara opuesta a la base circular con su inclinación respecto a dicha base? Anoten sus conclusiones y coméntenlas en el aula.
    Se alarga conforme crece la inclinación respecto a la base.

35 Responde las preguntas.

- ¿Qué relaciones puedes establecer entre el desarrollo socio-económico, la tecnología y la ciencia? Da ejemplos.
- ¿A qué factores de índole socio-económica y cultural atribuyes el avance del conocimiento del medio en que vivimos?

APRENDIZAJE AUTÓNOMO

36 Marca según tus logros.

	Iniciado	En proceso	Logrado
• Reconozco y calculo áreas y volúmenes de cuerpos redondos.	▢	▢	▢
• Identifico cuerpos truncados y calculo sus áreas y volúmenes.	▢	▢	▢
• Reconozco y calculo áreas y volúmenes de secciones esféricas.	▢	▢	▢
• Identifico las posiciones relativas de dos esferas.	▢	▢	▢
• Calculo el área y el volumen de cuerpos compuestos.	▢	▢	▢
• Resuelvo problemas diversos relativos a cuerpos redondos.	▢	▢	▢

37 Reflexiona sobre tu aprendizaje.

- ¿Trabajaste con interés y entusiasmo los contenidos de esta unidad? ¿Por qué?
- ¿En cuáles situaciones de la vida diaria podrías aplicar satisfactoriamente lo aprendido?

Sugerencias didácticas para la evaluación

- Pregunte a sus estudiantes:
  — *¿Cómo se clasifican los cuerpos redondos?*
  — *¿Cómo se calculan el área y el volumen del cono?*
  — *¿Cómo se calculan el área y el volumen del cilindro?*
  — *¿Cómo se calculan el área y el volumen de la esfera?*

Saber hacer

En la actividad 34, *Saber hacer,* se aplica la estrategia de evaluación *Aprendizaje por descubrimiento*. Formados en grupos, observarán la ilustración correspondiente a una red bidimensional de un cuerpo redondo, luego, leerán el texto y después, seguirán las instrucciones al pie de la letra. En este caso, copiarán la figura, la recortarán y, luego, construirán el cuerpo. Finalmente, responderán preguntas, anotarán y comentarán sus conclusiones.

Actitudes y valores

Ciencia y tecnología

En la sección destinada a *Actitudes y valores*, actividad 35, responderán qué relaciones pueden establecer entre el desarrollo socio-económico, la tecnología y la ciencia. Darán ejemplos. Expresarán a qué factores de índole socio-económica y cultural atribuyen el avance del conocimiento del medio en que vivimos.

Aprendizaje autónomo

En el apartado *Aprendizaje autónomo*, actividad 36, evaluarán por ellos mismos si los conceptos y procedimientos que trabajaron en la unidad se encuentran en estado de iniciación, en proceso o logrado. En la actividad 37, reflexionarán sobre su proceso de aprendizaje.

Aprender a aprender

Haga que sus estudiantes apliquen los conceptos aprendidos en la unidad en situaciones de la cotidianidad, por ejemplo, pregunte: *¿Qué conocimientos son necesarios para construir un cuerpo compuesto por una pirámide y un cilindro?*

Indicadores de logro

- **Conoce** las funciones de un diseñador profesional.
- **Reconoce** la importancia del diseño en el desarrollo de las sociedades.
- **Identifica** las variantes de la carrera de diseño como actividad profesional.
- **Identifica** el perfil del diseñador.
- **Sabe** cuál debe ser la ética profesional de un diseñador profesional.
- **Identifica** las fuentes de trabajo o las oportunidades de empleo de un ingeniero.
- **Aprecia** el trabajo del diseñador profesional en sus diversas vertientes.

COMPETENCIAS LABORALES Y PROFESIONALES

El diseño como actividad profesional

¿Qué es un diseñador?

Un diseñador, en cualquiera de sus vertientes, es el profesional encargado de proyectar o esbozar las características de un objeto que va a ser construido para satisfacer determinadas necesidades.

El esbozo que elabora el diseñador de cualquier objeto es inicialmente una idea que se va haciendo concreta conforme se pone en ejecución lo que ha sido proyectado, sea esto un edificio, un objeto utilitario de fábrica, una joya o un jardín.

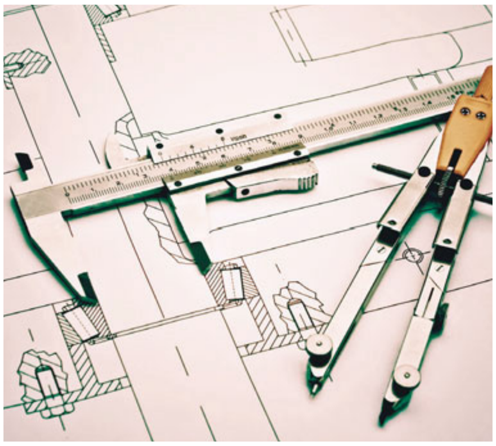
Importancia del diseño

El diseño es importante porque constituye una guía constante para obtención de productos de calidad, con formas atractivas y usos amigables. El diseño actúa como un factor de control en la fabricación de los productos o en las intervenciones del entorno.

Su éxito se consigue en la medida en que el producto construido se apegue al esbozo elaborado con antelación y cumpla con las características y los requerimientos esperados por sus destinatarios.

Del boceto al objeto real. El diseño proyecta el objeto real a construir.

Desempeño profesional



Plano e instrumentos de Geometría. El diseño emplea de modo permanente mediciones y conceptos geométricos.

El profesional del diseño trabaja con una gran variedad de productos y demandas:

- El arquitecto, que interviene el espacio habitable para lograr un entorno humano atractivo, funcional o en armonía con la naturaleza.
- El diseñador de interiores, que modifica los espacios de una vivienda para lograr hacerlos más agradables, confortables y eficientes.
- El diseñador industrial, que obtiene productos industriales más atractivos y fáciles de manejar.
- El diseñador WEB, que crea y desarrolla páginas WEB no solo en lo que respecta a su atractivo sino en lo que tiene que ver con las facilidades para su navegación y la interconectividad de los usuarios.

Sugerencias didácticas

Comente a los estudiantes que las competencias laborales y profesionales son las capacidades y destrezas que permiten desempeñar eficientemente una labor determinada.

En el diseño, además de la capacidad y la destreza, la creatividad y el arte,no pueden separarse.

Sugerencias didácticas

- **Inicio:** Es importante que los estudiantes lean y discutan en el aula el texto: *El diseño como actividad profesional*, las secciones:*¿Qué es un diseñador?*, *Importancia del diseño* y *Desempeño profesional*. Motíveles para que observen las ilustraciones y para que lean y comenten las informaciones al pie de las mismas.
- **Desarrollo:** A continuación, inicie una discusión con sus estudiantes sobre los temas leídos y anímeles a externar sus opiniones y si tienen preferencia por alguna de las ramas de esta carrera. Es conveniente que expresen el porqué de su preferencia.

Perfil del diseñador

El diseñador contará con conocimientos de diversas áreas, dado el carácter multidisciplinar de su profesión. Hará uso de la geometría y los procesos de medición; debe dominar técnicas de dibujo y representaciones a escala; conocimientos sobre materiales de construcción e informática. Deberá tener espíritu de búsqueda, ser sujeto imaginativo y con facilidades para el dibujo. Entre sus actitudes se cuentan la capacidad de trabajo, la facilidad o buena disposición para modificar sus soluciones cuando sea necesario, ser rigurosos en el desarrollo de sus proyectos y veraces al momento de ofrecer sus soluciones a sus clientes.

Ética profesional del diseñador

El profesional del diseño deberá ser honesto consigo mismo y con sus clientes al momento de plantear soluciones; ser veraz cuando algún requerimiento tenga dificultades para su satisfacción; evitar la violación de normativas y derechos de autor y defender el entorno.

Oportunidades laborales

El diseñador puede desempeñarse con éxito:

- En empresas de ingeniería, arquitectura, diseño de interiores y paisajismo.
- En instituciones del Estado que se ocupen del ornato y el planeamiento urbano.
- En joyerías y casas creadoras de moda.
- En departamentos de investigación e innovación de industrias de bienes de consumo cotidiano, para hacerlos más atractivos y de fácil manejo.
- En agencias publicitarias y empresas dedicadas al diseño gráfico.

Escalera de caracol. Esta es una bella estructura arquitectónica.

Diseño de objetos. Con el diseño industrial se producen objetos con características previamente concebidas.

Sala de estar. Trabajo de un interiorista.

VALORACIÓN PERSONAL

1 Responde las preguntas.

- ¿En qué consiste el diseño en cualquiera de sus distintas vertientes?
- ¿Cómo se relacionan el diseñador y el artista? Pon ejemplos que sustenten tu respuesta.
- ¿Qué valor tiene el diseño para los procesos de producción de bienes?
- ¿Por qué un buen diseñador debe ser abierto y flexible al plantear sus soluciones?

Más información

El diseño gráfico

El diseño gráfico es una expresión artística y una práctica que se basa en la planificación y la proyección de ideas y experiencias con contenidos visuales y textuales.

Estas expresiones artísticas se pueden manifestar de manera virtual y escrita, con imágenes o formas gráficas.

Por lo general, tiene un objetivo que puede ser económico, educacional, cultural, político, etc.

Las técnicas y métodos usados en la antigüedad han ido cambiando paulatinamente, es una de las disciplinas que se han adaptado a los nuevos tiempos y han cambiado sus métodos de creación y de transmisión.

Sugerencias didácticas

- **Inicio:** A continuación, pida a sus estudiantes que lean y discutan en el aula el contenido de las secciones: *Perfil del diseñador, Ética profesional del diseñador* y *Oportunidades de empleo*. Motíveles para que observen las ilustraciones y para que lean y comenten las informaciones al pie de las mismas.
- **Desarrollo:** En la sección: Valoración personal, responderán preguntas en el grupo relacionadas con los temas desarrollados en esta doble página. Motíveles, en cada caso, a justificar el porqué de su respuesta y a comentar, si es necesario, las respuestas de sus compañeros.

B Geometría y sociedad

Propuesta de programación

ÁREAS	COMPETENCIAS ESPECÍFICAS	CONTENIDOS		
		Conceptos	**Procedimientos**	**Actitudes y valores**
Matemática	• **Razona y argumenta**: **Reconoce** regiones poligonales y circulares y **calcula** sus perímetros y áreas. • **Comunica**: **Identifica** cuerpos geométricos diversos y **calcula** sus volúmenes. • **Modela y representa**: **Construye figuras** geométricas diversas. • **Conecta: Identifica** elementos históricos relacionados con la evolución de la ciudad. • **Resuelve problemas**: **Resuelve** y **elabora** problemas de su entorno en los que aplica los conceptos relacionados con polígonos y cuerpos geométricos. • **Utiliza herramientas tecnológicas: Utiliza** soportes tecnológicos.	• Polígonos: perímetro y área. • Transformaciones geométricas. • Geometría del espacio. • Poliedros y cuerpos redondos.	• Reconocimiento de regiones poligonales y circulares. • Cálculo de perímetros y áreas de regiones poligonales y circulares. • Construcciones de figuras geométricas usando la regla y el compás. • Identificación de cuerpos geométricos y cálculo de sus volúmenes. • Reconocimiento de simetrías y transformaciones de figuras geométricas. • Identificación de elementos históricos relacionados con la evolución de la ciudad.	• Apreciación del uso de la Geometría en el diseño y trazado de los espacios urbanos. • Valoración de la historia y las características de las ciudades.
Ciencias Sociales	• **Valora** prácticas que están relacionadas con costumbres, tradiciones y creencias, describiendo sus características como elementos de representación y comunicación de ideas y sentimientos de la dominicanidad.	• Identidad cultural. Bienes culturales.	• Creación de dibujos para representar objetos, personas o ambientes rurales y urbanos, a partir del reconocimiento de sus formas, colores u otras características estéticas.	• Valoración y disfrute de los bienes culturales de su comunidad (tanto materiales como inmateriales) haciendo conciencia sobre la necesidad de su preservación.

INDICADORES DE LOGRO

- **Reconoce** regiones poligonales y circulares.
- **Calcula** el perímetro y el área de regiones poligonales y circulares.
- **Reconoce** diversos cuerpos geométricos y **conoce** sus características principales.
- **Calcula** el volumen de cuerpos geométricos diversos.
- **Realiza** proyecciones ortogonales de estructuras con características geométricas.
- **Realiza** transformaciones homotéticas de estructuras geométricas.
- **Identifica** y **resuelve** problemas relacionados con secciones poligonales y circulares, con transformaciones geométricas, geometría del espacio y cuerpos poliedros y redondos.
- **Utiliza** recursos virtuales y electrónicos: computadora, softwares educativos, juegos interactivos y otros, en la búsqueda de información.

- **Identifica** diversas expresiones del pensamiento latinoamericano como reacción a las políticas imperialistas y hegemónicas de los Estados Unidos.

Competencias fundamentales

Resolución de problemas: **Identifica** y **utiliza** estrategias, y **genera** alternativas de solución.

Valor transversal

Convivencia

Recursos digitales

Plataforma digital — CD

BIBLIOTECA DEL DOCENTE

- DOCUMENTOS PARA LA PLANIFICACIÓN
- GUÍA DE RECURSOS TIC

RECURSOS DE REFUERZO Y AMPLIACIÓN

LibroMedia

ACTIVIDAD INTERACTIVA

PÁGINA 193	Clasificación de prismas y pirámides

CD DE RECURSOS DIGITALES: PLAN REGULAR

Pleno — PRUEBA DE EVALUACIÓN FORMATIVA DE LA UNIDAD

Tiempo estimado de trabajo

Dos semanas.

Estrategias pedagógicas

- Recuperación de experiencias previas.
- Trabajo en equipo.
- Aprendizaje basado en problemas (ABP).

Unidad B

- **Lee** y **comenta** las informaciones expuestas en el apartado *Situación de aprendizaje*.
- **Responde** preguntas relacionadas con las informaciones expuestas en el apartado *Situación de aprendizaje*.
- **Recupera** experiencias vividas mediante la observación de las imágenes de la ilustración.
- **Analiza** un problema de la vida cotidiana vinculado a los conceptos y procedimientos que se desarrollarán en la unidad en el apartado *Analiza la situación*.
- **Plantea** soluciones al problema leído y analizado anteriormente, en el apartado *Plantea una solución*.

Esquema de la unidad

Geometría y sociedad

En el diseño y construcción de las ciudades, los conceptos de la Geometría juegan un papel importante, destacándose entre ellos

- Las secciones poligonales y circulares
- Transformaciones geométricas
- Geometría del espacio
- Poliedros y cuerpos redondos

B Geometría y sociedad

Conceptos

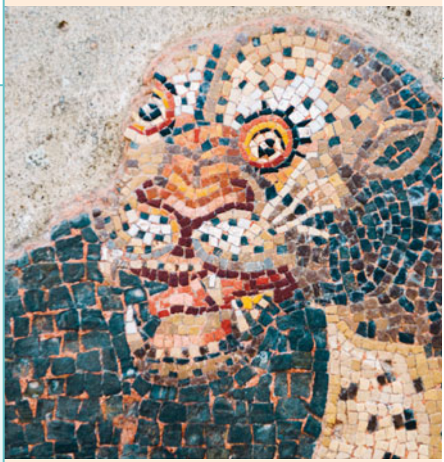
- Polígonos: perímetro y área.
- Transformaciones geométricas.
- Geometría del espacio.
- Poliedros y cuerpos redondos.

Procedimientos

- Resolución de problemas.
- Construcciones geométricas.

Actitudes y valores

- Apreciar el uso de la Geometría en el diseño y trazado de los espacios urbanos.
- Valorar la historia y las características de las ciudades.



Mosaico con león. Antiguo asentamiento urbano de la isla Mykonos, Grecia.

Situación de aprendizaje

"La aparición de la ciudad, significó un salto sin precedentes en la historia de la humanidad'', afirmó la profesora de Ciencias Sociales.

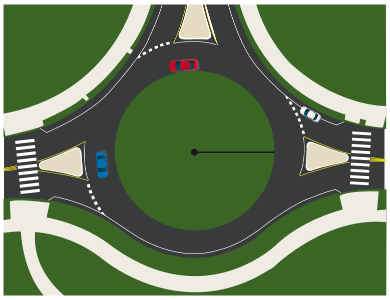
Luis comentó a Ana: “No me imagino cómo era la vida de la gente en comunidades sin calles , ni avenidas recorridas por medios de transporte; sin comercios, ni fábricas”. Ana comparte el asombro con Luis y toma la palabra para expresar ese sentimiento de extrañeza que le produjo a ambos imaginar cómo vivían las personas cuando no había ciudades como las actuales. Marta intervino señalando: “La humanidad ha vivido mucho más tiempo sin ciudades, en aldeas de pocos grupos familiares para luego empezar a nuclearse primero en ciudade-estado cerradas y autosuficientes”.

La clase termina cuando la profesora destaca las diferencias entre ciudades antiguas, medievales y modernas.

- Describe cómo ha cambiado la ciudad donde vives. Consulta a tus padres y abuelos.

ANALIZA EL PROBLEMA

Obtén, a partir de la vista aérea, el perímetro y la superficie del área verde de la rotonda. ***P** = 40.84 m; **A** = 132.73 m²*.



Escala: 0 500

Trabajo colectivo de apertura

- **Punto de partida:** Guie a sus estudiantes a leer y comentar en el grupo las informaciones expuestas en el apartado *Situación de aprendizaje*, que narra acerca de la discusión generada por varios estudiantes que expresaban su imaginación de cómo eran las comunidades antiguas sin calles, sin medios de transporte, sin comercios, etc.
- **Analiza el problema:** Observarán la representación de la superficie del área verde de una rotonda, luego, obtendrán el perímetro y la medida de esta superficie.

Vista panorámica de la avenida Winston Churchill. Santo Domingo, Distrito Nacional.

PLANTEA UNA SOLUCIÓN

- Piensa, antes de responder.
  - ¿Con cuál o cuáles datos cuentas para resolver el problema de la página anterior? *Con la escala de la vista.*
  - ¿Mediante cuál procedimiento podrías determinar las dimensiones reales de los objetos de la vista? Descríbelo en tu cuaderno paso a paso. *Medir la longitud de un objeto sobre la vista y usar la escala para conocer su tamaño real.*
- Luego de identificar los elementos necesarios para abordar la resolución del problema, obtén lo que se te pide.
- Socializa en el aula el procedimiento que escogiste para resolver el problema y muestra tus resultados.

Calle medieval con portal (siglo XIV). Besalú, Cataluña.

- **Plantea una solución:** En este apartado responderán preguntas relacionadas con los procedimientos a seguir para resolver el problema anterior y, luego, resolverán los puntos concernientes al problema y, finalmente socializarán en el aula el procedimiento que acogieron para resolver el mismo y mostrar los resultados.

Actividades de motivación

Pida a sus estudiantes que lean en la sección: *Conceptos y procedimientos*, los temas que trabajarán en esta unidad de aprendizaje y las actitudes y valores que estarán presentes en el desarrollo de la misma. Luego, pregunte a sus estudiantes: *¿Cómo se comunicaban las personas en la antigüedad, sin carreteras, ni medios de transporte? ¿En qué época de la historia comenzó a cambiar esa situación?*

Comunicar a sus estudiantes que, desde el inicio de esta unidad de aprendizaje, deberán elaborar un ensayo corto acerca de cómo han cambiado las ciudades desde la antigüedad, haciendo énfasis en la geometría de sus edificaciones, el trazado de sus calles, etc., para ser presentado al final del desarrollo de esta unidad de aprendizaje.

Actividad interactiva

Clasificación de prismas y pirámides

Actividad interactiva de recuperación de experiencias, en la que clasificarán los cuerpos geométricos representados y, luego, completarán las expresiones seleccionando las opciones correctas.

Cultivamos valores

Convivencia

Aproveche la situación planteada en el apartado *Situación de aprendizaje* y en las imágenes de la ilustración para conversar con sus estudiantes acerca de la presencia de la Matemática en el arte. Pregunte al grupo: *¿Qué formas geométricas identifican en la vista panorámica de la avenida Winston Churchill? ¿Creen que estas construcciones han sido pensadas en favorecer a los ciudadanos?* Motíveles para que justifiquen sus respuestas.

Indicadores de logro

- **Reconoce** regiones poligonales y circulares.
- **Calcula** el perímetro y el área de regiones poligonales y circulares diversas.

Más información

Comente a sus estudiantes que la densidad poblacional se emplea para nombrar el número de personas que habitan en una superficie determinada. Se trata del promedio de personas de una región o de un país relacionado a una cierta unidad de área o espacio terrestre.

Generalmente, la densidad poblacional se vincula a la cantidad de habitantes que residen en un área de un kilómetro cuadrado. El procedimiento para obtener la densidad poblacional consiste en dividir el total de habitantes entre la superficie territorial.

Por ejemplo: En una región que tiene una superficie de 30 kilómetros cuadrados viven 90 000 personas, la densidad de población de dicha localidad es de 3 000 habitantes por kilómetro cuadrado. En cada kilómetro cuadrado de superficie de esta región viven 3 000 personas.

Pregunte a sus estudiantes: *¿En qué lugares la densidad poblacional es más alta y por qué?*

1 Lee y, luego, haz lo que se te pide.

Al auge y esplendor de las ciudades antiguas siguió su decadencia y posterior desaparición. Roma, la capital de un imperio que abarcaba casi todo el mundo conocido, a partir del siglo III entra en un período de decadencia generado por conflictos sociales internos, las crisis económicas y las invasiones provenientes del exterior. Para el año 500 de la era común, Roma había dejado de ser la ciudad poderosa sede del gobierno central del imperio.

Casas medievales. Dubrovnik, Croacia.

Tras la caída de Roma, se inicia un proceso de reparto de tierras de acuerdo a costumbres bárbaras que desplazaría el centro de la vida económica al campo. Se inicia el feudalismo, donde el productor campesino terminó atado a la tierra del señor feudal, propietario. Siglos más tarde, alrededor de castillos y monasterios medievales empiezan a formarse núcleos humanos que serán las semillas de nuevas ciudades libres, con diversidad de oficios e instituciones.

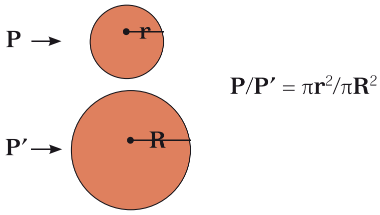
- Observen la tabla de la población mundial, en millones de personas, y hagan lo que se les pide.

Años	0	500	1 000	1 500	2 000
Población (P)	170	190	265	4 245	6 230

- Calculen el radio del círculo proporcional asociado a cada población (en cm).
  7.4 cm ; 7.8 cm ; 9.2 cm ; 11.6 cm ; 44.5 cm.
- Tracen sobre una cartulina los círculos proporcionales a las poblaciones del año 0 al año 1500.

Círculos proporcionales

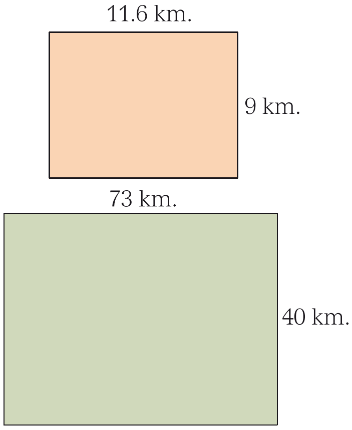
El valor de un dato estadístico puede representarse mediante el área de un círculo proporcional.



2 Lee y, luego, responde las preguntas.

Los rectángulos representan las áreas del Distrito Nacional y de la provincia de Santiago. Las proyecciones de población para el año 2015 fueron para el primero de 1 402 749 habitantes y para la segunda, de 1 543 362 habitantes.

- ¿Cuál es el significado del concepto de densidad poblacional de un territorio? Exprésalo de forma algebraica.
- ¿Cuál es la densidad poblacional del Distrito Nacional y de la provincia de Santiago?
  7.4 cm ; 7.8 cm ; 9.2 cm ; 11.6 cm ; 44.5 cm.
- ¿Cómo impacta la variable densidad de población en el desenvolvimiento de la vida cotidiana y a la gestión de los recursos de las comunidades?



Sugerencias didácticas

- **Inicio:** Forme a sus estudiantes en grupos pequeños, luego, pídales que lean y comenten el texto de la actividad 1, relacionado con el esplendor de las ciudades antiguas y su decadencia. Observarán la tabla de la población mundial y, luego, calcularán el radio del círculo proporcional asociado a cada población. Trazarán sobre cartulina los círculos proporcionales a las poblaciones del año 0 al 1 500.
- **Desarrollo:** Motive a los grupos para que lean las instrucciones de la actividad 2 y para que observen los rectángulos ubicados en el margen derecho de la página. A continuación, leerán las informaciones relacionadas con los datos poblacionales representados en los rectángulos y, después, responderán las preguntas.

3 Lee y, luego, haz lo que se te pide.

Los habitantes de las ciudades se benefician de los distintos servicios puestos a su disposición en comercios, oficinas gubernamentales, hospitales, bibliotecas, etc. La ubicación de estos lugares debe ser la óptima para facilitar el acceso y el ahorro de tiempo al ciudadano que se desplaza hasta cualquiera de ellos.

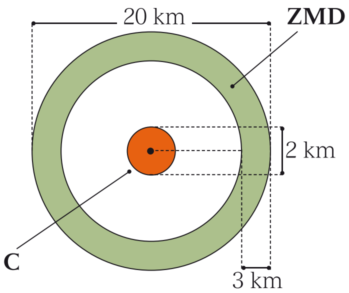
El modelo tradicional de ciudad tuvo una disposición radial: una plaza central alrededor de la cual se localizaban las instituciones de su gobierno, la banca, los centros educativos e iglesias. En cualquier ciudad, la planificación urbana es vital para garantizar un uso eficiente del espacio a sus ciudadanos.

- Observa el modelo de ciudad concéntrica y calcula el área del territorio de la ciudad correspondiente a la zona de migraciones diarias (**ZMD**).
  160.22 km².
- Calcula el porcentaje del territorio de la ciudad que representa a la zona de migraciones diarias.
  51%.
- Calcula cuántas veces mayor es la zona de migraciones que el centro (C) de la ciudad.
  51 veces.

■ Pienso y, luego responde: ¿cuán parecida al modelo concéntrico es la ciudad donde vives?

Mapa de Viena en el siglo XVI. La ciudad está organizada a partir de un centro donde se establecían los organismos del gobierno, el comercio y la banca, etc.

Modelo concéntrico de ciudad



4 Lean abajo el procedimiento para delimitar áreas de influencia en una ciudad y, luego, con la figura de la derecha como guía, hagan lo que se les pide.

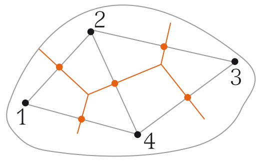
Procedimiento:

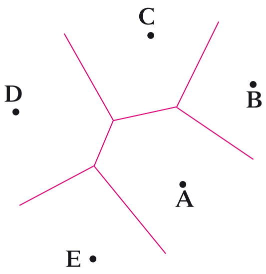
1º. Se trazan triángulos cuyos vértices sean los puntos 1, 2, 3 y 4. Ninguno de los lados de dichos triángulos debe cortarse.

2º. Se trazan las mediatrices de cada uno de los lados de los triángulos formados y se marcan los puntos donde se cortan estas mediatrices.

3º. Finalmente, se borran los triángulos y se dejan las mediatrices trazadas y sus intersecciones.

■ Observen las posiciones de un centro comercial (**A**), un hospital (**B**), un politécnico (**C**), una estación de policía (**D**) y una fiscalía (**E**) en una ciudad y tracenlas áreas de influencia de cada una de esas instituciones.



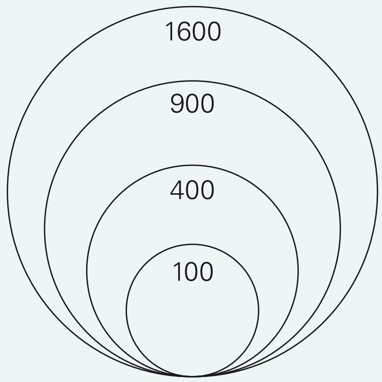


Más información

Comente a sus estudiantes que la simbología proporcional es una técnica basada en seleccionar una forma (círculo, cuadrado, triángulo) e ir variando su tamaño en proporción a las cantidades que se tengan que representar.

Este procedimiento es utiliza con frecuencia en el área de la cartografía cuantitativa, gracias a la facilidad que ofrece para su interpretación.

Los símbolos se utilizan para representar cantidades totales asociadas a puntos o a superficies, en cuyo caso se consideran como entidades puntuales, aunque realmente posean una extensión superficial.



- **Desarrollo:** Motive a los grupos formados anteriormente para que lean las instrucciones y el texto de la actividad 3, que trata sobre cómo deben estar distribuidos los servicios en las ciudades para facilitar a los ciudadanos el acceso a los mismos. Observarán el modelo de una ciudad concéntrica en el margen derecho de la página y, luego, realizarán los cálculos que se les indican. Pídales que busquen información y hagan comentarios sobre el modelo concéntrico de la ciudad de *Ernest Burguess* en 1925.
- **Cierre:** En la actividad 4, seguirán con atención los procedimientos descritos para delimitar el área de influencia en una ciudad y, luego, con la figura de la derecha como guía, realizarán las actividades propuestas. Ofrézcales las orientaciones necesarias.

Aprender a aprender

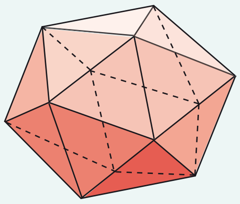
Pregunte a sus estudiantes: *¿Necesitaron de ayuda adicional para realizar alguna de las actividades propuestas? ¿En qué consistió la ayuda?*

Indicadores de logro

- **Reconoce** diversos cuerpos geométricos y **conoce** sus características principales.
- **Calcula** el volumen de cuerpos geométricos diversos.
- **Realiza** proyecciones ortogonales de estructuras con características geométricas.
- **Realiza** transformaciones homotéticas de estructuras geométricas.
- **Identifica** y **resuelve** problemas relacionados con secciones poligonales y circulares, con transformaciones geométricas, geometría del espacio y cuerpos poliedros y redondos.

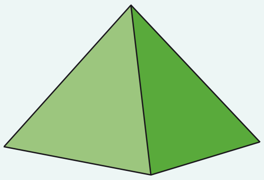
Más información

Icosaedro



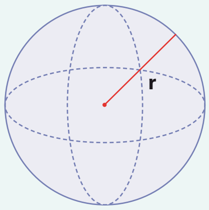
Volumen $\frac{5a^3}{6}\sqrt{\frac{7+3\sqrt{5}}{2}}$

Tetraedro



$\frac{a^3}{12}\sqrt{2}$

Esfera

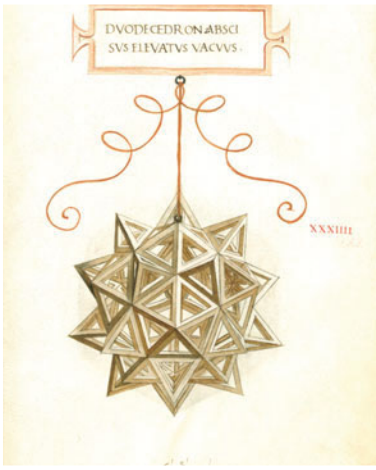


$v = \frac{4}{3}\ \pi \cdot r^3$

1 Lee y, luego, haz lo que se te pide.

Las figuras y cuerpos geométricos, desde la más remota antigüedad, han resultado interesantes a los seres humanos que han logrado la capacidad de reproducir sus formas con propósitos distintos: en sus construcciones, en el diseño de objetos de uso cotidiano y recreativos.

Objetos similares a poliedros regulares hallados en yacimientos neolíticos, muestran no solo un dominio técnico admirable en el tallado de la piedra en los habitantes de los primeras aldeas sino una apreciable capacidad para reconocer propiedades geométricas en algunas figuras. Desde aquellos primeros intentos de diseñar y construir objetos con formas regulares fueron necesarios siglos para asistir al nacimiento de la Geometría. Esto fue posible en las ciudades marítimas y comerciales de Grecia desde el siglo VI a.n.e.



Poliedro complejo. Dibujo de Leonardo Da Vinci para un libro del matemático Luca Pacioli.

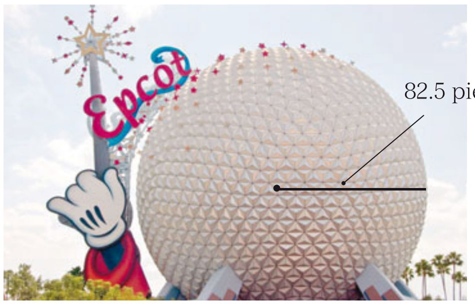
■ Determina el volumen de cada uno de los objetos siguientes.

V = 17.45 cm³.

Dado icosaédrico. Objeto de III - I a.n.e. encontrado en Egipto, con letras griegas en sus caras.

Pirámide de Tenochtitlan. Monumento ritual.

V = 32 724.92 m³.



Domo geodésico. Se encuentra en el Epcot Center, Disneylandia, EE.UU. *V = 2 350 000 pies³.*

Pirámide del Museo del Louvre. Pirámide de vidrio en un armazón de aluminio construida en 1989.

V = 7 098.67 m³.

Sugerencias didácticas

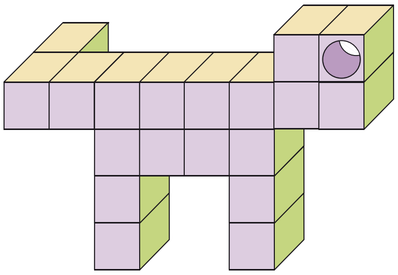
- **Inicio:** Forme a sus estudiantes en grupos pequeños, luego, pídales que lean y comenten las instrucciones de la actividad 1 y las informaciones sobre las figuras y los cuerpos geométricos y la capacidad de los seres humanos para reproducir sus formas con propósitos distintos. Expresa que objetos similares a poliedros regulares hallados en yacimientos neolíticos muestran domino técnico y admiración por las propiedades geométricas de algunas figuras.
- **Desarrollo:** Motive a los grupos para que determinen el volumen de cada uno de los objetos representados en las ilustraciones: *Dado icosaédrico*, *Pirámide de Tenochtitlan*, *Domo geodésico* y la *Pirámide del Museo del Louvre*.

2 **Lee y, luego, haz lo que se te pide.**

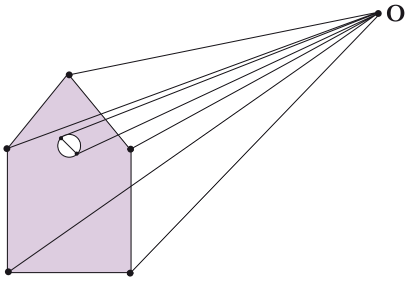
En el paisaje urbano coinciden elementos de la naturaleza y elementos propios del ingenio humano. Junto a las edificaciones hay áreas verdes y paseos con árboles; jardines interiores compartiendo el espacio con estructuras diseñadas por arquitectos y escultores en las grandes plazas comerciales.

La ciudad moderna es como una galería donde se expone una gran diversidad de objetos funcionales con muchas de las figuras y cuerpos objetos de estudio de la Geometría.

- La estructura siguiente, construida de acero, se muestra en una plaza comercial. Cópiala y determina sus tres proyecciones ortogonales.



3 **Copia y, luego, realiza sobre la figura dada una transformación de homotecia de razón 3/4 y centro O.**



- Investiga en la Internet acerca de los distintos estilos de la arquitectura urbana de nuestro país y su evolución histórica. Escribe un ensayo corto con anexos gráficos.


Edificio con estructura poliédrica en su fachada.

Más información

Proyecciones ortogonales

Las proyecciones ortogonales nos permiten dibujar en diferentes planos un objeto situado en el espacio.

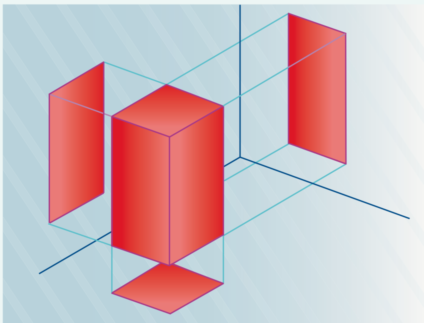
Este recurso hace posible contar con dos o más puntos de vista del objeto proyectado.

Permite representar cada uno de los lados del objeto por separado. Se utiliza frecuentemente en el campo del dibujo técnico para lograr la representación gráfica de un objeto.

Existen tres grandes planos de proyección: horizontal, vertical y lateral. La intersección de estos planos se produce en ángulos rectos y se forman diversos cuadrantes.

El *punto de vista del observador* es el lugar desde el cual se realiza la proyección el objeto.

Las *líneas de proyección* son las rectas paralelas que parten del observador, atraviesan al objeto, se proyectan en un plano, para de esta manera determinar la forma del objeto. Todas las líneas proyectadas son perpendiculares al plano de proyección, como pueden observar en la siguiente imagen.



- **Desarrollo:** Motive a los grupos formados anteriormente para que lean y comenten las instrucciones y el problema planteado en la actividad 2 y para que observen la estructura de acero que se muestra en el margen derecho de la página. Copiarán esta imagen y, luego, determinarán sus tres proyecciones ortogonales. Sería interesante que los resultados de esta actividad se presentarán en el grupo de estudiantes.
- **Cierre:** En la actividad 3, observarán el edificio con estructura poliédrica en su fachada cuya imagen se muestra en el margen derecho de la página. Copiarán esta figura y, después, realizarán sobre la misma una transformación de homotecia de razón y centro dados. Finalmente, investigarán sobre los distintos estilos de nuestra arquitectura urbana y su evolución histórica, con la finalidad de incorporar las informaciones obtenidas a su ensayo final sobre los cambios de las ciudades desde la antigüedad.

Aprender a aprender

Pregunte a sus estudiantes: *¿Qué aplicaciones cotidianas podrían tener los conceptos desarrollados en estas páginas? ¿Podrían dar ejemplos?*

Indicadores de logro

- **Reconoce** regiones poligonales y circulares. **Calcula** el perímetro y el área de regiones poligonales y circulares. **Reconoce** diversos cuerpos geométricos y **conoce** sus características principales. **Calcula** el volumen de cuerpos geométricos diversos. **Realiza** proyecciones ortogonales de estructuras con características geométricas. **Realiza** transformaciones homotéticas de estructuras geométricas. **Identifica** y **resuelve** problemas relacionados con secciones poligonales y circulares, con transformaciones geométricas, geometría del espacio y cuerpos poliedros y redondos. **Utiliza** recursos virtuales y electrónicos: computadora, softwares educativos, juegos interactivos y otros, en la búsqueda de información.

Competencias específicas

- Comunicativa.
- Modela y representa.
- Usa algoritmos.
- Resolución de problemas.

Competencias fundamentales

Modela y representa

Es necesario que los estudiantes adquieran las habilidades necesarias para reconocer regiones poligonales y circulares y para construir figuras geométricas diversas utilizando la regla y el compás.

Usa algoritmos

Seguir al pie de la letra las reglas y procedimientos para determinar el perímetro y el área de regiones poligonales y para calcular el volumen de cuerpos poliedros y redondos.

Conecta

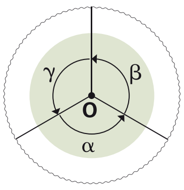
Aplicar los conocimientos geométricos para identificar elementos históricos de la evolución de la ciudad.

SABER HACER

Comunica

1 Observa la figura que muestra un ángulo triedro de vértice **O** y, luego, traduce la expresión algebraica al lenguaje coloquial.

La suma de los ángulos planos de un triedro es menor que cuatro ángulos rectos.

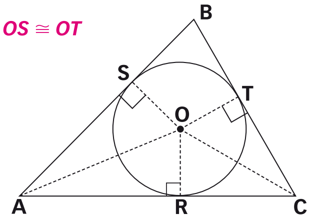


$\alpha + \beta + \gamma < 360^\circ$

Razona y argumenta

2 Explica por qué **O**, la intersección de las bisectrices de los ángulos **A** y **C**, es el centro de la circunferencia inscrita en el triángulo.

OR* ≅ *OS* ≅ *OT



Modela y representa

3 Lee y, luego, haz lo que se te pide.

En una comunidad se proyecta la construcción de una plaza limitada por un heptágono regular de 30 m de lado.

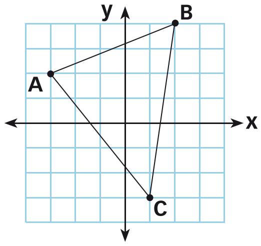
- Construye, utilizando cartabón y compás, una vista de planta de la plaza, con una escala: Escala: 0 ▬▬ 300 m
- Si la apotema del heptágono de la plaza mide 31.15 m, ¿cuál es su área? *32 707.5 m²*.
- ¿Cuánto miden sus ángulos internos y externos? *128° 34′ 17″; 51° 25′ 43″.*

Usa algoritmos

4 Responde la pregunta.

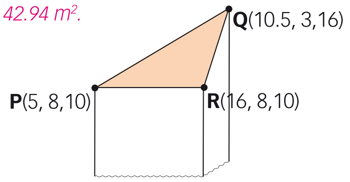
- ¿Cuántos lados tiene un polígono regular cuyos ángulos internos miden 165°? *24 lados.*

5 Obtén las nuevas coordenadas de los vértices del triángulo, si sobre él se efectúa la traslación **T**(4, – 6). ***A′*** *(1, – 4)* ; ***B′*** *(6, – 2)* ; ***C′*** *(5, – 9).*



6 Determina el área de la sección coloreada del siguiente elemento arquitectónico, conocidas las coordenadas de sus vértices.

A *= 42.94 m²*.

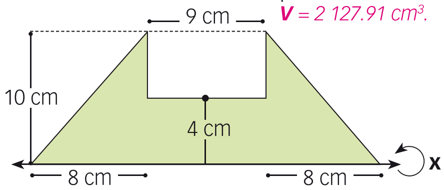


Conecta

7 Resuelve el problema.

En un taller metalmecánico se fabrica una pieza haciendo girar la figura alrededor del eje **X**. Determina el volumen de la pieza construida.

V *= 2 127.91 cm³*.



8 Identifica los ejes de simetría de los objetos.

Sugerencias didácticas para el *Saber hacer*

Las actividades propuestas en esta página están estrechamente vinculadas a los conceptos y procedimientos desarrollados a lo largo de esta unidad de aprendizaje. Haga que lean cuidadosamente las instrucciones y, después, verifique las respuestas obtenidas.

Es importante observar de cerca que los estudiantes siguen las instrucciones y los procedimientos para calcular, por ejemplo, áreas de regiones poligonales y circulares.

9 **Ensayo**. Lean el texto y, luego, hagan lo que se les pide.

Un ensayo es un género literario en el que se trata libremente un tema desde la perspectiva de quien lo escribe. Un ensayo puede incluir citas de estudiosos del tema abordado y hacer uso de apoyo gráfico.

Un ensayo consta de una introducción que presenta el tema a tratar, un desarrollo en el que se despliegan las ideas y argumentos del autor y una conclusión, que resume estas ideas.

- Con asistencia del docente se organizarán las lecturas de cada uno de los ensayos elaborados y se hará un espacio para las opiniones críticas que pudieran ser externadas en el grupo.

10 Responde las preguntas.

- ¿Qué características debe tener una ciudad que favorece a sus ciudadanos vivir de manera digna?
- ¿Consideras que la ciudad donde vives es un espacio de convivencia satisfactorio? Da razones que avalen tu respuesta.
- ¿Cómo pueden los ciudadanos contribuir con el mejoramiento de la ciudad donde viven? Da cinco recomendaciones.

APRENDIZAJE AUTÓNOMO

11 Marca según tus logros.

	Iniciado	En proceso	Logrado
Reconozco regiones poligonales y circulares.	▢	▢	▢
Calculo áreas de regiones poligonales y circulares.	▢	▢	▢
Construyo figuras geométricas con regla y compás.	▢	▢	▢
Identifico cuerpos geométricos y calculo sus volúmenes.	▢	▢	▢
Transformo figuras y reconozco simetrías.	▢	▢	▢
Identifico elementos históricos de la evolución de la ciudad.	▢	▢	▢

12 Reflexiona sobre tu aprendizaje y responde.

- ¿Estás satisfecho con tu rendimiento en el trabajo con los temas de la unidad?
- ¿Cuáles actividades te parecieron más interesantes? Expón tus razones.

Actitudes y valores

Convivencia

En la sección destinada a *Actitudes y valores*, actividad 10, responderán qué característica debe tener una ciudad que favorece a sus ciudadanos vivir de manera digna. Expresarán si consideran que la ciudad donde viven es un espacio de convivencia satisfactorio. Darán dos razones que avalen sus respuestas. Finalmente, dirán cómo pueden los ciudadanos contribuir con el mejoramiento de la ciudad donde viven. Sugerirán cinco recomendaciones.

Criterios de evaluación

Competencia comunicativa:

- Adaptación a las representaciones gráficas, simbólicas y numéricas a la situación de comunicación.

Uso de algoritmos:

- Seguimiento de las reglas, instrucciones y procedimientos.

Resolución de problemas:

- Adecuación de las estrategias y procedimientos al tipo de problema y al contexto.

Ensayo

Actividad **9.** Ensayo. Los estudiantes leerán las instrucciones, el concepto de ensayo y, luego, comentarán en el grupo las partes de un ensayo. Con la asistencia del docente, organizarán las lecturas de cada uno de los ensayos elaborados y se hará un espacio para las opiniones críticas que pudieran ser externadas en el grupo. Finalmente, socializarán y comentarán los resultados obtenidos.

Aprender a aprender

Motive a sus estudiantes para que expresen la importancia de las aplicaciones cotidianas de los conceptos desarrollados en esta unidad de aprendizaje. Por ejemplo, pregunte al grupo: *¿Qué importancia tiene el uso adecuado de los espacios en las construcciones?* Discuta las diversas respuestas con el grupo.