Matemática

1

PRIMER CICLO
SECUNDARIA

Guía de recursos didácticos

PROYECTO
SABER
HACER

SANTILLANA

La Guía de recursos didácticos **Matemática 1**, *del Proyecto* **Saber Hacer**,
del Primer Ciclo de la Educación Secundaria,
es una obra colectiva creada, concebida y diseñada por el equipo de investigaciones pedagógicas de Editorial Santillana, S. A., en la República Dominicana,
bajo la dirección editorial de **CLAUDIA LLIBRE**.

Su creación y desarrollo ha estado a cargo del siguiente equipo:

Texto: **Altagracia Santos**

Ilustración: Ruddy Núñez, José Amado Polanco, Tulio Matos y Guillermo Pérez.
Ilustración de portada: José Amado Polanco y Wilson Soto.

Fotografía: www.istockphoto.com y Archivo Santillana

Equipo técnico:
- *Corrección de estilo: Andrés Blanco Díaz y Luis Beiro Álvarez*
- *Diseño gráfico: María Cristina Brito Matos*
- *Separación de color: José Morales Peralta y César Matías Peguero*

Director de Arte y Producción: ***Moisés Kelly Santana***
Subdirectora de Arte: Lilian Salcedo Fernández

Editor: ***Andrés Molina Moloon***

Primera edición 2017

Editado por Santillana, S. A.
Calle Juan Sánchez Ramírez No. 9, Gascue.
Apartado Postal: 11-253 • Santo Domingo, República Dominicana.
Tels. (809) 682-1382 / 689-7749. Fax: (809) 689-1022
Web site: www.santillana.com.do

Registro Industrial: 58-347
ISBN: 978-9945-19-441-8

Impreso por Serigraf, S. A.
Impreso en República Dominicana
Printed in Dominican Republic

La presente edición se ha realizado de acuerdo con las últimas normas ortográficas aprobadas por la Real Academia Española (RAE).

Matemática

1

PRIMER CICLO
SECUNDARIA

Guía de recursos didácticos

PROYECTO
SABER
HACER

SANTILLANA

Índice

Una educación basada en competencias

El diseño y la puesta en marcha de un currículo suponen considerar el tipo de ciudadano que queremos como país y el tipo de sociedad en el que estamos inmersos: una sociedad en continuo proceso de transformación que afecta el modo cómo nos organizamos, cómo trabajamos, cómo nos relacionamos y cómo aprendemos dentro y fuera de la escuela.

Hoy, nuestra realidad exige que hombres y mujeres participen de manera activa en la identificación de los problemas, de sus causas, y en la proposición y ejecución de soluciones viables; que sean capaces de desempeñarse responsablemente con ellos mismos, con la naturaleza y con su comunidad, para que juntos construyan una sociedad más libre, más democrática y más justa. Todo esto no sería posible sin individuos capaces de adquirir y emplear conocimientos, habilidades, actitudes y valores a lo largo de su vida.

El cambio permanente de nuestra sociedad también se refleja en la escuela como institución encargada de formar a los nuevos ciudadanos. ¿En qué aspectos afectan estos cambios a la escuela? ¿Cuál es el modelo pedagógico que demandan?

Ante estas preguntas, los expertos en educación han concluido que la escuela debe poner énfasis en el desarrollo de las competencias.

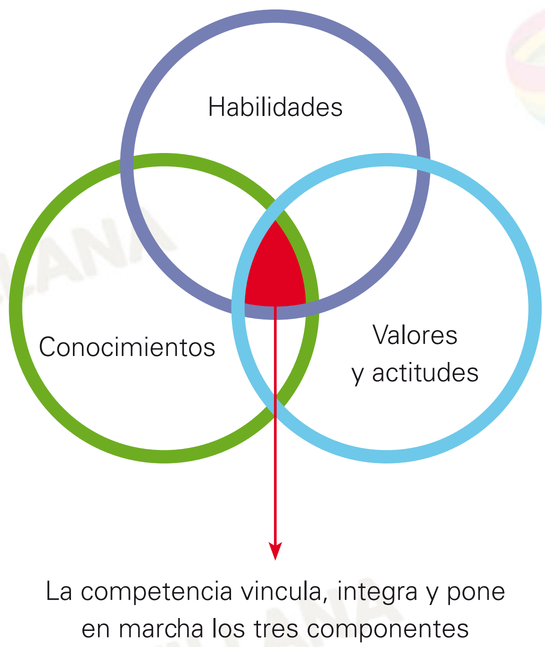
¿Qué es una competencia?

Una competencia es la habilidad de las personas para actuar apropiadamente ante situaciones específicas y en un momento determinado. Múltiples son las definiciones de competencias y sus aplicaciones al aprendizaje. En el marco del nuevo diseño curricular y en nuestro proyecto **SABER HACER** una competencia es la capacidad de poner en práctica, de una forma integrada, en contextos y situaciones diferentes, los conocimientos, las habilidades y las actitudes personales adquiridas. Dicho de otra manera, una competencia es la capacidad de los sujetos para utilizar el saber para aprender, actuar y relacionarse con los demás en contextos diversos.

Enfoque tradicional

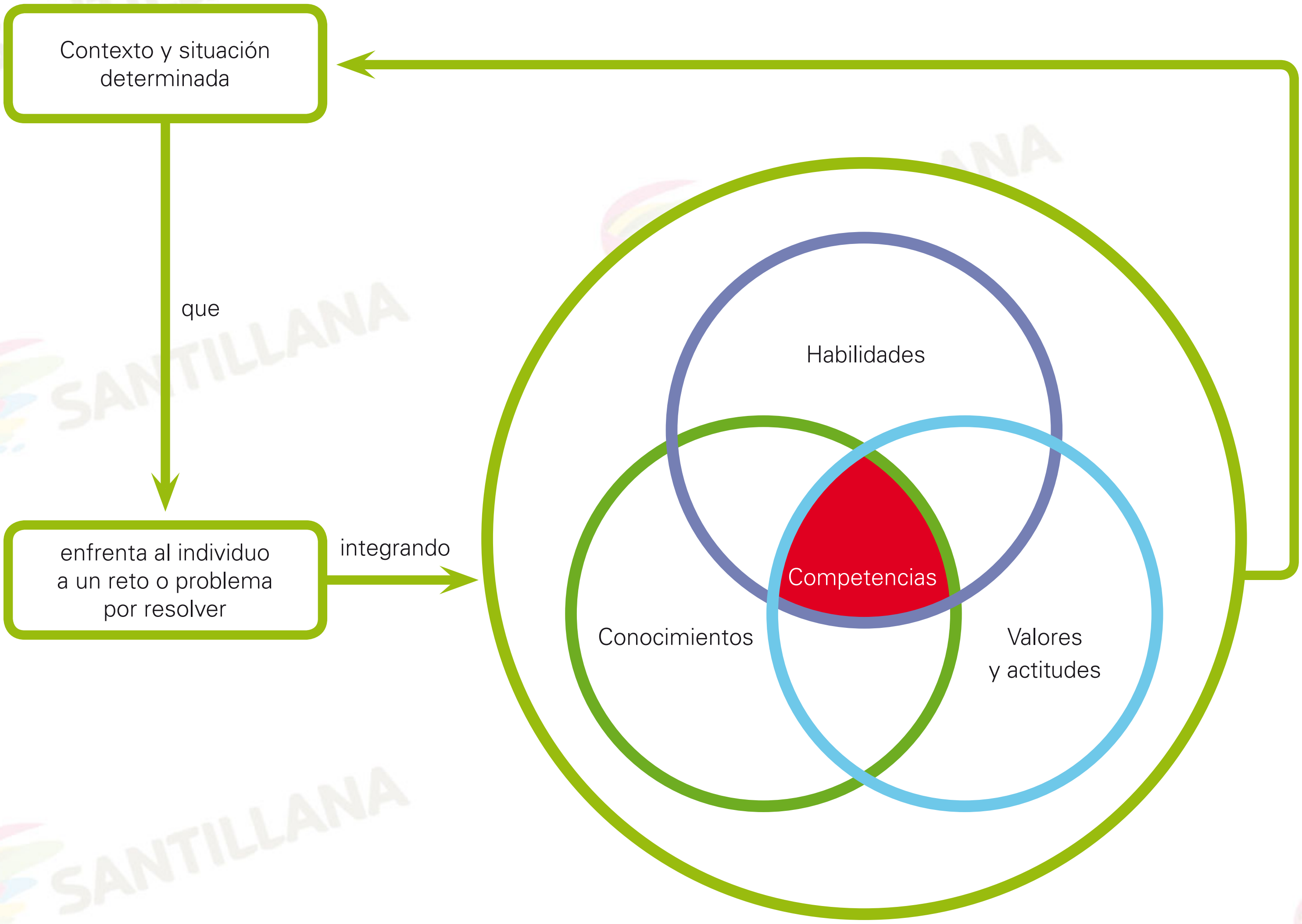
Por lo tanto, hay un desarrollo desvinculado:

Enfoque por competencias



Las competencias, entonces, movilizan y dirigen los saberes hacia la consecución de propósitos concretos, lo cual se evidencia cuando los conocimientos adquiridos y las habilidades desarrolladas se aplican a las tareas y retos cotidianos en entornos escolares y extraescolares.

Una forma de ejemplificar lo anterior es la siguiente:



Competencias fundamentales

Las competencias fundamentales son las competencias que todo individuo debe desarrollar a lo largo de su escolaridad, para poder desempeñarse eficazmente y en igualdad de condiciones en todas las oportunidades de realización personal y de ejercicio ciudadano. A continuación dichas competencias con los logotipos que las identifican en los materiales del proyecto **SABER HACER**.

- Competencia ética y ciudadana.
- Competencia comunicativa.
- Pensamiento lógico, creativo y crítico.
- Resolución de problemas.
- Competencia científica y tecnológica.
- Competencia ambiental y de la salud.
- Desarrollo personal y espiritual.

El proyecto SABER HACER en el nuevo diseño curricular

En el nuevo diseño curricular dominicano, las competencias fundamentales expresan las intenciones pedagógicas de mayor relevancia. Son competencias transversales que conectan de forma significativa todo el currículo.

Competencias fundamentales en el Nivel Secundario

Nivel de dominio III

Competencia ética y ciudadana

- Se reconoce como persona perteneciente a una cultura, un proyecto de nación y a una cultura humana planetaria.
- Evalúa las prácticas sociales e institucionales en el devenir histórico y en el presente.
- Contribuye a la creación de relaciones justas y democráticas para la convivencia.
- Actúa con autonomía, responsabilidad y asertividad en referencia a sus deberes y derechos.

Competencia comunicativa

- Reconoce los elementos y características de la situación de comunicación.
- Identifica los diversos modos de organización textual oral y escrita.
- Utiliza diversos códigos de comunicación.
- Autorregula su proceso de comunicación.
- Utiliza las tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) de forma efectiva.

Pensamiento lógico, creativo y crítico

- Elabora y argumenta sus juicios y opiniones.
- Aborda las situaciones y necesidades de forma creativa.
- Examina la validez de las ideas propias y ajenas.

Resolución de problemas

- Identifica y analiza el problema.
- Investiga y busca información.
- Identifica y utiliza estrategias, y genera alternativas de solución.
- Evalúa los resultados obtenidos.

Competencia científica y tecnológica

- Ofrece explicaciones científicas de fenómenos naturales y sociales.
- Aplica y comunica ideas y conceptos del conocimiento científico.

Competencia ambiental y de la salud

- Valora y cuida su cuerpo.
- Practica hábitos de vida saludable.
- Se compromete con la sostenibilidad ambiental.

Desarrollo personal y espiritual

- Desarrolla una autoimagen equilibrada y una sana autoestima.
- Establece relaciones constructivas y colaborativas.
- Descubre su ser en relación con la trascendencia.
- Proyecta su futuro y misión en la vida con autonomía, realismo y optimismo.

Competencias específicas correspondientes a las distintas áreas del conocimiento que contribuyen al desarrollo de las competencias fundamentales.

Valores integrados al desarrollo de las competencias fundamentales

Ciencia y tecnología · Identidad · Trabajo · Salud · Creatividad · Convivencia · Educación vial · Equidad de género · Conservación del medio ambiente

Indicadores de logro

Pistas que miden el nivel de dominio de las competencias específicas de cada área y de las competencias fundamentales.

Lengua Española

- Comprensión oral (CO).
- Producción oral (PO).
- Comprensión escrita (CE).
- Producción escrita (PE).

Formación Humana, Integral y Religiosa

- Valoración de la vida y la dignidad humana en apertura a la trascendencia.
- Convivencia fraterna y apertura a la trascendencia.

Ciencias de la Naturaleza

- Explicaciones científicas a problemas y fenómenos naturales.
- Aplicación de procedimientos científicos y tecnológicos para solucionar problemas o dar respuestas a fenómenos naturales.
- Actitudes críticas y preventivas ante fenómenos naturales, problemas y situaciones científicas y tecnológicas.

Educación Artística

- Expresión artística.
- Apreciación estética.

Matemática

- Razonamiento y argumentación.
- Empleo de algoritmos.
- Comunicación.
- Resolución de problemas.
- Modelación y representación.
- Utilización de herramientas tecnológicas.
- Conexiones.

Ciencias Sociales

- Ubicación en el tiempo y el espacio.
- Utilización crítica de fuentes de información.
- Interacción sociocultural y construcción ciudadana.

Educación Física

- Expresión y comunicación motriz.
- Dominio motriz.
- Aptitud física y deportiva.

Interdisciplinaridad

Integración o articulación de conceptos, procedimientos, actitudes y valores de distintas disciplinas.

PROYECTO SABER HACER

¿Por qué SABER HACER?

Todos tenemos una **pasión**. Desde su fundación, hace más de 50 años, Santillana no ha dejado de trabajar, investigar, realizar productos y servicios y buscar innovaciones que **mejoren la educación**, como forma de construir un mundo mejor para todos.

El fruto de este compromiso ha sido una larga historia de **grandes proyectos educativos**. Proyectos concebidos desde la realidad social y académica existente en cada momento, nacidos con vocación de acompañar a los estudiantes en su aventura de aprender y de dotar a los profesores de todas las herramientas y recursos necesarios para llevar a cabo la tarea de educar. Así, nuestro nuevo proyecto, **SABER HACER**, surge como respuesta a un nuevo diseño curricular, y a los intensos cambios que se están produciendo en todos los aspectos de nuestra vida.

Hoy, más que nunca, en la sociedad de la información, en un mundo cada vez más global, regido por un cambio rápido y constante, **la educación marca la diferencia**. Vivimos un presente de grandes interrogantes que merecen grandes respuestas. **Hay que educar hoy a los ciudadanos para un mañana que se está por construir**.

La educación se ha centrado tradicionalmente en la enseñanza de contenidos, se trataba de saber. Hoy, la comunidad educativa es consciente de que hay que dar un paso adelante: **además de saber hay que SABER HACER**. El **aprendizaje por competencias** es el modelo elegido para alcanzar con éxito los nuevos objetivos que la sociedad reconoce como necesarios en la educación de niños y adolescentes. Saber comunicar, interpretar, deducir, formular, valorar, seleccionar, elegir, decidir, comprometerse, asumir, etc., es hoy tan importante como conocer los contenidos tradicionales de nuestras materias. Necesitamos trabajar con ideas, ser capaces de resolver problemas y tomar decisiones en contextos cambiantes. Necesitamos ser flexibles, versátiles, creativos...

Las claves del proyecto SABER HACER

El objetivo: que los estudiantes adquieran las competencias que necesita un ciudadano del siglo XXI

Todos somos conscientes de que la sociedad actual requiere unas capacidades muy diferentes de las que se demandaban hasta hace poco tiempo. Necesitamos personas capaces de:

- Hacerse preguntas pertinentes.
- Informarse a través de fuentes diversas, textuales o gráficas, lo que implica:
  - Buscar información.
  - Interpretar esa información de forma coherente con el tipo de fuente.
- Pensar reflexiva, crítica y creativamente.
- Crearse una opinión, un juicio y tomar decisiones adecuadas.
- Comunicarse oralmente y por escrito.
- Hacer conexiones: conectar lo aprendido con la vida real (próxima o lejana) y conectar los saberes de las distintas materias entre sí.
- Participar y comprometerse, dar servicio a la comunidad.
- Trabajar cooperativamente con otros.
- Tener siempre presente la perspectiva ética, tener inteligencia emocional y ética.
- Aprender a lo largo de la vida.

Este objetivo se materializa en la estructura de las unidades didácticas del material del estudiante y en los distintos proyectos que conforman la Biblioteca del Profesorado.

Una potente oferta digital

- **Plataforma digital Santillana Compartir**, un entorno de contenidos educativos y gestión del aprendizaje y la labor docente y administrativa. Contiene gran diversidad de recursos digitales e interactivos organizados de acuerdo al currículo dominicano y que sirven de apoyo al proceso de enseñanza y aprendizaje, enriqueciendo dicho proceso y la labor docente.
- **Libromedia**, el libro en papel enriquecido con recursos digitales y potentes herramientas.
- **Libroflip**, libros en versión digital de las áreas complementarias.
- **Recursos digitales** diversos que complementan todos nuestros proyectos.

Componentes del proyecto SABER HACER Secundaria 1.º a 3.º

Materiales para el o la estudiante:

Libro del estudiante
de 1.er a 3.er grado
de la secundaria.

Presenta secuencias didácticas orientadas al logro de las competencias del área y las competencias fundamentales.

Cuaderno de actividades
de 1.º a 3.º de la secundaria.

Actividades de los temas de cada unidad organizadas en fichas correspondientes a cada tema del libro.

Libromedia del estudiante de 1.er a 3.er grado: Esta aplicación o versión digital del libro se encuentra alojada en la plataforma digital del proyecto **Santillana Compartir**. Este libro digital integra las TIC en el proceso de enseñanza-aprendizaje, a través de recursos digitales que enriquecen y refuerzan dicho proceso:

- Animaciones
- Actividades interactivas
- Audios
- Videos
- Presentaciones
- Galería de imágenes...

CD del estudiante Santillana Plan regular: CD con recursos digitales organizados en carpetas por unidades. Los recursos incluidos sirven para reforzar o evaluar diferentes temas. Dentro de estos tenemos:

- Actividades interactivas
- Animaciones
- Audios
- Documentos con textos de ampliación de temas.

Materiales para el o la docente:

Guía didáctica de 1.er a 3.er grado. Constituye el documento que articula la propuesta técnico-pedagógica y ofrece lo siguiente:

- Descripción del proyecto **SABER HACER** Secundaria.
- Fundamentos curriculares.
- Presentación de los materiales del estudiante y del docente.
- Secuencia de contenidos.
- Programación por unidad.
- Guiones didácticos con sugerencias metodológicas, incluyendo la integración de los recursos digitales a la programación y secuencia didáctica de cada contenido.

Libromedia del docente: alojado en la plataforma digital **Santillana Compartir** de 1.er a 3.er grado. Versiones digitales de las Guías didácticas que integran las TIC en el proceso de enseñanza-aprendizaje. Contiene todos los recursos digitales del Libromedia del estudiante. Este Libromedia se obtiene a través de nuestra plataforma digital (LMS) e-stela.

e-stela es nuestra plataforma digital de alojamiento y gestión de contenidos dentro del proyecto Santillana.Compartir.

CD del docente Santillana Plan regular: **CD** con recursos digitales organizados en carpetas. Dentro de los recursos tenemos: Actividades interactivas, animaciones, documentos con textos de ampliación de temas y fichas de actividades.

Más una carpeta de **Biblioteca del docente**, con otros recursos que enriquecen el desempeño de la labor docente, tales como documentos para la planificación, entre otros.

Competencias de Matemáticas para el Primer Curso del Nivel Secundario

Competencias específicas

Razona y argumenta:

- **Identifica** y **relaciona** los números enteros y racionales.
- **Crea** y **expresa** argumentos matemáticos sobre las propiedades de los números enteros y racionales.
- **Obtiene** conclusiones a partir de los números enteros utilizando el pensamiento lógico-formal.
- **Utiliza** las ecuaciones de matemática financiera asociadas al cálculo del monto como herramienta de la aritmética comercial.
- **Distingue** las nociones de horizontalidad, verticalidad, paralelismo y perpendicularidad.
- **Identifica** y **construye** ángulos: correspondientes, alternos internos, alternos externos y opuestos por el vértice.
- **Identifica** las propiedades de los diferentes tipos de ángulos estudiados y las aplica en la resolución de problemas.
- **Justifica** las demostraciones geométricas realizadas del teorema de Pitágoras.
- **Construye** el concepto de magnitud.
- **Usa** las unidades fundamentales de medidas de masa, tiempo y temperatura.
- **Analiza** a qué se deben las diferencias de temperaturas en el contexto internacional.
- **Determina** área y volúmenes de prismas y pirámides.
- **Identifica** los conceptos de población, muestra, datos y frecuencia.
- **Realiza** predicciones fundamentándose en resultados de eventos, las verifica y las comprueba.
- **Determina** y **analiza** los resultados de un experimento aleatorio.
- **Desarrolla** el hábito del pensamiento racional al utilizar propiedades y reglas matemáticas y al formular explicaciones o mostrar soluciones.
- **Interpreta** y **juzga** la información representada en diferentes gráficos estadísticos.
- **Argumenta** sobre el buen uso y el mal uso de la información estadística.

Comunica:

- **Escribe** y **modela** un número racional a través de diferentes expresiones: gráfica, como fracción quebrada y como un decimal.
- **Expresa** el tanto por ciento como fracción decimal y como número decimal.
- **Usa** la simbología propia de ángulos, pares ordenados, y las diferentes posiciones de dos o más rectas.
- **Expresa** con la notación adecuada las experiencias con medidas que ha vivenciado en su diario vivir.
- **Usa** los símbolos de las unidades de masa, tiempo y temperatura en diferentes sistemas de medidas.
- **Lee** y **comunica** información en diferentes tipos de gráficas.
- **Representa** datos en tablas y en diferentes gráficos estadísticos.
- **Comunica** la información proveniente de estudios sencillos a través de los gráficos adecuados a cada situación.
- **Expresa** los resultados de experimentos aleatorios realizados en equipo.

Modela y representa:

- **Aborda** situaciones problemáticas, como aproximación de la realidad física, utilizando modelos simples de la matemática, números enteros y diferentes expresiones racionales: razones, proporciones, porciento, entre otros modelos matemáticos.
- **Representa** gráficamente el porciento de un número.
- **Representa**, con lenguaje matemático y gráficamente, segmentos y diferentes ángulos estudiados, pares ordenados y figuras geométricas en el plano cartesiano.
- **Realiza** construcciones de ángulos.
- **Expresa** con la notación adecuada las experiencias con medidas que ha vivenciado en su diario vivir.
- **Usa** los símbolos de las unidades de masa, tiempo y temperatura en diferentes sistemas de medidas.
- **Elabora** tablas y representaciones de datos de situaciones del contexto, utilizando diferentes organizadores gráficos estadísticos.

Competencias específicas

Conecta:

- **Aplica** las operaciones con números racionales y de matemáticas financieras para calcular operaciones y resolver problemas de situaciones del contexto, de otras ciencias y de la propia matemática.
- **Representa** en el plano cartesiano la trayectoria de un ciclón, usando la relación que existe entre los pares ordenados y la latitud y la longitud del desplazamiento de los fenómenos atmosféricos.
- **Usa** unidades de medida de diferentes magnitudes para resolver problemas de la propia matemática, de otras ciencias y del contexto.
- **Utiliza** el lenguaje estadístico y probabilístico para comunicar, representar y resolver problemas de diferentes situaciones de otras áreas disciplinares, del contexto y de la propia matemática.

Resuelve problemas:

- **Resuelve** problemas de situaciones cotidianas que involucren diferentes operaciones con números racionales y matemáticas financieras.
- **Formula** un plan para resolver problemas con operaciones de números racionales.
- **Resuelve** problemas para cuya solución se apliquen el teorema de Pitágoras, las diferentes propiedades y las relaciones existentes entre los ángulos alternos internos, ángulos alternos externos, ángulos correspondientes y ángulos opuestos por el vértice.
- **Resuelve** problemas que involucren diferentes temperaturas, medidas de longitud, áreas, volumen y de capacidad.
- **Resuelve** problemas de cálculos de áreas lateral y total y de volumen de prismas cuadrangular y triangular.
- **Resuelve** problemas de interpretación de tablas y gráficos estadísticos que aparezcan en libros, periódicos, revistas y otros medios.
- **Resuelve** problemas usando las TIC en trabajos y actividades en el contexto de la vida.

Utiliza herramientas tecnológicas:

- **Utiliza** soportes tecnológicos como las calculadoras científicas, la Internet u otros dispositivos para calcular operaciones con números racionales.
- **Construye** rectas perpendiculares, paralelas, bisectrices de ángulos, usando instrumentos apropiados o dispositivos electrónicos.
- **Utiliza** calculadoras científicas para hacer conversiones entre unidades diferentes y entre sistemas de medidas.
- **Utiliza** instrumentos de medidas como la balanza, termómetros y otros, para representar situaciones del contexto de los estudiantes.
- **Usa** dispositivos electrónicos como las calculadoras científicas y softwares como Excel y otros para calcular y graficar datos estadísticos sobre determinadas situaciones.

Utiliza algoritmos:

- **Ejecuta** los procedimientos necesarios y en el orden correspondiente para alcanzar la solución de un problema matemático.
- **Sigue** reglas e instrucciones en un orden sucesivo en la realización de las actividades propuestas.

Indicadores de logro de Matemáticas para el Primer Curso del Nivel Secundario

Indicadores de logros

- **Identifica** números enteros en un conjunto de números dados.
- **Representa** números enteros en la recta numérica.
- **Determina** el opuesto de un entero dado y lo representa en la recta numérica.
- **Compara** números enteros usando la recta numérica y los símbolos de relación.
- **Ordena** números enteros en la recta numérica.
- **Reconoce** y **escribe** las propiedades de los números enteros.
- **Determina** el valor absoluto de un número entero dado.
- **Realiza** operaciones con los números enteros.
- **Estima** el resultado de las operaciones de números enteros, verificando si el resultado es razonable usando la calculadora.
- **Resuelve** problemas del contexto donde aplica operaciones de los números enteros.
- **Utiliza** correctamente la notación de las operaciones de potenciación.
- **Expresa** situaciones del contexto utilizando las potencias y **aplica** correctamente las propiedades de las mismas.
- **Expresa** la radicación como operación inversa de la potenciación.
- **Utiliza** la notación de la operación de radicación con números enteros positivos.
- **Estima** raíces (cuadrada y cúbica) de números enteros positivos menores que 100.
- **Reconoce** y **utiliza** las propiedades de los radicales.
- **Calcula** raíces cuadradas y cúbicas de números enteros, al menos menores que 100, usando el concepto de potenciación.
- **Simplifica** en forma correcta expresiones radicales que involucran sumas, restas, productos y cocientes utilizando las propiedades de los radicales en los números reales.
- **Explica** con argumentos lógicos las soluciones de algunos juegos y entretenimientos matemáticos como: sudoku, crucigramas y problemas de ingenios.
- **Demuestra** interés por juegos cooperativos que recrean las prácticas de operaciones y la resolución de problemas (dominó, monopolio, sudoku, crucigrama, ajedrez…otros).
- **Argumenta** la utilidad de los lenguajes numéricos y gráficos para representar, comunicar o resolver diferentes situaciones del contexto.
- **Utiliza** recursos virtuales y electrónicos (computadora, *softwares* educativos, juegos interactivos y otros) en la búsqueda de información, construcción y profundización de conceptos matemáticos.
- **Utiliza** diferentes modalidades del cálculo con números racionales: mental, escrito y electrónico.
- **Reconoce** y **utiliza** en forma correcta las reglas que indican el orden en que deben realizarse operaciones combinadas (adición, sustracción, multiplicación, división y potenciación) de números racionales, y **verifica** los resultados con la calculadora.
- **Comprende** el sentido del tanto por ciento como fracción de denominador 100, y lo representa gráficamente.
- **Expresa** el tanto por ciento como fracción decimal y como número decimal.
- **Calcula** porcentajes de cantidades dadas y las representa haciendo uso de recursos como el papel cuadriculado, entre otros.
- **Calcula** el interés simple, mensual y anual, y el monto de una deuda al final de un periodo.
- **Resuelve** problemas diversos relacionados con el porcentaje en situaciones de diversos contextos.
- **Resuelve** problemas que impliquen el cálculo de interés simple y monto sobre diferentes situaciones de la cotidianidad.
- **Estima** de forma aproximada medidas de segmentos y de ángulos dados y **las verifica** con la regla y el transportador.
- **Estima** de forma aproximada medidas de ángulos dados y **las verifica** con el transportador.
- **Realiza** el cálculo mental de la medida del complemento y suplemento de un ángulo, en grados, minutos y segundos.
- **Construye** rectas paralelas y perpendiculares, bisectriz de un ángulo y mediatriz de un segmento utilizando regla, transportador y compás.
- **Enuncia** el teorema de Pitágoras.
- **Demuestra** el teorema de Pitágoras usando papel cuadriculado y regla.
- **Construye** modelos con el triángulo rectángulo del teorema de Pitágoras usando papel cuadriculado y regla.
- **Resuelve** problemas cuya solución se obtiene aplicando el teorema de Pitágoras.
- **Identifica** puntos del plano dados sus pares ordenados (abscisa, ordenada) de números enteros y fraccionarios usando papel cuadriculado.
- **Identifica** ángulos correspondientes, alternos internos, alternos externos y opuestos por el vértice.
- **Resuelve** problemas aplicando las propiedades de los ángulos correspondientes, alternos internos, alternos externos y opuestos por el vértice.
- **Utiliza** instrumentos tales como compás, transportador y reglas en la construcción de figuras geométricas.
- **Utiliza** el sistema de coordenadas cartesianas en la localización de puntos en el plano.
- **Valora** la utilidad de la matemática en la ubicación espacial haciendo localización de coordenadas (para pronósticos de tiempo, huracanes, terremotos, navegación aérea, marítima y otros).

Indicadores de logros

- **Mide** ángulos y **los expresa** en grados, minutos y segundos.
- **Identifica**, en diferentes situaciones del entorno, la unidad de medida que se le debe aplicar.
- **Utiliza** mediciones y estimaciones de magnitudes en situaciones de la vida diaria.
- **Construye** y **utiliza** el termómetro para la medición de temperaturas en grados centígrados y Fahrenheit.
- **Estima** y **convierte** temperaturas de grados centígrados a Fahrenheit y viceversa. **Interpreta** tablas de medidas de temperaturas del contexto internacional.
- **Analiza** y **compara** tablas de medidas de temperatura del contexto internacional.
- **Explica** y **argumenta** a qué se deben las diferencias de temperaturas en el contexto internacional.
- **Utiliza** y **relaciona** unidades de tiempo (milenios, siglos, décadas, años, meses, semanas, días, horas y minutos) para establecer la duración de diversos sucesos.
- **Despeja** las variables que aparecen en las diferentes fórmulas.
- **Desarrolla** su creatividad en la resolución de problemas.
- **Usa** fórmulas para calcular perímetros y áreas de triángulos y cuadriláteros.
- **Estima** y **calcula** el área y volumen de cubos, prismas y pirámides rectos o de cualquier término implicado en las fórmulas.
- **Manifiesta** interés por conocer las diferentes escalas de medida de la temperatura.
- **Aprecia** la importancia del manejo de las unidades de medida para resolver problemas de la cotidianidad.
- Actitud de rigor, flexibilidad y originalidad en los procesos seguidos en la resolución de problemas de áreas y volúmenes.
- **Explica** los conceptos de estadística describiendo sus elementos: población, muestra…
- **Identifica** y **explica** las variables estadísticas cualitativas y cuantitativas valorando su utilidad en la interpretación de temáticas ambientales y económicas.
- **Recolecta** y **organiza** información obtenida de diferentes fuentes.
- **Distribuye** datos agrupados en una tabla de frecuencia.
- **Construye** diferentes tipos de gráficos estadísticos (de barras, lineales, circulares y otros) sobre diferentes temáticas ambientales, sociales, económicas del contexto nacional e internacional.
- **Compara** información gráfica que usualmente aparece en los medios de comunicación con las descripciones o textos que les acompañan, y evalúa la coherencia entre ambas.
- **Interpreta** la información contenida en gráficos estadísticos relacionados con diferentes medidas de situaciones problemas que aparecen en textos como periódicos, revistas y medios virtuales.
- **Calcula** medidas de tendencia central.
- **Presenta** resultados de investigaciones estadísticas realizadas en su contexto utilizando herramientas tecnológicas.
- **Formula** y **resuelve** situaciones problemáticas que involucren medidas de tendencia central sobre proyectos de investigación realizados por equipos de trabajo.
- **Escribe** reportes sobre informaciones contenidas en gráficos estadísticos obtenidos en diferentes medios.
- **Realiza** diferentes experimentos aleatorios simples (con dados, monedas, ruletas, etc.) para identificar los resultados posibles y los registran en tablas de frecuencia que involucren una gran cantidad de iteraciones.
- **Estima** la probabilidad de ocurrencia de un evento asociado a un experimento aleatorio.
- **Determina** eventos que tienen mayor ocurrencia a partir del registro de los resultados de un experimento aleatorio en tablas de frecuencias.
- **Señala** si un suceso es más o menos probable, a partir de la interpretación de información entregada en una tabla de frecuencia.
- **Predice** la probabilidad de ocurrencia de un evento, a partir de la simulación (un número grande de iteraciones) de un experimento.
- **Determina** todos los resultados posibles de un experimento aleatorio, utilizando un diagrama de árbol.
- **Determina** la probabilidad teórica y experimental de un evento utilizando experimentos o simulaciones.
- **Calcula** el valor esperado de un evento.
- **Disfruta** del trabajo en matemática que implique cálculos estadísticos.
- **Muestra** interés por crear y utilizar representaciones gráficas sobre datos estadísticos a través del uso de dispositivos electrónicos.
- **Muestra** rigor, flexibilidad y originalidad en los procesos seguidos en el cálculo de medidas estadísticas de tendencia central.

Secuencia de contenidos del Primer Ciclo del Nivel Secundario

Contenidos

Primer grado

Numeración y operaciones

- Número entero, opuesto.
- Operaciones con enteros y propiedades.
- Orden de las operaciones y signos de agrupación.
- Potenciación y propiedades.
- Radicación y propiedades.
- Números racionales, valor absoluto.
- Notación científica.
- Variación proporcional.
- Variaciones directas e inversas.
- Matemática financiera: porciento, interés simple, capital y monto.

Geometría

- Rectas paralelas y perpendiculares.
- Bisectriz de un ángulo y mediatriz de un segmento.
- Ángulos formados por dos rectas paralelas cortadas por una secante, ángulos correspondientes, ángulos alternos internos y externos, y ángulos opuestos por el vértice, así como sus propiedades.
- Ángulos complementarios y suplementarios.
- Coordenadas cartesianas, pares ordenados, abscisa y ordenada.
- Teorema de Pitágoras.

Medidas

- Sistema sexagesimal en la medida de ángulos.
- Masa: tonelada, gramo y kilogramo.
- Tiempo: milenios, siglos, décadas, años, meses, semanas, días, horas, minutos y segundos.
- Unidades de medida.
- Temperatura, punto de congelación, temperatura ambiente, temperatura del cuerpo y punto de ebullición.
- Termómetro.
- Área de prisma recto de base triangular o trapezoidal, pirámide recta de base cuadrangular o triangular y altura de una pirámide recta.
- Volumen de prismas y de pirámides.

Recolección, organización y análisis de datos

- Frecuencia simple, relativa y acumulada. Población y muestra.
- Gráficos: circulares, histogramas, polígonos de frecuencias, de tallo y hojas, y de caja y bigotes.
- Medidas de tendencia central: promedio, moda, mediana.
- Experimento aleatorio.
- Evento de un experimento aleatorio.

Segundo grado

- Ocurrencia de un evento. Probabilidad de ocurrencia.
- Probabilidad experimental y teórica de un evento y espacio muestral.

Numeración

- Números reales. Números irracionales.
- Raíces cuadradas y cúbicas de números enteros positivos que no son cuadrados o cubos perfectos.
- Número π.
- Concepto y clasificación de los números reales.
- Propiedades generales de los números reales.
- Las propiedades en los números reales de la: adición, sustracción, multiplicación, división, potenciación y radicación.
- Patrones numéricos.

Álgebra

- Expresiones algebraicas.
- Lenguaje ordinario-lenguaje algebraico.
- Elementos de un término.
- Conceptos de igualdad y ecuación.
- Propiedad fundamental de una igualdad.
- Concepto de intervalo, su clasificación y representación.
- Propiedades de la desigualdad e inecuaciones.

Matemática financiera

- Interés compuesto.
- Periodos de capitalización.

Geometría

- Plano cartesiano.
- Distancia entre dos puntos. Fórmula de Herón.
- Teorema fundamental del triángulo.
- Área de cuerpos redondos (cono, cilindro y esfera).
- Volumen de cuerpos redondos.

Estadística y probabilidad

- Medidas de dispersión y posición.
- Experimentos aleatorios simples y compuestos.
- Espacio muestral. Diagrama de árbol, gráfico de barras, histograma, polígono de frecuencia y gráfico circular.

Secuencia de **contenidos** del Primer Ciclo del Nivel Secundario

Tercer grado

Contenidos

Numeración, Polinomios

- Concepto de polinomio (como expresión algebraica).
- Grado de un polinomio en una variable real.
- Tipos de polinomios según el número de términos y su grado.
- Polinomios especiales: polinomio nulo, polinomio constante y polinomio mónico.
- Reglas para operar con polinomios.
- Productos y cocientes notables (cuadrado de un binomio, cubo de un binomio, producto de la suma por la diferencia).

Numeración. Factorización

- Propiedades de raíces y factores de un polinomio.
- Concepto de factorización.
- Teorema de los ceros racionales.
- Regla de los signos de Descartes.
- Regla de Ruffini.
- Operatoria con expresiones algebraicas racionales e irracionales (radicales con índices iguales y diferentes).

Numeración, ecuaciones y funciones

- Igualdades e identidades.
- Ecuaciones de primer grado con coeficientes racionales e irracionales.
- Ecuaciones con fracciones.
- Función: dominio y rango.
- Ecuación general de la recta.
- Propiedades del valor absoluto.
- Inecuaciones lineales con coeficientes racionales e irracionales.

Numeración, polígonos

- Concepto de polígono regular e irregular.
- Polígonos convexos y cóncavos.
- Interior y exterior de un polígono. Ángulo central y apotema.
- Clasificación de los polígonos por el número de lados y por las medidas de sus lados y sus ángulos.
- Diagonal de un polígono.
- Diagonales desde un vértice de un polígono.
- Total de diagonales de un polígono.
- Ángulo interior y exterior de un polígono.
- Teoremas sobre ángulos internos y externos de un polígono.
- Área de regiones planas.
- Área de regiones planas.
- Área de triángulos.
- Fórmula de Herón.
- Principios sobre:
  - Suma de las medidas de los ángulos interiores de un polígono regular.
  - Suma de las medidas de los ángulos exteriores de un polígono regular.
  - Medidas de ángulos.
  - Relaciones entre segmentos en polígonos regulares de 3, 4, 5 y 6 lados.

Numeración, números complejos

- Números imaginarios. Potencias de i. Números complejos.
- Ecuaciones cuadráticas. Naturaleza de las raíces de ecuación cuadrática
- Otros tipos de ecuaciones: bicuadráticas, de exponentes fraccionarios, racionales, irracionales, ecuaciones de orden mayor que dos.
- Sistemas de ecuaciones lineales con dos variables.

Numeración. Lógica y Teoría de Conjuntos

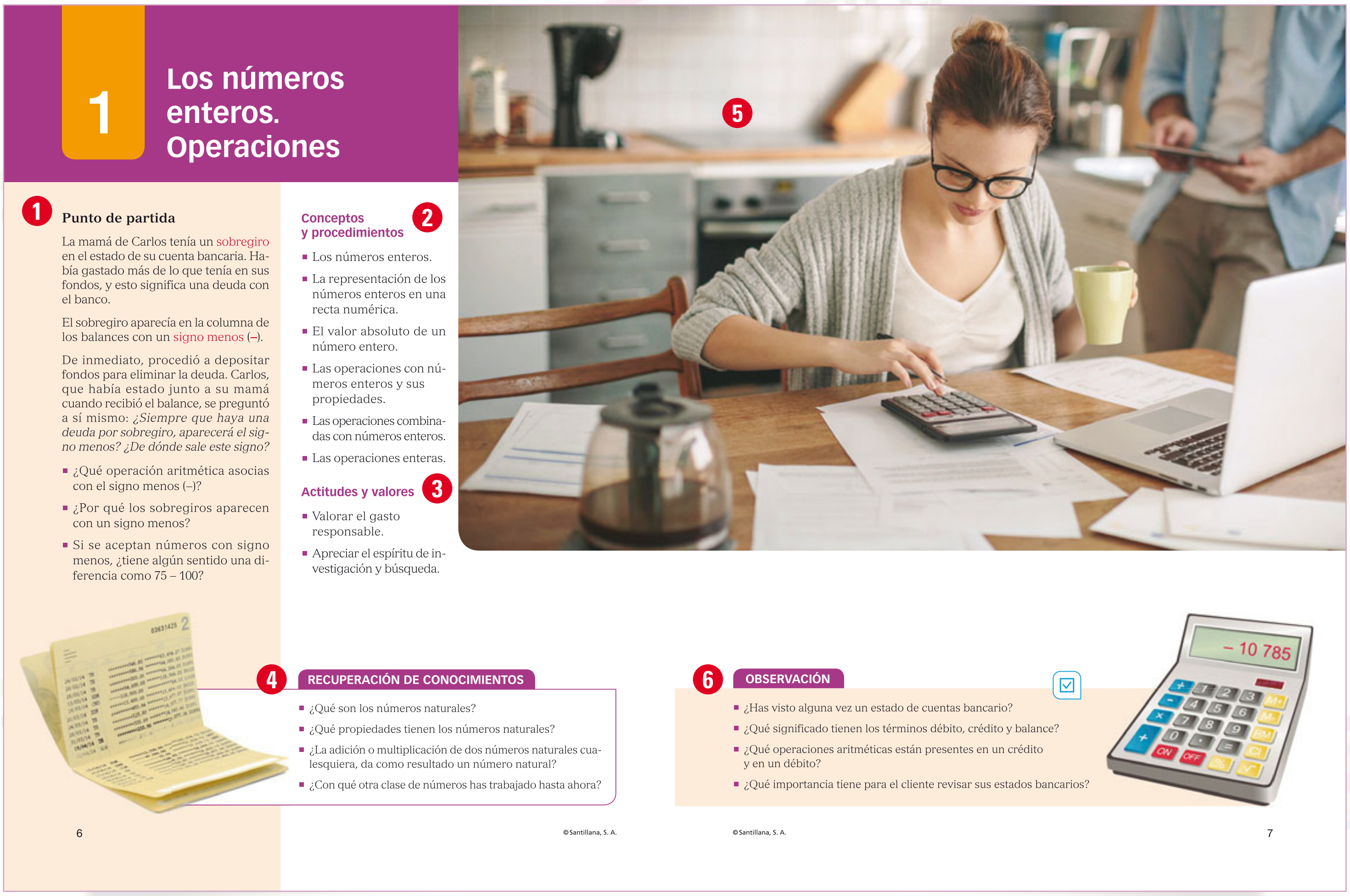
- Conjuntos.
- Proposición.
- Proposición abierta.
- Conjunto solución de una proposición abierta.
- Proposición conjuntiva. Conjunción.
- Intersección entre dos conjuntos.
- Proposición disyuntiva. Disyunción.
- Unión de conjuntos.
- Proposición condicional.
- Cuantificadores existencial y universal.
- Subconjunto de un conjunto dado.
- Complemento de un conjunto.
- Leyes de Morgan.
- Diferencia entre conjuntos.
- Proposición bicondicional.
- Proposiciones equivalentes.
- Igualdad entre conjuntos.
- Conjuntos disjuntos.
- Tipos de conjuntos y diagramas de Venn-Euler.

El libro de texto de las y los estudiantes de 1.º a 3.º

Libro que plantea oportunidades de aprendizaje y desarrolla procesos pedagógicos.
El libro del primer curso del Nivel Secundario está compuesto por **10 unidades didácticas, 2 unidades de aprendizaje** y **2 proyectos**.

Las **unidades didácticas** trabajan las competencias y temas específicos de la materia.

Unidad didáctica: páginas de apertura



1 Los números enteros. Operaciones

1 **Punto de partida**

La mamá de Carlos tenía un sobregiro en el estado de su cuenta bancaria. Había gastado más de lo que tenía en sus fondos, y esto significa una deuda con el banco.

El sobregiro aparecía en la columna de los balances con un signo menos (–).

De inmediato, procedió a depositar fondos para eliminar la deuda. Carlos, que había estado junto a su mamá cuando recibió el balance, se preguntó a sí mismo: *¿Siempre que haya una deuda por sobregiro, aparecerá el signo menos? ¿De dónde sale este signo?*

- ¿Qué operación aritmética asocias con el signo menos (–)?
- ¿Por qué los sobregiros aparecen con un signo menos?
- Si se aceptan números con signo menos, ¿tiene algún sentido una diferencia como 75 – 100?

Conceptos y procedimientos 2

- Los números enteros.
- La representación de los números enteros en una recta numérica.
- El valor absoluto de un número entero.
- Las operaciones con números enteros y sus propiedades.
- Las operaciones combinadas con números enteros.
- Las operaciones enteras.

Actitudes y valores 3

- Valorar el gasto responsable.
- Apreciar el espíritu de investigación y búsqueda.

5

4 RECUPERACIÓN DE CONOCIMIENTOS

- ¿Qué son los números naturales?
- ¿Qué propiedades tienen los números naturales?
- ¿La adición o multiplicación de dos números naturales cualesquiera, da como resultado un número natural?
- ¿Con qué otra clase de números has trabajado hasta ahora?

6 OBSERVACIÓN

- ¿Has visto alguna vez un estado de cuentas bancario?
- ¿Qué significado tienen los términos débito, crédito y balance?
- ¿Qué operaciones aritméticas están presentes en un crédito y en un débito?
- ¿Qué importancia tiene para el cliente revisar sus estados bancarios?

6 ©Santillana, S. A. ©Santillana, S. A. 7

1 **Punto de partida**. Texto sobre situación o planteamiento que contextualiza el tema de la unidad.

2 **Conceptos y procedimientos**. Se destacan los principales contenidos a estudiar en la unidad, junto a sus procedimientos

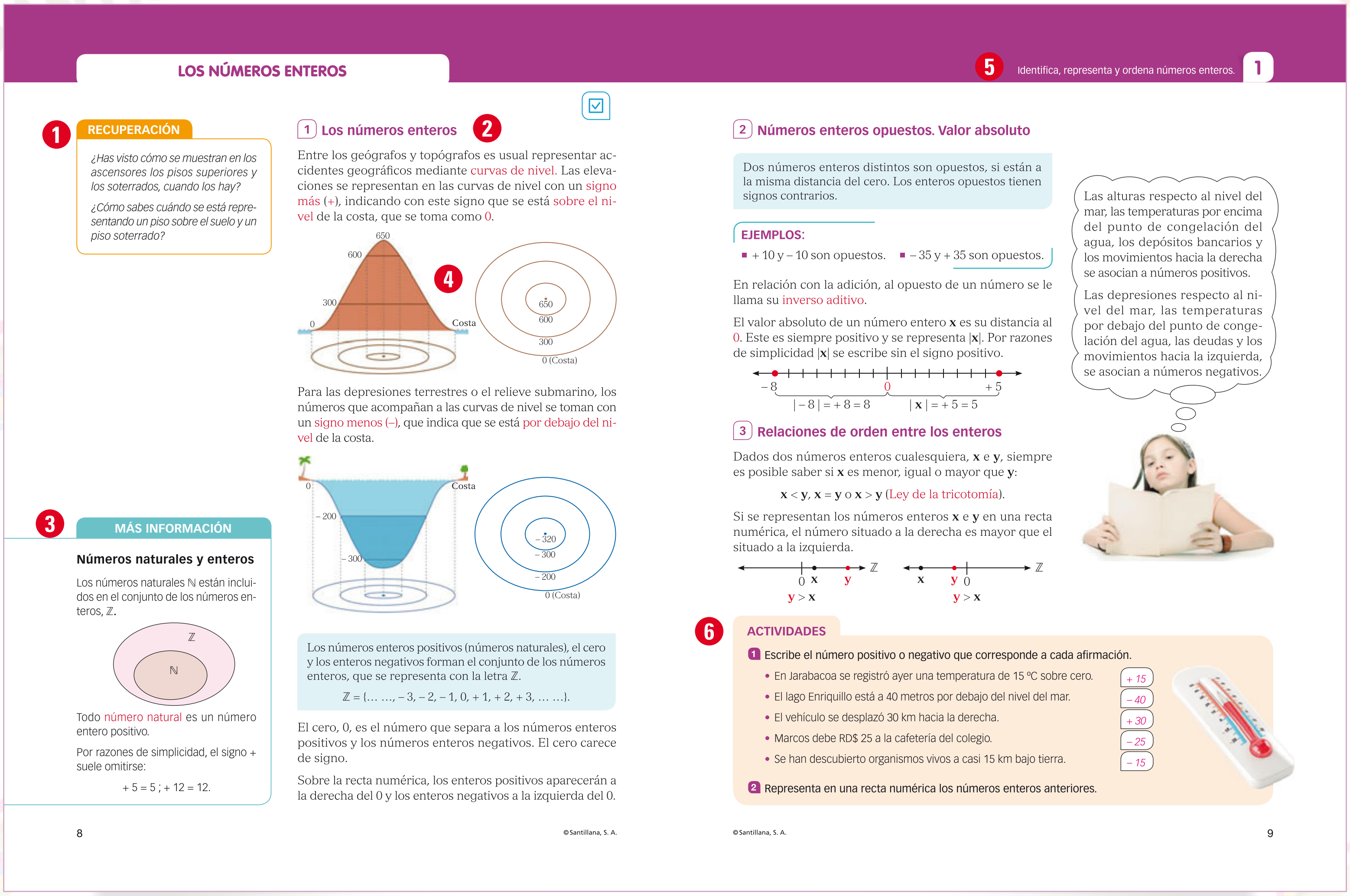
3 **Actitudes y valores**. Valores y actitudes morales trabajadas en cada unidad.

4 **Recuperación de conocimientos**. Para pensar y recuperar conocimientos y experiencias previas sobre el tema de la unidad.

5 **Imagen** con sentido pedagógico que moviliza el interés y las expectativas de los estudiantes.

6 **Observación**. Para desarrollar las habilidades de observación y descripción de imágenes y del entorno y establecer relaciones con el tema de la unidad.

Páginas de información y actividades



LOS NÚMEROS ENTEROS

5 Identifica, representa y ordena números enteros. 1

1 RECUPERACIÓN

¿Has visto cómo se muestran en los ascensores los pisos superiores y los soterrados, cuando los hay?

¿Cómo sabes cuándo se está representando un piso sobre el suelo y un piso soterrado?

1 Los números enteros 2

Entre los geógrafos y topógrafos es usual representar accidentes geográficos mediante curvas de nivel. Las elevaciones se representan en las curvas de nivel con un signo más (+), indicando con este signo que se está sobre el nivel de la costa, que se toma como 0.

4

Para las depresiones terrestres o el relieve submarino, los números que acompañan a las curvas de nivel se toman con un signo menos (–), que indica que se está por debajo del nivel de la costa.

Los números enteros positivos (números naturales), el cero y los enteros negativos forman el conjunto de los números enteros, que se representa con la letra $\mathbb{Z}$.

$\mathbb{Z} = \{\ldots \ldots, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, \ldots \ldots\}$.

El cero, 0, es el número que separa a los números enteros positivos y los números enteros negativos. El cero carece de signo.

Sobre la recta numérica, los enteros positivos aparecerán a la derecha del 0 y los enteros negativos a la izquierda del 0.

3 MÁS INFORMACIÓN

Números naturales y enteros

Los números naturales $\mathbb{N}$ están incluidos en el conjunto de los números enteros, $\mathbb{Z}$.

Todo número natural es un número entero positivo.

Por razones de simplicidad, el signo + suele omitirse:

$+5 = 5$; $+12 = 12$.

2 Números enteros opuestos. Valor absoluto

Dos números enteros distintos son opuestos, si están a la misma distancia del cero. Los enteros opuestos tienen signos contrarios.

EJEMPLOS:

- + 10 y – 10 son opuestos.
- – 35 y + 35 son opuestos.

En relación con la adición, al opuesto de un número se le llama su inverso aditivo.

El valor absoluto de un número entero **x** es su distancia al 0. Este es siempre positivo y se representa |**x**|. Por razones de simplicidad |**x**| se escribe sin el signo positivo.

Las alturas respecto al nivel del mar, las temperaturas por encima del punto de congelación del agua, los depósitos bancarios y los movimientos hacia la derecha se asocian a números positivos.

Las depresiones respecto al nivel del mar, las temperaturas por debajo del punto de congelación del agua, las deudas y los movimientos hacia la izquierda, se asocian a números negativos.

3 Relaciones de orden entre los enteros

Dados dos números enteros cualesquiera, **x** e **y**, siempre es posible saber si **x** es menor, igual o mayor que **y**:

x < **y**, **x** = **y** o **x** > **y** (Ley de la tricotomía).

Si se representan los números enteros **x** e **y** en una recta numérica, el número situado a la derecha es mayor que el situado a la izquierda.

6 ACTIVIDADES

1 Escribe el número positivo o negativo que corresponde a cada afirmación.

- En Jarabacoa se registró ayer una temperatura de 15 °C sobre cero. + 15
- El lago Enriquillo está a 40 metros por debajo del nivel del mar. – 40
- El vehículo se desplazó 30 km hacia la derecha. + 30
- Marcos debe RD$ 25 a la cafetería del colegio. – 25
- Se han descubierto organismos vivos a casi 15 km bajo tierra. – 15

2 Representa en una recta numérica los números enteros anteriores.

8 ©Santillana, S. A. ©Santillana, S. A. 9

1 Recuperación. Preguntas de recuperación de conocimientos para cada tema.

2 Conceptos claros y concisos para apoyar el aprendizaje.

3 Programas especiales para reforzar y ampliar sus conocimientos y destrezas:

- **Más información**: Para ampliar tus conocimientos y conocer datos interesantes sobre el tema.
- **Recuerda**: Conceptos e ideas estudiadas en unidades o grados anteriores y que se relacionan con el tema que se esté tratando.
- **Inteligencia colaborativa**: Actividades para ser realizadas en equipo en el aula.

4 Imágenes para facilitar la comprensión y el aprendizaje.

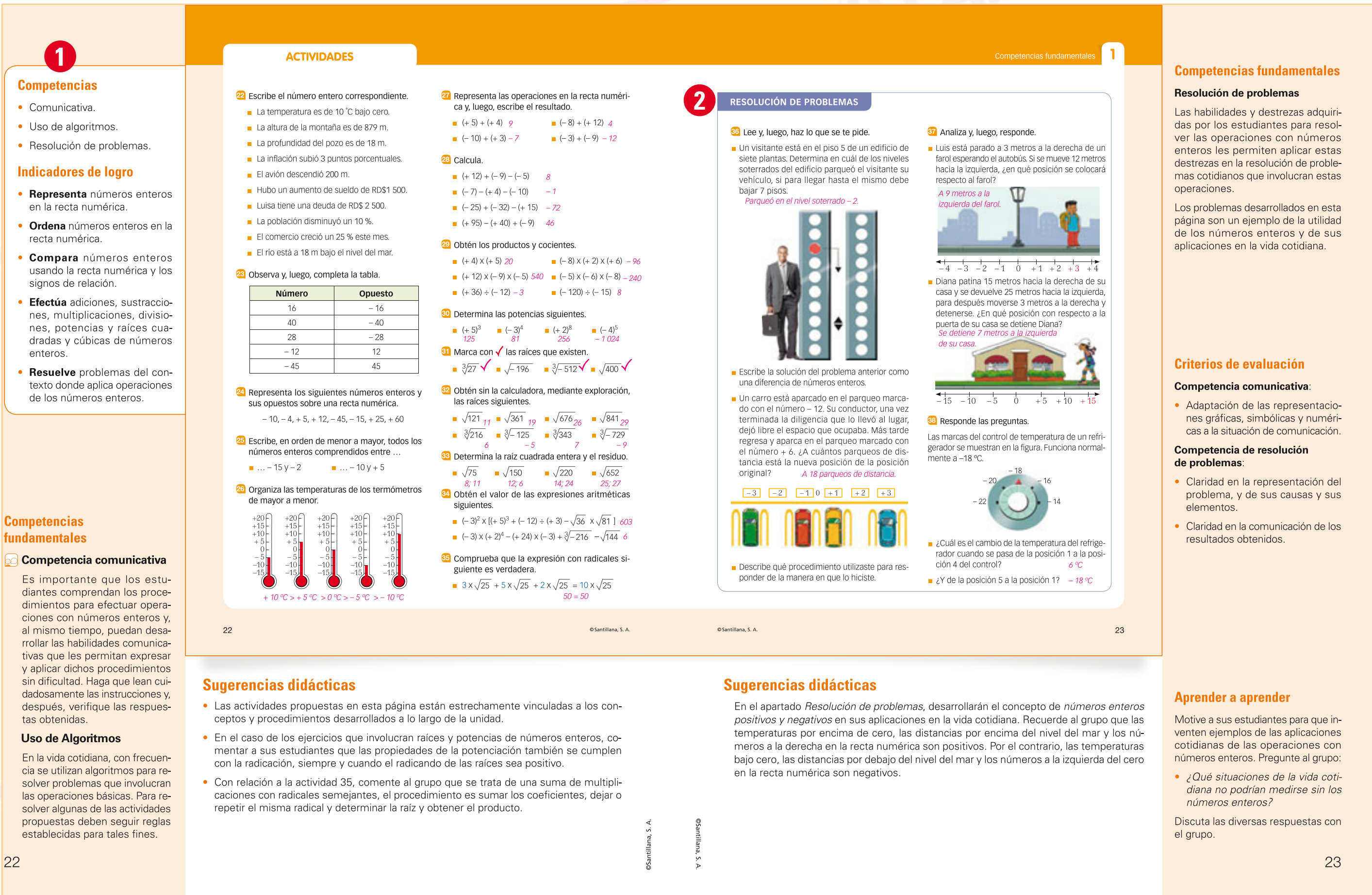
5 Indicadores de logro que permiten medir o evaluar el aprendizaje logrado.

6 Actividades de comprensión y ejercitación. Actividades de distinta demanda cognitiva para interpretar la información y reforzar las habilidades comunicativas.

El libro de texto de las y los estudiantes de 1.º a 3.º

Páginas de actividades y evaluación

1 **Actividades**. Página destinada a actividades que favorecen el desarrollo de las competencias específicas del área.



1

Competencias

- Comunicativa.
- Uso de algoritmos.
- Resolución de problemas.

Indicadores de logro

- **Representa** números enteros en la recta numérica.
- **Ordena** números enteros en la recta numérica.
- **Compara** números enteros usando la recta numérica y los signos de relación.
- **Efectúa** adiciones, sustracciones, multiplicaciones, divisiones, potencias y raíces cuadradas y cúbicas de números enteros.
- **Resuelve** problemas del contexto donde aplica operaciones de los números enteros.

ACTIVIDADES

22 Escribe el número entero correspondiente.
- La temperatura es de 10 °C bajo cero.
- La altura de la montaña es de 879 m.
- La profundidad del pozo es de 18 m.
- La inflación subió 3 puntos porcentuales.
- El avión descendió 200 m.
- Hubo un aumento de sueldo de RD$1 500.
- Luisa tiene una deuda de RD$ 2 500.
- La población disminuyó un 10 %.
- El comercio creció un 25 % este mes.
- El río está a 18 m bajo el nivel del mar.

23 Observa y, luego, completa la tabla.

Número	Opuesto
16	– 16
40	– 40
28	– 28
– 12	12
– 45	45

24 Representa los siguientes números enteros y sus opuestos sobre una recta numérica.

– 10, – 4, + 5, + 12, – 45, – 15, + 25, + 60

25 Escribe, en orden de menor a mayor, todos los números enteros comprendidos entre …
- … – 15 y – 2
- … – 10 y + 5

26 Organiza las temperaturas de los termómetros de mayor a menor.

+ 10 °C > + 5 °C > 0 °C > – 5 °C > – 10 °C

27 Representa las operaciones en la recta numérica y, luego, escribe el resultado.
- $(+5) + (+4)$ 9
- $(-8) + (+12)$ 4
- $(-10) + (+3)$ – 7
- $(-3) + (-9)$ – 12

28 Calcula.
- $(+12) + (-9) - (-5)$ 8
- $(-7) - (+4) - (-10)$ – 1
- $(-25) + (-32) - (+15)$ – 72
- $(+95) - (+40) + (-9)$ 46

29 Obtén los productos y cocientes.
- $(+4) \times (+5)$ 20
- $(-8) \times (+2) \times (+6)$ – 96
- $(+12) \times (-9) \times (-5)$ 540
- $(-5) \times (-6) \times (-8)$ – 240
- $(+36) \div (-12)$ – 3
- $(-120) \div (-15)$ 8

30 Determina las potencias siguientes.
- $(+5)^3$ 125
- $(-3)^4$ 81
- $(+2)^8$ 256
- $(-4)^5$ – 1 024

31 Marca con ✓ las raíces que existen.
- $\sqrt[3]{27}$ ✓
- $\sqrt{-196}$
- $\sqrt[3]{-512}$ ✓
- $\sqrt{400}$ ✓

32 Obtén sin la calculadora, mediante exploración, las raíces siguientes.
- $\sqrt{121}$ 11
- $\sqrt{361}$ 19
- $\sqrt{676}$ 26
- $\sqrt{841}$ 29
- $\sqrt[3]{216}$ 6
- $\sqrt[3]{-125}$ – 5
- $\sqrt[3]{343}$ 7
- $\sqrt[3]{-729}$ – 9

33 Determina la raíz cuadrada entera y el residuo.
- $\sqrt{75}$ 8; 11
- $\sqrt{150}$ 12; 6
- $\sqrt{220}$ 14; 24
- $\sqrt{652}$ 25; 27

34 Obtén el valor de las expresiones aritméticas siguientes.
- $(-3)^2 \times [(+5)^3 + (-12) \div (+3) - \sqrt{36} \times \sqrt{81}]$ 603
- $(-3) \times (+2)^4 - (+24) \times (-3) + \sqrt[3]{-216} - \sqrt{144}$ 6

35 Comprueba que la expresión con radicales siguiente es verdadera.
- $3 \times \sqrt{25} + 5 \times \sqrt{25} + 2 \times \sqrt{25} = 10 \times \sqrt{25}$
  50 = 50

22 ©Santillana, S. A.

Competencias fundamentales 1

2 RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

36 Lee y, luego, haz lo que se te pide.
- Un visitante está en el piso 5 de un edificio de siete plantas. Determina en cuál de los niveles soterrados del edificio parqueó el visitante su vehículo, si para llegar hasta el mismo debe bajar 7 pisos.
  Parqueó en el nivel soterrado – 2.
- Escribe la solución del problema anterior como una diferencia de números enteros.
- Un carro está aparcado en el parqueo marcado con el número – 12. Su conductor, una vez terminada la diligencia que lo llevó al lugar, dejó libre el espacio que ocupaba. Más tarde regresa y aparca en el parqueo marcado con el número + 6. ¿A cuántos parqueos de distancia está la nueva posición de la posición original? *A 18 parqueos de distancia.*

– 3 – 2 – 1 0 + 1 + 2 + 3

- Describe qué procedimiento utilizaste para responder de la manera en que lo hiciste.

37 Analiza y, luego, responde.
- Luis está parado a 3 metros a la derecha de un farol esperando el autobús. Si se mueve 12 metros hacia la izquierda, ¿en qué posición se colocará respecto al farol?
  A 9 metros a la izquierda del farol.

– 4 – 3 – 2 – 1 0 + 1 + 2 + 3 + 4

- Diana patina 15 metros hacia la derecha de su casa y se devuelve 25 metros hacia la izquierda, para después moverse 3 metros a la derecha y detenerse. ¿En qué posición con respecto a la puerta de su casa se detiene Diana?
  Se detiene 7 metros a la izquierda de su casa.

– 15 – 10 – 5 0 + 5 + 10 + 15

38 Responde las preguntas.

Las marcas del control de temperatura de un refrigerador se muestran en la figura. Funciona normalmente a –18 °C.

– 18 – 16 – 14 – 20 – 22

- ¿Cuál es el cambio de la temperatura del refrigerador cuando se pasa de la posición 1 a la posición 4 del control? 6 °C
- ¿Y de la posición 5 a la posición 1? – 18 °C

©Santillana, S. A. 23

Competencias fundamentales

Competencia comunicativa

Es importante que los estudiantes comprendan los procedimientos para efectuar operaciones con números enteros y, al mismo tiempo, puedan desarrollar las habilidades comunicativas que les permitan expresar y aplicar dichos procedimientos sin dificultad. Haga que lean cuidadosamente las instrucciones y, después, verifique las respuestas obtenidas.

Uso de Algoritmos

En la vida cotidiana, con frecuencia se utilizan algoritmos para resolver problemas que involucran las operaciones básicas. Para resolver algunas de las actividades propuestas deben seguir reglas establecidas para tales fines.

22

Sugerencias didácticas

- Las actividades propuestas en esta página están estrechamente vinculadas a los conceptos y procedimientos desarrollados a lo largo de la unidad.
- En el caso de los ejercicios que involucran raíces y potencias de números enteros, comentar a sus estudiantes que las propiedades de la potenciación también se cumplen con la radicación, siempre y cuando el radicando de las raíces sea positivo.
- Con relación a la actividad 35, comente al grupo que se trata de una suma de multiplicaciones con radicales semejantes, el procedimiento es sumar los coeficientes, dejar o repetir el misma radical y determinar la raíz y obtener el producto.

©Santillana, S. A.

©Santillana, S. A.

Sugerencias didácticas

En el apartado *Resolución de problemas*, desarrollarán el concepto de *números enteros positivos y negativos* en sus aplicaciones en la vida cotidiana. Recuerde al grupo que las temperaturas por encima de cero, las distancias por encima del nivel del mar y los números a la derecha en la recta numérica son positivos. Por el contrario, las temperaturas bajo cero, las distancias por debajo del nivel del mar y los números a la izquierda del cero en la recta numérica son negativos.

Competencias fundamentales

Resolución de problemas

Las habilidades y destrezas adquiridas por los estudiantes para resolver las operaciones con números enteros les permiten aplicar estas destrezas en la resolución de problemas cotidianos que involucran estas operaciones.

Los problemas desarrollados en esta página son un ejemplo de la utilidad de los números enteros y de sus aplicaciones en la vida cotidiana.

Criterios de evaluación

Competencia comunicativa:

- Adaptación de las representaciones gráficas, simbólicas y numéricas a la situación de comunicación.

Competencia de resolución de problemas:

- Claridad en la representación del problema, y de sus causas y sus elementos.
- Claridad en la comunicación de los resultados obtenidos.

Aprender a aprender

Motive a sus estudiantes para que inventen ejemplos de las aplicaciones cotidianas de las operaciones con números enteros. Pregunte al grupo:

- *¿Qué situaciones de la vida cotidiana no podrían medirse sin los números enteros?*

Discuta las diversas respuestas con el grupo.

23

2 **Página de actividades asociadas a competencias fundamentales**.

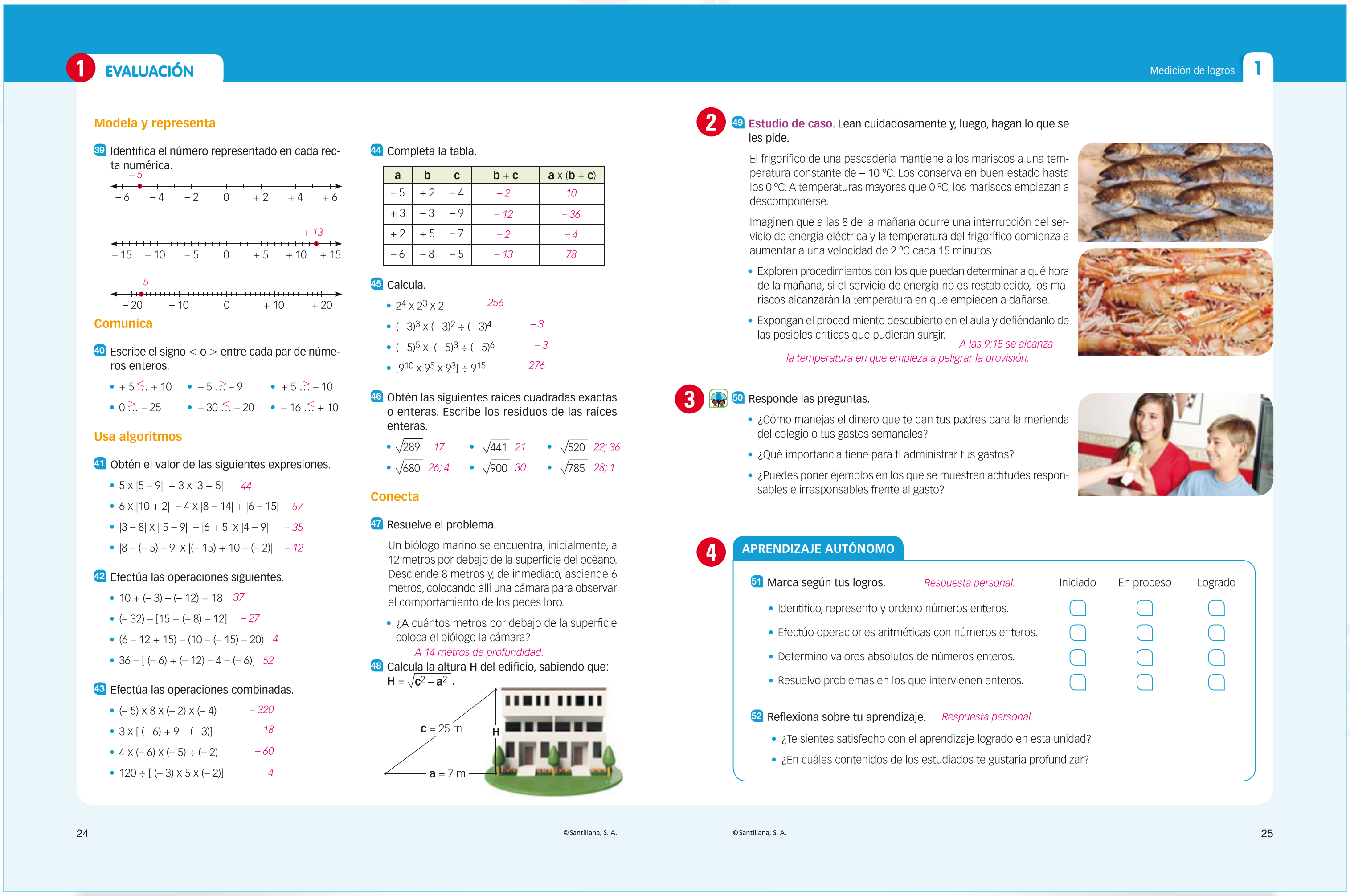
Propuesta de actividades de aplicación de lo aprendido en contextos de la vida cotidiana y asociadas a una competencia fundamental del currículo.

Páginas de evaluación

1 **Actividades** para evaluar el nivel de dominio de las competencias que se han procurado desarrollar mediante el trabajo con la unidad. Las actividades están estrechamente relacionadas con los indicadores de logro planteados en la programación o planificación curricular de la unidad.

La evaluación puede ser aplicada en cualquiera de sus modalidades:

- Autoevaluación
- Coevaluación
- Heteroevaluación



1 EVALUACIÓN

Medición de logros 1

Modela y representa

39 Identifica el número representado en cada recta numérica.

– 5

– 6 – 4 – 2 0 + 2 + 4 + 6

+ 13

– 15 – 10 – 5 0 + 5 + 10 + 15

– 5

– 20 – 10 0 + 10 + 20

Comunica

40 Escribe el signo < o > entre cada par de números enteros.

- + 5 <... + 10
- – 5 >... – 9
- + 5 >... – 10
- 0 >... – 25
- – 30 <... – 20
- – 16 <... + 10

Usa algoritmos

41 Obtén el valor de las siguientes expresiones.

- 5 x |5 – 9| + 3 x |3 + 5| *44*
- 6 x |10 + 2| – 4 x |8 – 14| + |6 – 15| *57*
- |3 – 8| x | 5 – 9| – |6 + 5| x |4 – 9| *– 35*
- |8 – (– 5) – 9| x |(– 15) + 10 – (– 2)| *– 12*

42 Efectúa las operaciones siguientes.

- 10 + (– 3) – (– 12) + 18 *37*
- (– 32) – [15 + (– 8) – 12] *– 27*
- (6 – 12 + 15) – (10 – (– 15) – 20) *4*
- 36 – [(– 6) + (– 12) – 4 – (– 6)] *52*

43 Efectúa las operaciones combinadas.

- (– 5) x 8 x (– 2) x (– 4) *– 320*
- 3 x [(– 6) + 9 – (– 3)] *18*
- 4 x (– 6) x (– 5) ÷ (– 2) *– 60*
- 120 ÷ [(– 3) x 5 x (– 2)] *4*

44 Completa la tabla.

a	b	c	b + c	a x (b + c)
– 5	+ 2	– 4	*– 2*	*10*
+ 3	– 3	– 9	*– 12*	*– 36*
+ 2	+ 5	– 7	*– 2*	*– 4*
– 6	– 8	– 5	*– 13*	*78*

45 Calcula.

- $2^4 \times 2^3 \times 2$ *256*
- $(-3)^3 \times (-3)^2 \div (-3)^4$ *– 3*
- $(-5)^5 \times (-5)^3 \div (-5)^6$ *– 3*
- $[9^{10} \times 9^5 \times 9^3] \div 9^{15}$ *276*

46 Obtén las siguientes raíces cuadradas exactas o enteras. Escribe los residuos de las raíces enteras.

- $\sqrt{289}$ *17*
- $\sqrt{441}$ *21*
- $\sqrt{520}$ *22; 36*
- $\sqrt{680}$ *26; 4*
- $\sqrt{900}$ *30*
- $\sqrt{785}$ *28; 1*

Conecta

47 Resuelve el problema.

Un biólogo marino se encuentra, inicialmente, a 12 metros por debajo de la superficie del océano. Desciende 8 metros y, de inmediato, asciende 6 metros, colocando allí una cámara para observar el comportamiento de los peces loro.

- ¿A cuántos metros por debajo de la superficie coloca el biólogo la cámara?

A 14 metros de profundidad.

48 Calcula la altura **H** del edificio, sabiendo que: $\mathbf{H} = \sqrt{\mathbf{c}^2 - \mathbf{a}^2}$.

c = 25 m
H
a = 7 m

2 49 **Estudio de caso**. Lean cuidadosamente y, luego, hagan lo que se les pide.

El frigorífico de una pescadería mantiene a los mariscos a una temperatura constante de – 10 °C. Los conserva en buen estado hasta los 0 °C. A temperaturas mayores que 0 °C, los mariscos empiezan a descomponerse.

Imaginen que a las 8 de la mañana ocurre una interrupción del servicio de energía eléctrica y la temperatura del frigorífico comienza a aumentar a una velocidad de 2 °C cada 15 minutos.

- Exploren procedimientos con los que puedan determinar a qué hora de la mañana, si el servicio de energía no es restablecido, los mariscos alcanzarán la temperatura en que empiecen a dañarse.
- Expongan el procedimiento descubierto en el aula y defiéndanlo de las posibles críticas que pudieran surgir.

A las 9:15 se alcanza la temperatura en que empieza a peligrar la provisión.

3 50 Responde las preguntas.

- ¿Cómo manejas el dinero que te dan tus padres para la merienda del colegio o tus gastos semanales?
- ¿Qué importancia tiene para ti administrar tus gastos?
- ¿Puedes poner ejemplos en los que se muestren actitudes responsables e irresponsables frente al gasto?

4 APRENDIZAJE AUTÓNOMO

51 Marca según tus logros. *Respuesta personal.*

	Iniciado	En proceso	Logrado
• Identifico, represento y ordeno números enteros.	☐	☐	☐
• Efectúo operaciones aritméticas con números enteros.	☐	☐	☐
• Determino valores absolutos de números enteros.	☐	☐	☐
• Resuelvo problemas en los que intervienen enteros.	☐	☐	☐

52 Reflexiona sobre tu aprendizaje. *Respuesta personal.*

- ¿Te sientes satisfecho con el aprendizaje logrado en esta unidad?
- ¿En cuáles contenidos de los estudiados te gustaría profundizar?

24 ©Santillana, S. A. ©Santillana, S. A. 25

2 **Actividad asociada a una estrategia de evaluación.** Actividades en la que los estudiantes trabajarán con algunas de las estrategias de evaluación del currículo.

3 **Valores.** Sección de preguntas relacionadas con algún valor trabajado en la unidad.

4 **Aprendizaje autónomo.** Los estudiantes evaluarán por sí mismos sus logros y reflexionarán acerca de su aprendizaje.

El **libro** de texto de los estudiantes de 1.º a 3.º

Las **unidades de aprendizaje** son propuestas que favorecen la articulación de las diferentes áreas del conocimiento.

Unidad de aprendizaje: páginas de apertura

Letra correspondiente a la unidad:
Las unidades de aprendizaje se identifican con color azul.

Título de la unidad

A

Las medidas en la historia

Situación de aprendizaje

Los procesos de medición acompañan a los seres humanos desde tiempos remotos –concluye el profesor de Ciencias Sociales, para dar paso a las intervenciones de los estudiantes–.

Sergio, que había levantado la mano para exponer sus consideraciones, opinó: *"Desde los inicios de la historia, los seres humanos han recurrido a las medidas para cuantificar bienes, productos agrícolas o unidades fabricadas, distancias de un lugar a otro y tiempos para iniciar o terminar una siembra"*.

Tras el intercambio de ideas, los estudiantes acabaron por comprender que cualquier comunidad humana necesita prácticas de medición y que estas se hacen más rigurosas al tiempo que son más precisos los instrumentos de medida y las sociedades, más complejas y exigentes.

Conceptos y procedimientos

- Unidades de medidas de longitud, peso, masa, capacidad y tiempo.
- Intervalos de tiempo entre dos acontecimientos.
- Husos horarios y cálculo de la hora en lugares lejanos.
- Conversiones de unidades de sistemas distintos.

Actitudes y valores

- Valorar el papel de las medidas en la historia.
- Apreciar el rigor y la precisión de la vida.

RECUPERACIÓN DE CONOCIMIENTOS

- ¿Qué relaciones puedes establecer entre el desarrollo social y los avances de las prácticas de medición?
- ¿Qué ejemplos podrías dar para apoyar tu respuesta?
- ¿Cómo cambian los procesos de medición con el avance de la tecnología? Pon tres ejemplos.
- ¿Cómo contribuye la precisión de los sistemas de unidades de medida con el desarrollo social?

OBSERVACIÓN

- ¿Cuáles instrumentos de medición identificas en las ilustraciones?
- ¿Qué magnitudes o cantidades físicas se miden con ellos?
- ¿Cómo son los instrumentos actuales que han sustituido a los que se muestran en estas ilustraciones?
- ¿Cuáles ventajas tienen los instrumentos de medición actuales respecto a los del pasado? Pon tres ejemplos.

102 ©Santillana, S. A. ©Santillana, S. A. 103

Situación de aprendizaje

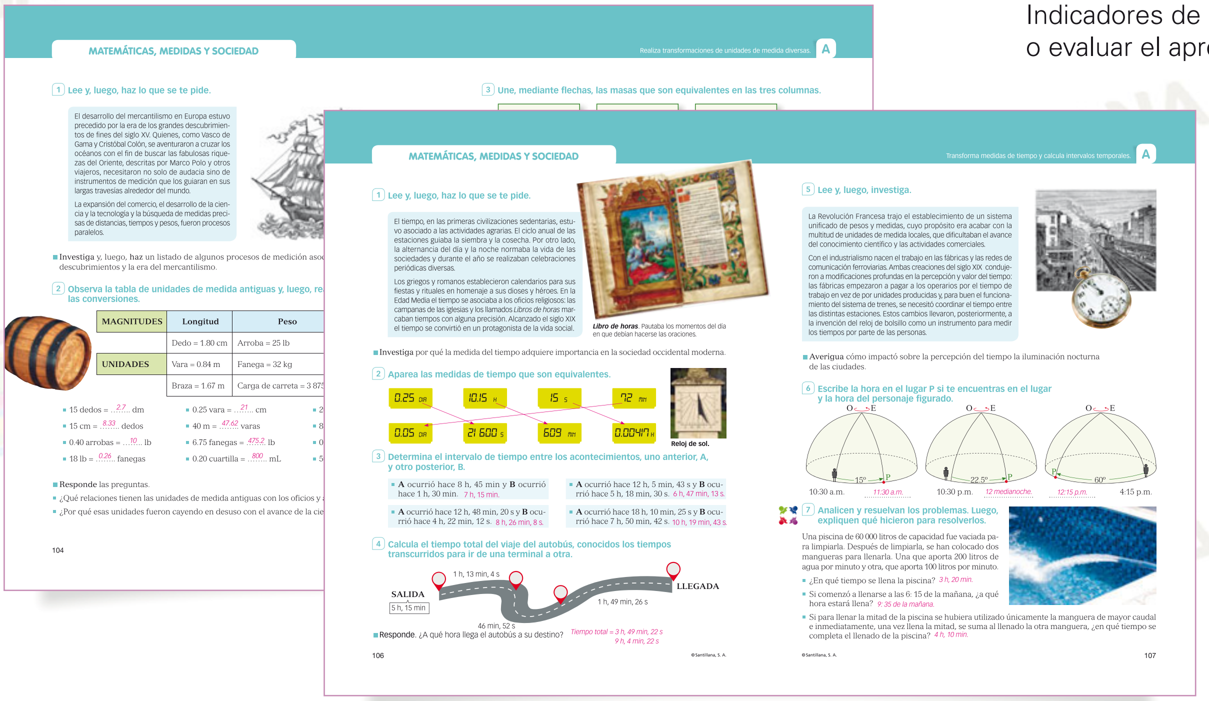
Texto que plantea situaciones reales o simuladas de la vida cotidiana, que llevarán a reflexionar, tomar decisiones y actuar, promoviendo así el desarrollo de saberes y competencias que servirán de base en la construcción de aprendizajes significativos.

Páginas de información y actividades

Los temas a estudiar

Indicadores de logro que permiten medir o evaluar el aprendizaje logrado.

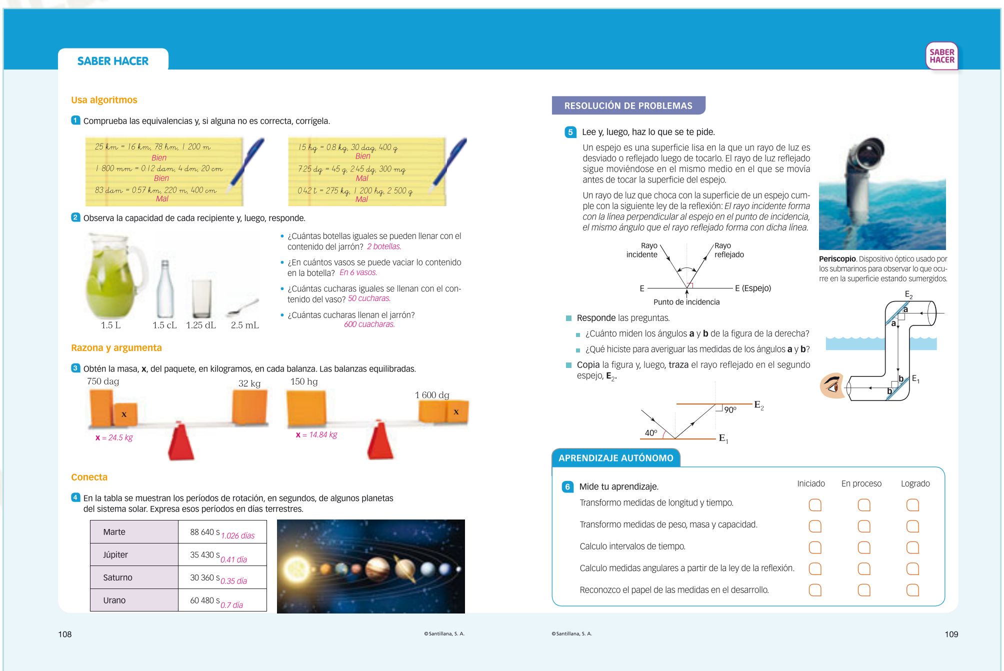
Lecturas e imágenes para ayudar a comprender mejor los contenidos.



Páginas de evaluación

Actividades para que descubras lo que aprendiste

Actividades para demostrar los conceptos aprendidos.

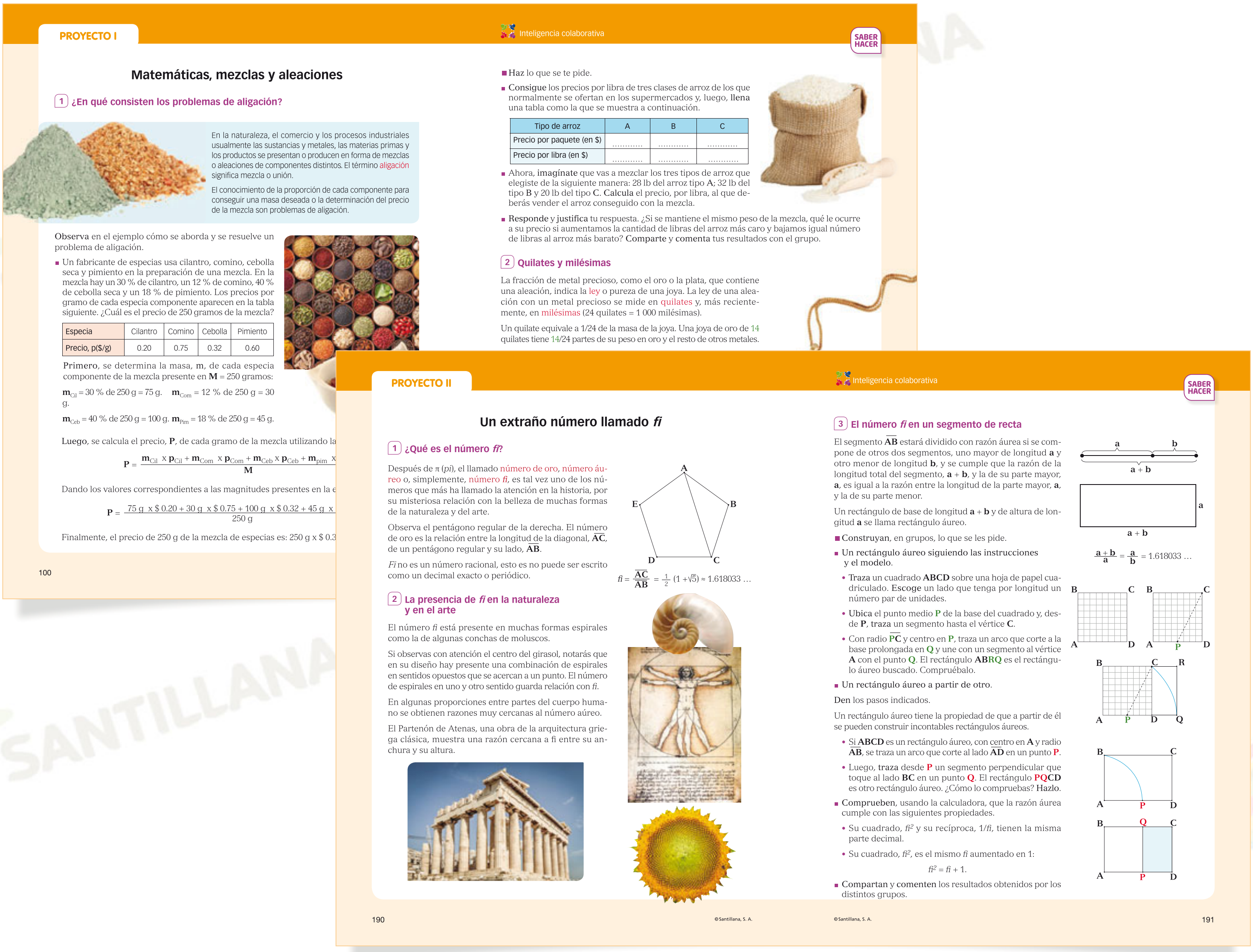


Actividades para poner en práctica las estrategias de evaluación, promover aprendizajes en función de las competencias fundamentales e identificar los logros alcanzados.

Espacio para medir cuánto han aprendido basándose en los indicadores de logro correspondientes.

Los proyectos

A lo largo del año escolar se podrán desarrollar dos proyectos. Cada proyecto es **interdisciplinario**. La finalidad de estos proyectos es favorecer la articulación de las áreas curriculares y, a la vez, posibilitar el desarrollo de las competencias específicas y fundamentales.



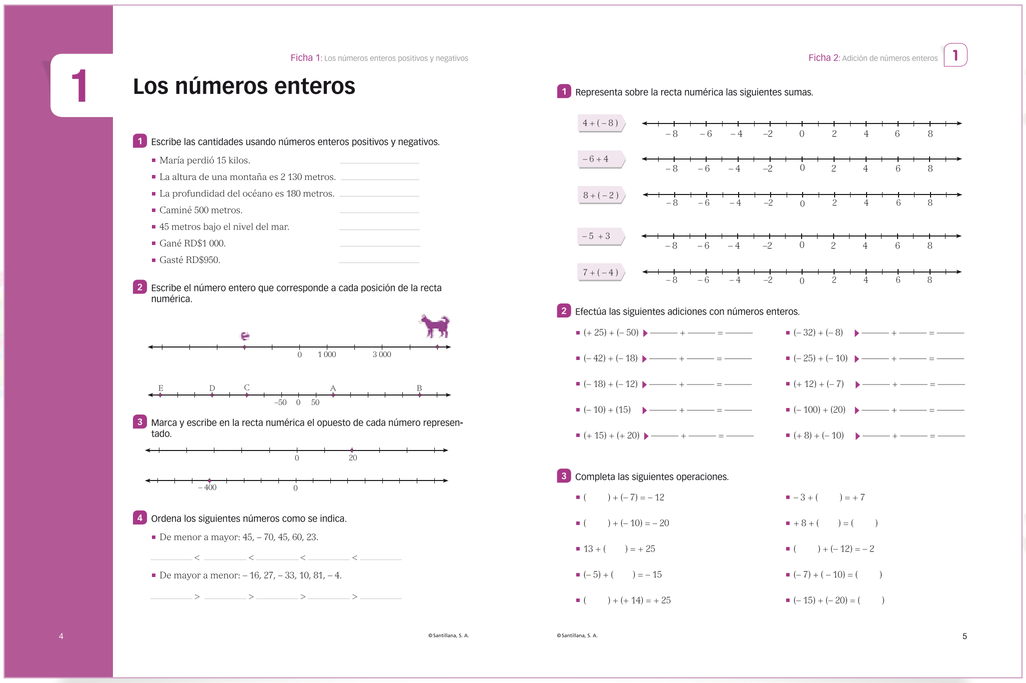
Los proyectos están estructurados de la siguiente forma:

- Se presenta algún tema en el que se articulen las matemáticas con otras disciplinas o con alguna situación de la vida cotidiana.
- Se estimula a los estudiantes a que ofrezcan soluciones a las situaciones problemáticas que se les presentan.
- Una vez finalizada la actividad, que podría requerir más de una sesión de clase, los estudiantes presentarán sus resultados, las someterán a la consideración del grupo y llegarán a sus propias conclusiones.

El Cuaderno de actividades

El *Cuaderno de actividades* se compone de fichas de actividades de refuerzo, actividades de ampliación y de experiencias que enriquecen el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Páginas de actividades de refuerzo



1 Los números enteros

Ficha 1: Los números enteros positivos y negativos

1 Escribe las cantidades usando números enteros positivos y negativos.
- María perdió 15 kilos.
- La altura de una montaña es 2 130 metros.
- La profundidad del océano es 180 metros.
- Caminé 500 metros.
- 45 metros bajo el nivel del mar.
- Gané RD$1 000.
- Gasté RD$950.

2 Escribe el número entero que corresponde a cada posición de la recta numérica.

0 1 000 3 000

E D C A B –50 0 50

3 Marca y escribe en la recta numérica el opuesto de cada número representado.

0 20

– 400 0

4 Ordena los siguientes números como se indica.
- De menor a mayor: 45, – 70, 45, 60, 23.
- De mayor a menor: – 16, 27, – 33, 10, 81, – 4.

4 ©Santillana, S. A.

Ficha 2: Adición de números enteros 1

1 Representa sobre la recta numérica las siguientes sumas.

4 + (– 8) – 6 + 4 8 + (– 2) – 5 + 3 7 + (– 4)

2 Efectúa las siguientes adiciones con números enteros.
- (+ 25) + (– 50)
- (– 42) + (– 18)
- (– 18) + (– 12)
- (– 10) + (15)
- (+ 15) + (+ 20)
- (– 32) + (– 8)
- (– 25) + (– 10)
- (+ 12) + (– 7)
- (– 100) + (20)
- (+ 8) + (– 10)

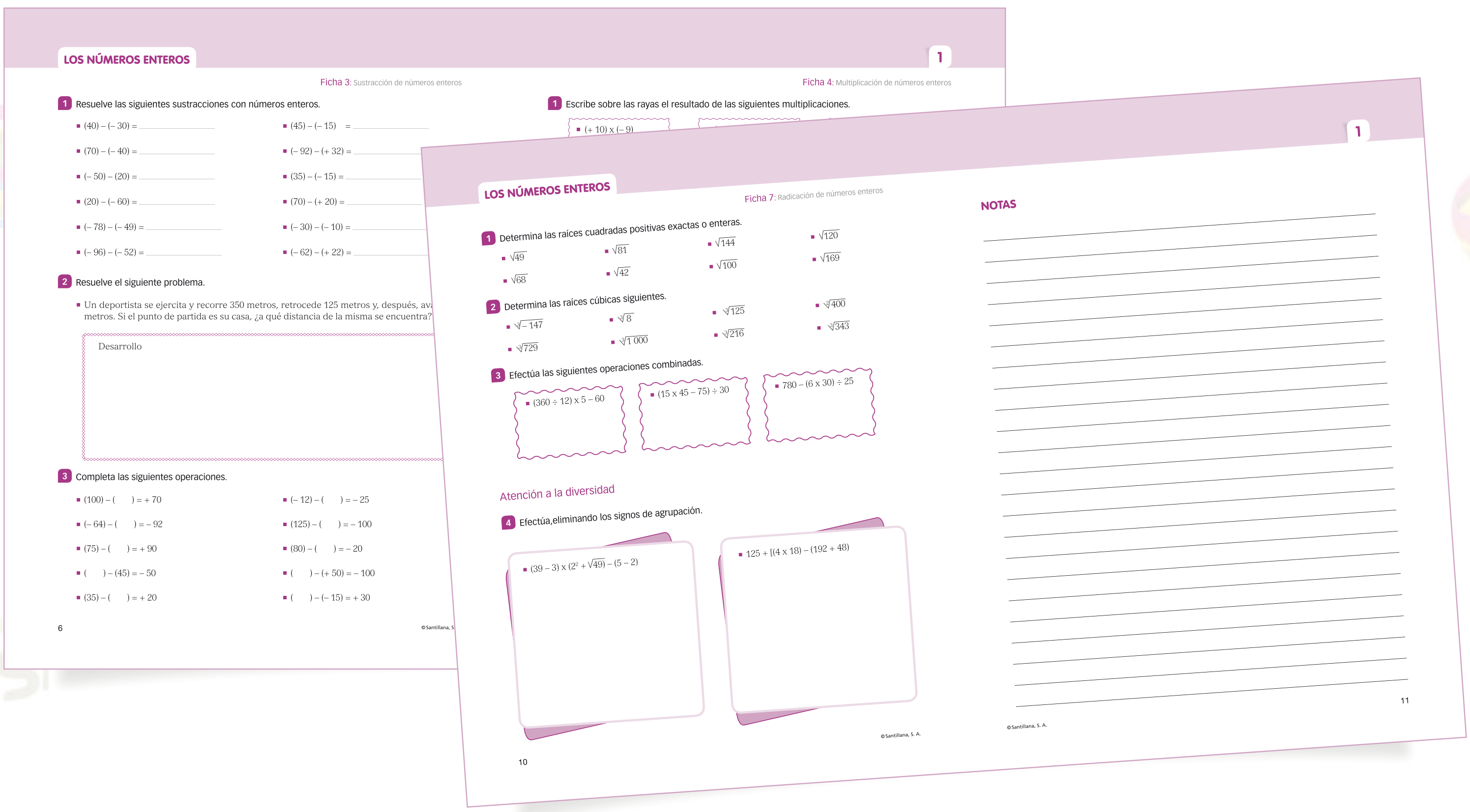
3 Completa las siguientes operaciones.
- ( ) + (– 7) = – 12
- ( ) + (– 10) = – 20
- 13 + ( ) = + 25
- (– 5) + ( ) = – 15
- ( ) + (+ 14) = + 25
- – 3 + ( ) = + 7
- + 8 + ( ) = ( )
- ( ) + (– 12) = – 2
- (– 7) + (– 10) = ( )
- (– 15) + (– 20) = ( )

©Santillana, S. A. 5

Más actividades
para reforzar los conceptos
y conocimientos estudiados.

Esquemas y organizadores gráficos
para que los estudiantes los rotulen con conceptos clave y clasifiquen información.

Actividades
para ampliar los conocimientos estudiados.



LOS NÚMEROS ENTEROS 1

Ficha 3: Sustracción de números enteros

1 Resuelve las siguientes sustracciones con números enteros.
- (40) – (– 30) =
- (70) – (– 40) =
- (– 50) – (20) =
- (20) – (– 60) =
- (– 78) – (– 49) =
- (– 96) – (– 52) =
- (45) – (– 15) =
- (– 92) – (+ 32) =
- (35) – (– 15) =
- (70) – (+ 20) =
- (– 30) – (– 10) =
- (– 62) – (+ 22) =

2 Resuelve el siguiente problema.
- Un deportista se ejercita y recorre 350 metros, retrocede 125 metros y, después, av… metros. Si el punto de partida es su casa, ¿a qué distancia de la misma se encuentra?

Desarrollo

3 Completa las siguientes operaciones.
- (100) – ( ) = + 70
- (– 64) – ( ) = – 92
- (75) – ( ) = + 90
- ( ) – (45) = – 50
- (35) – ( ) = + 20
- (– 12) – ( ) = – 25
- (125) – ( ) = – 100
- (80) – ( ) = – 20
- ( ) – (+ 50) = – 100
- ( ) – (– 15) = + 30

6

Ficha 4: Multiplicación de números enteros

1 Escribe sobre las rayas el resultado de las siguientes multiplicaciones.
- (+ 10) x (– 9)

LOS NÚMEROS ENTEROS 1

Ficha 7: Radicación de números enteros

1 Determina las raíces cuadradas positivas exactas o enteras.
- $\sqrt{49}$
- $\sqrt{68}$
- $\sqrt{81}$
- $\sqrt{42}$
- $\sqrt{144}$
- $\sqrt{100}$
- $\sqrt{120}$
- $\sqrt{169}$

2 Determina las raíces cúbicas siguientes.
- $\sqrt[3]{-147}$
- $\sqrt[3]{729}$
- $\sqrt[3]{8}$
- $\sqrt[3]{1\,000}$
- $\sqrt[3]{125}$
- $\sqrt[3]{216}$
- $\sqrt[3]{400}$
- $\sqrt[3]{343}$

3 Efectúa las siguientes operaciones combinadas.
- (360 ÷ 12) x 5 – 60
- (15 x 45 – 75) ÷ 30
- 780 – (6 x 30) ÷ 25

Atención a la diversidad

4 Efectúa,eliminando los signos de agrupación.
- $(39 - 3) \times (2^2 + \sqrt{49}) - (5 - 2)$
- 125 + [(4 x 18) – (192 + 48)]

10 ©Santillana, S. A.

NOTAS

©Santillana, S. A. 11

La Guía didáctica

Valioso instrumento de apoyo al trabajo pedagógico con una gran cantidad de recursos y sugerencias.

Páginas de programación de la unidad didáctica

1 **Propuesta de programación**. Malla curricular de las competencias, contenidos e indicadores de logro que se trabajarán en la unidad.

2 **Competencias específicas** del área que se desarrollarán a través de los contenidos.

3 **Competencias fundamentales** que se desarrollarán en la unidad.

4 **Contenidos:**

- Conceptos.
- Procedimientos.
- Actitudes y valores.

5 **Tiempo** estimado de trabajo con la unidad.

6 **Indicadores de logro** Son los aspectos observables y medibles que se espera que los estudiantes alcancen en relación con el nivel de dominio de las competencias específicas y fundamentales. Todo esto como resultado de las estrategias y actividades que se lleven a cabo durante el trabajo con la unidad.

7 Valor transversal

1

Los números enteros. Operaciones

1 Propuesta de programación

2 COMPETENCIAS	4 CONTENIDOS
Específicas • **Razona y argumenta**: **Identifica** los números enteros. **Crea** y **expresa** argumentos matemáticos sobre las propiedades de los números enteros. • **Comunica**: **Compara** los números enteros usando los signos de relación. • **Usa algoritmo**: **Sigue** las reglas que les permiten obtener un resultado. • **Conecta**: **Aplica** las operaciones con números enteros para resolver problemas de situaciones del contexto, de otras ciencias y de la propia matemática. • **Resuelve problemas**: **Resuelve** problemas de situaciones cotidianas que involucren diferentes operaciones con números enteros. • **Utiliza herramientas tecnológicas**: **Utiliza** soportes tecnológicos como la Internet, la calculadora científica y otros dispositivos. 3 **Fundamentales** **Competencia comunicativa**: **Comprende** las instrucciones y **expresa** con claridad los procedimientos en una operación. **Resolución de problemas**: **Plantea** y **resuelve** problemas sobre situaciones del entorno que involucran operaciones con números enteros. **Científica y tecnológica**: **Reconoce** la importancia de la investigación científica. **Ética y ciudadana**: **Reconoce** la importancia del gasto responsable.	**Conceptos** • Los números enteros. • La representación de los números enteros en una recta numérica. • El valor absoluto de un número entero. • Las operaciones con números enteros y sus propiedades. • Las operaciones combinadas con números enteros. • Las operaciones enteras. **Procedimientos** • Identificación, lectura y escritura de números enteros. • Representación de los números enteros en la recta numérica. • Determinación del valor absoluto de un número entero. • Obtención del resultado de las operaciones de adición, sustracción, multiplicación, división, potenciación y radicación utilizando números enteros. **Actitudes y valores** • Valoración del gasto responsable. • Apreciación del espíritu de investigación y búsqueda.

Tiempo estimado de trabajo: 2 semanas 5

6 A

6 INDICADORES DE LOGRO

- **Identifica** números enteros en un conjunto de números dados.
- **Representa** números enteros en la recta numérica.
- **Ordena** números enteros en la recta numérica.
- **Compara** números enteros usando la recta numérica y los signos de relación.
- **Reconoce** y **escribe** las propiedades de los números enteros.
- **Determina** el valor absoluto de un número entero dado.
- **Efectúa** adiciones de números enteros.
- **Efectúa** sustracciones de números enteros.
- **Efectúa** multiplicaciones de números enteros.
- **Efectúa** divisiones de números enteros.
- **Calcula** potencias de números enteros.
- **Calcula** raíces cuadradas y cúbicas de números enteros.
- **Resuelve** problemas del contexto donde aplica operaciones de los números enteros.
- **Utiliza** recursos virtuales y electrónicos: computadora, softwares educativos, juegos interactivos y otros, en la búsqueda de información.

Valor transversal: Convivencia 7

Recursos digitales 8

Plataforma digital CD

BIBLIOTECA DEL DOCENTE
- DOCUMENTOS PARA LA PLANIFICACIÓN
- EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA
- GUÍA DE RECURSOS TIC

CUADERNO DE ACTIVIDADES

UNIDAD 1	Los números enteros. Operaciones.

RECURSOS DE REFUERZO Y AMPLIACIÓN

LibroMedia

DOCUMENTOS

PÁGINA 20	Números enteros

ACTIVIDADES INTERACTIVAS

PÁGINA 7	Recta numérica
PÁGINA 8	Enteros positivos y negativos
PÁGINA 10	El termómetro y los números enteros
PÁGINA 12	Ponte a prueba

CD DE RECURSOS DIGITALES: PLAN REGULAR

Pleno PRUEBA DE EVALUACIÓN FORMATIVA DE LA UNIDAD

Estrategias pedagógicas 9

- Recuperación de experiencias previas.
- Trabajo en equipo.
- Aprendizaje basado en problemas (ABP).

8 Recursos digitales

Referencia de los diferentes materiales que complementan cada unidad.

e-stela

Plataforma digital del proyecto Santillana Compartir.

Lugar virtual donde se colocan todos los contenidos que se incluyen en dicho proyecto.

Biblioteca del docente: Carpeta presente, tanto en la plataforma digital como en el CD, con recursos para el docente (documentos de ayuda para la planificación de las clases, pruebas y otros documentos).

Cuaderno de actividades que refuerzan y amplían los temas del libro.

Recursos de refuerzo y ampliación: Carpeta colocada en la plataforma, con recursos digitales adicionales a los que están vinculados al Libromedia, y que dan apoyo a diferentes temas.

LibroMedia: Aplicación que consiste en una versión digital del libro con recursos TIC vinculados. Se accede a dicho recurso desde la plataforma digital Santillana Compartir.

Pleno Ambiente digital de evaluación como aprendizaje.

CD de recursos: En el cual se entregan los recursos digitales que apoyan la oferta del plan regular de Santillana.

9 Estrategias de enseñanza-aprendizaje y de evaluación de aplicación más destacada en la unidad.

La Guía didáctica

Páginas de apertura

1 Competencias que se desarrollarán a través del trabajo con la unidad y que evidencian la intención pedagógica de la misma.

2 Apertura de la unidad

Justificación y planteamiento de objetivos de la unidad. Descripción de la situación que sirve como punto de partida al tema de la unidad.

3 Trabajo colectivo de la apertura

Sugerencias didácticas para el desarrollo de las actividades de motivación y exploración, y para la revisión conjunta de los elementos de la apertura de la unidad.

Unidad 1

1 Competencias de la unidad

- **Lee** y **comenta** las informaciones expuestas en el apartado *Punto de partida*.
- **Responde** preguntas relacionadas con las informaciones expuestas en el apartado *Punto de partida*.
- **Recupera** experiencias vividas mediante la observación de las imágenes de la ilustración.
- **Responde** preguntas vinculadas a sus experiencias previas sobre los conceptos que desarrollarán en la unidad en el apartado *Recuperación de conocimientos*.
- **Responde** preguntas vinculadas a las aplicaciones cotidianas de los conceptos que desarrollarán en la unidad en el apartado *Observación*

2 Apertura de la unidad

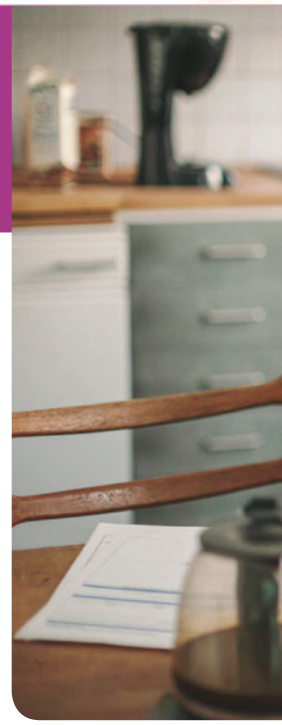
Dentro de los objetivos principales de la apertura de esta unidad se encuentran el plantear una situación de aprendizaje, una problemática o un texto que sirve para contextualizar el tema de la unidad. Todo esto con la finalidad de motivar y despertar la curiosidad de los estudiantes.

A partir de la situación o texto planteado y las imágenes de la ilustración se conecta al estudiante con el tema a tratar, a la vez que se vincula con la realidad o cotidianidad con los temas que van a desarrollar.

Todos los elementos que conforman la portada promueven la recuperación de experiencias o conocimientos previos y la motivación o el interés por los conocimientos que adquirirán en la unidad.

6

1 Los números enteros. Operaciones



Punto de partida

La mamá de Carlos tenía un sobregiro en el estado de su cuenta bancaria. Había gastado más de lo que tenía en sus fondos, y esto significa una deuda con el banco.

El sobregiro aparecía en la columna de los balances con un signo menos (–).

De inmediato, procedió a depositar fondos para eliminar la deuda. Carlos, que había estado junto a su mamá cuando recibió el balance, se preguntó a sí mismo: *¿Siempre que haya una deuda por sobregiro, aparecerá el signo menos? ¿De dónde sale este signo?*

- ¿Qué operación aritmética asocias con el signo menos (–)?
- ¿Por qué los sobregiros aparecen con un signo menos?
- Si se aceptan números con signo menos, ¿tiene algún sentido una diferencia como 75 – 100?

Conceptos y procedimientos

- Los números enteros.
- La representación de los números enteros en una recta numérica.
- El valor absoluto de un número entero.
- Las operaciones con números enteros y sus propiedades.
- Las operaciones combinadas con números enteros.
- Las operaciones enteras.

Actitudes y valores

- Valorar el gasto responsable.
- Apreciar el espíritu de investigación y búsqueda.

RECUPERACIÓN DE CONOCIMIENTOS

- ¿Qué son los números naturales?
- ¿Qué propiedades tienen los números naturales?
- ¿La adición o multiplicación de dos números naturales cualesquiera, da como resultado un número natural?
- ¿Con qué otra clase de números has trabajado hasta ahora?

6

Trabajo colectivo de apertura 3

- **Punto de partida:** Guie a sus estudiantes a leer y comentar en el grupo las informaciones expuestas en el apartado *Punto de partida*. Motíveles para que respondan las preguntas que aparecen al final del texto y para que justifiquen sus respuestas.
- **Recuperación de conocimientos:** Las preguntas de este apartado permiten hacer un diagnóstico de los conocimientos previos vinculados a los conceptos que trabajarán en la unidad.
- **Observación:** En este apartado se plantean preguntas que conectan los temas a desarrollar en la unidad con experiencias de la vida cotidiana. Promueva nuevas ideas que partan de las respuestas a las preguntas y de las experiencias vividas.

OBSERVACIÓN

- ¿Has visto alguna vez un estado de cuentas bancario?
- ¿Qué significado tienen los términos débito, crédito y balance?
- ¿Qué operaciones aritméticas están presentes en un crédito y en un débito?
- ¿Qué importancia tiene para el cliente revisar sus estados bancarios?

Esquema conceptual de la unidad 4

Los números enteros

forman el conjunto de los

Números positivos, el cero y los negativos — *se sujetan a* — Relaciones de orden

y con ellos se realizan operaciones de

Adición | Sustración | Multiplicación | División | Potenciación | Radicación

Actividad de motivación 5

Pida a sus estudiantes que lean en la sección: *Contenido*, los temas que trabajarán en la unidad y las actitudes y valores que estarán presentes en el desarrollo de la misma. Luego, para que interioricen la importancia de los números enteros en la vida cotidiana, formúleles preguntas como las siguientes:

- *¿Cómo representan las temperaturas bajo cero? ¿Y las distancias por debajo del nivel del mar? ¿Qué números utilizan para indicar las alturas por encima del nivel del mar? ¿Y el descenso de un avión que se encuentra en las alturas?*

Actividad interactiva

Recta numérica

Actividad interactiva de recuperación de experiencias previas que trabaja conceptos relacionados con la ubicación de números enteros sobre la recta numérica.

Actitudes y valores 6

Convivencia

Aprovechar la situación planteada en el apartado *Punto de partida* y en las imágenes de la ilustración para conversar con sus estudiantes sobre la importancia de ser responsables al gastar el dinero o los recursos de los cuales disponemos. Aclararles que debemos planificar y distribuir cuidadosamente los recursos y así evitar las deudas y los sobregiros.

4 Esquema conceptual de la unidad

Mapa conceptual que presenta los conceptos principales que se desarrollarán en la unidad, y la relación que existe entre dichos conceptos.

5 Actividades de motivación

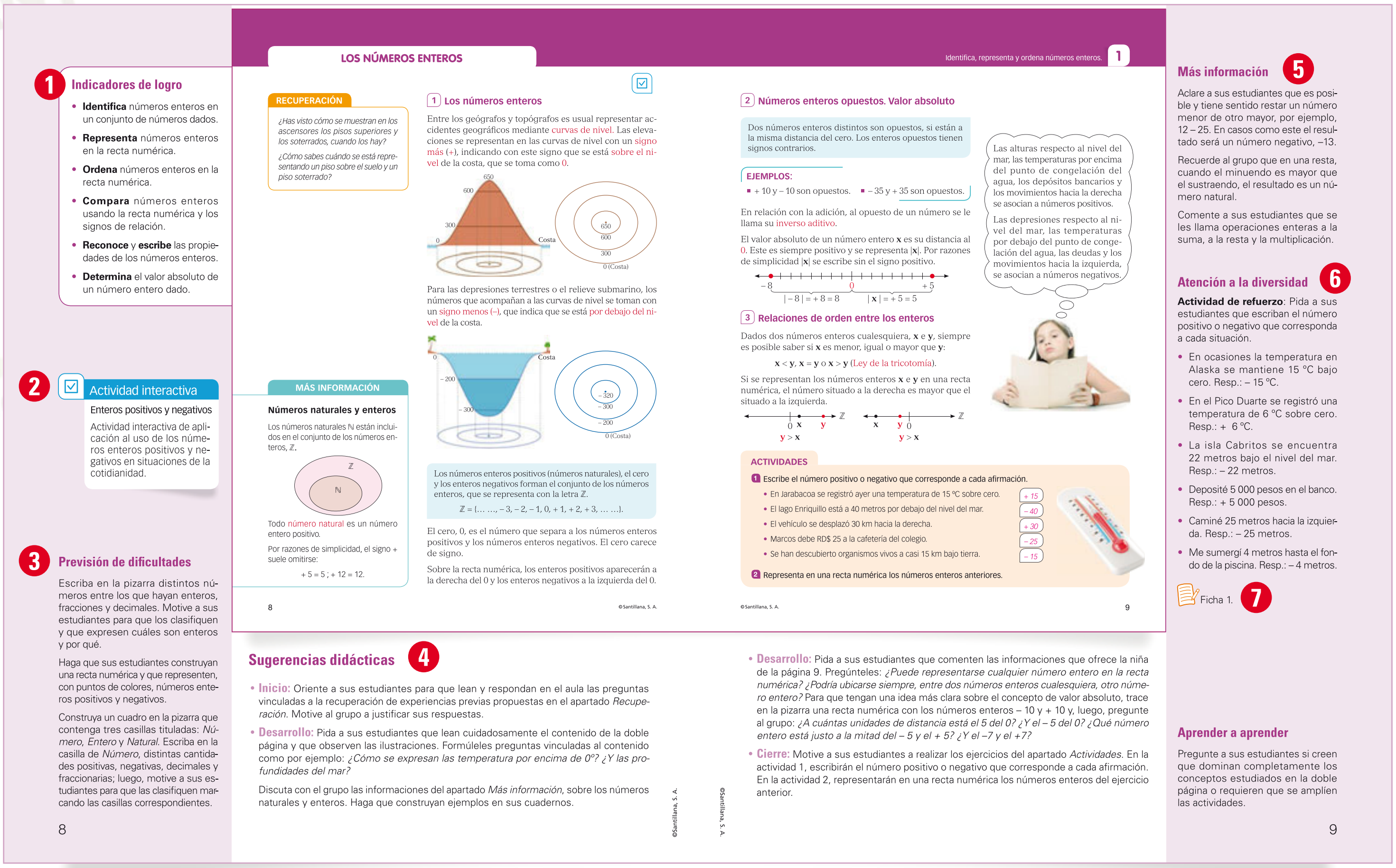
Sugerencia para motivar el estudio del tema despertando el interés de las y los estudiantes y para identificar conocimientos previos.

6 Actitudes y valores

Propuestas de actividades que promueven el desarrollo de valores y actitudes que aportan al logro de mejores seres humanos para un mundo mejor.

La Guía didáctica

Páginas de información y actividades



1 **Indicadores de logro**

- **Identifica** números enteros en un conjunto de números dados.
- **Representa** números enteros en la recta numérica.
- **Ordena** números enteros en la recta numérica.
- **Compara** números enteros usando la recta numérica y los signos de relación.
- **Reconoce** y **escribe** las propiedades de los números enteros.
- **Determina** el valor absoluto de un número entero dado.

2 **Actividad interactiva**

Enteros positivos y negativos

Actividad interactiva de aplicación al uso de los números enteros positivos y negativos en situaciones de la cotidianidad.

3 **Previsión de dificultades**

Escriba en la pizarra distintos números entre los que hayan enteros, fracciones y decimales. Motive a sus estudiantes para que los clasifiquen y que expresen cuáles son enteros y por qué.

Haga que sus estudiantes construyan una recta numérica y que representen, con puntos de colores, números enteros positivos y negativos.

Construya un cuadro en la pizarra que contenga tres casillas tituladas: *Número*, *Entero* y *Natural*. Escriba en la casilla de *Número*, distintas cantidades positivas, negativas, decimales y fraccionarias; luego, motive a sus estudiantes para que las clasifiquen marcando las casillas correspondientes.

8

LOS NÚMEROS ENTEROS

RECUPERACIÓN

¿Has visto cómo se muestran en los ascensores los pisos superiores y los soterrados, cuando los hay?

¿Cómo sabes cuándo se está representando un piso sobre el suelo y un piso soterrado?

1 **Los números enteros**

Entre los geógrafos y topógrafos es usual representar accidentes geográficos mediante curvas de nivel. Las elevaciones se representan en las curvas de nivel con un signo más (+), indicando con este signo que se está sobre el nivel de la costa, que se toma como 0.

650 600 300 0 Costa 650 600 300 0 (Costa)

Para las depresiones terrestres o el relieve submarino, los números que acompañan a las curvas de nivel se toman con un signo menos (–), que indica que se está por debajo del nivel de la costa.

0 Costa – 200 – 300 – 320 – 300 – 200 0 (Costa)

MÁS INFORMACIÓN

Números naturales y enteros

Los números naturales $\mathbb{N}$ están incluidos en el conjunto de los números enteros, $\mathbb{Z}$.

$\mathbb{Z}$ $\mathbb{N}$

Todo número natural es un número entero positivo.

Por razones de simplicidad, el signo + suele omitirse:

$+5 = 5$; $+12 = 12$.

Los números enteros positivos (números naturales), el cero y los enteros negativos forman el conjunto de los números enteros, que se representa con la letra $\mathbb{Z}$.

$\mathbb{Z} = \{\ldots \ldots, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, \ldots \ldots\}$.

El cero, 0, es el número que separa a los números enteros positivos y los números enteros negativos. El cero carece de signo.

Sobre la recta numérica, los enteros positivos aparecerán a la derecha del 0 y los enteros negativos a la izquierda del 0.

8 ©Santillana, S. A.

Identifica, representa y ordena números enteros. 1

2 **Números enteros opuestos. Valor absoluto**

Dos números enteros distintos son opuestos, si están a la misma distancia del cero. Los enteros opuestos tienen signos contrarios.

EJEMPLOS:

- $+10$ y -10 son opuestos.
- -35 y $+35$ son opuestos.

En relación con la adición, al opuesto de un número se le llama su inverso aditivo.

El valor absoluto de un número entero **x** es su distancia al 0. Este es siempre positivo y se representa |**x**|. Por razones de simplicidad |**x**| se escribe sin el signo positivo.

-8 0 $+5$

$|-8| = +8 = 8$ $|x| = +5 = 5$

Las alturas respecto al nivel del mar, las temperaturas por encima del punto de congelación del agua, los depósitos bancarios y los movimientos hacia la derecha se asocian a números positivos.

Las depresiones respecto al nivel del mar, las temperaturas por debajo del punto de congelación del agua, las deudas y los movimientos hacia la izquierda, se asocian a números negativos.

3 **Relaciones de orden entre los enteros**

Dados dos números enteros cualesquiera, **x** e **y**, siempre es posible saber si **x** es menor, igual o mayor que **y**:

$x < y$, $x = y$ o $x > y$ (Ley de la tricotomía).

Si se representan los números enteros **x** e **y** en una recta numérica, el número situado a la derecha es mayor que el situado a la izquierda.

$\mathbb{Z}$ 0 x y $y > x$ $\mathbb{Z}$ x y 0 $y > x$

ACTIVIDADES

1 Escribe el número positivo o negativo que corresponde a cada afirmación.

- En Jarabacoa se registró ayer una temperatura de 15 °C sobre cero. *+ 15*
- El lago Enriquillo está a 40 metros por debajo del nivel del mar. *– 40*
- El vehículo se desplazó 30 km hacia la derecha. *+ 30*
- Marcos debe RD$ 25 a la cafetería del colegio. *– 25*
- Se han descubierto organismos vivos a casi 15 km bajo tierra. *– 15*

2 Representa en una recta numérica los números enteros anteriores.

©Santillana, S. A. 9

Sugerencias didácticas 4

- **Inicio:** Oriente a sus estudiantes para que lean y respondan en el aula las preguntas vinculadas a la recuperación de experiencias previas propuestas en el apartado *Recuperación*. Motive al grupo a justificar sus respuestas.
- **Desarrollo:** Pida a sus estudiantes que lean cuidadosamente el contenido de la doble página y que observen las ilustraciones. Formúleles preguntas vinculadas al contenido como por ejemplo: *¿Cómo se expresan las temperatura por encima de 0°? ¿Y las profundidades del mar?*

  Discuta con el grupo las informaciones del apartado *Más información*, sobre los números naturales y enteros. Haga que construyan ejemplos en sus cuadernos.

©Santillana, S. A.

©Santillana, S. A.

- **Desarrollo:** Pida a sus estudiantes que comenten las informaciones que ofrece la niña de la página 9. Pregúnteles: *¿Puede representarse cualquier número entero en la recta numérica? ¿Podría ubicarse siempre, entre dos números enteros cualesquiera, otro número entero?* Para que tengan una idea más clara sobre el concepto de valor absoluto, trace en la pizarra una recta numérica con los números enteros – 10 y + 10 y, luego, pregunte al grupo: *¿A cuántas unidades de distancia está el 5 del 0? ¿Y el – 5 del 0? ¿Qué número entero está justo a la mitad del – 5 y el + 5? ¿Y el –7 y el +7?*
- **Cierre:** Motive a sus estudiantes a realizar los ejercicios del apartado *Actividades*. En la actividad 1, escribirán el número positivo o negativo que corresponde a cada afirmación. En la actividad 2, representarán en una recta numérica los números enteros del ejercicio anterior.

Más información 5

Aclare a sus estudiantes que es posible y tiene sentido restar un número menor de otro mayor, por ejemplo, 12 – 25. En casos como este el resultado será un número negativo, –13.

Recuerde al grupo que en una resta, cuando el minuendo es mayor que el sustraendo, el resultado es un número natural.

Comente a sus estudiantes que se les llama operaciones enteras a la suma, a la resta y la multiplicación.

Atención a la diversidad 6

Actividad de refuerzo: Pida a sus estudiantes que escriban el número positivo o negativo que corresponda a cada situación.

- En ocasiones la temperatura en Alaska se mantiene 15 °C bajo cero. Resp.: – 15 °C.
- En el Pico Duarte se registró una temperatura de 6 °C sobre cero. Resp.: + 6 °C.
- La isla Cabritos se encuentra 22 metros bajo el nivel del mar. Resp.: – 22 metros.
- Deposité 5 000 pesos en el banco. Resp.: + 5 000 pesos.
- Caminé 25 metros hacia la izquierda. Resp.: – 25 metros.
- Me sumergí 4 metros hasta el fondo de la piscina. Resp.: – 4 metros.

Ficha 1. 7

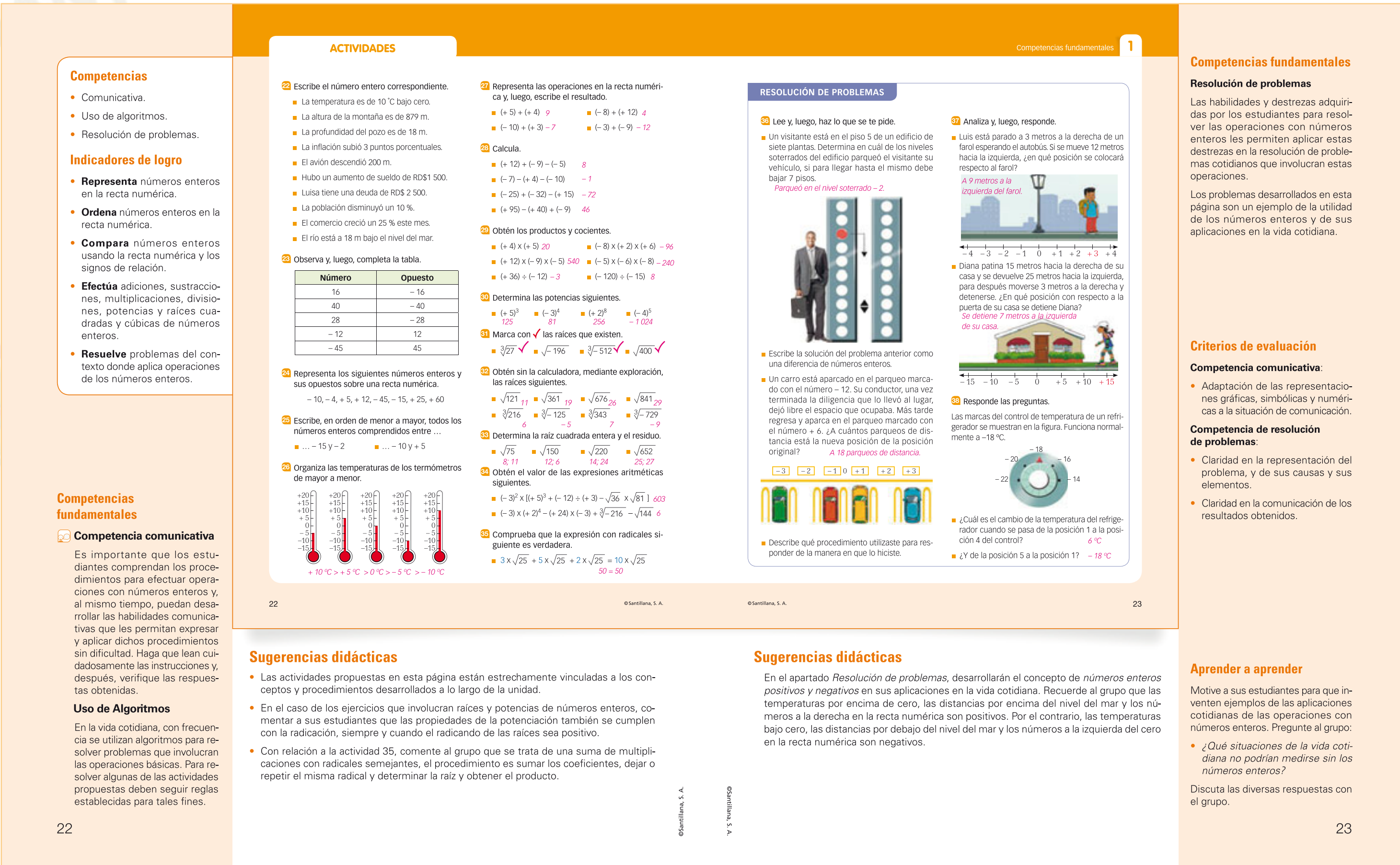
Aprender a aprender

Pregunte a sus estudiantes si creen que dominan completamente los conceptos estudiados en la doble página o requieren que se amplíen las actividades.

9

1. **Indicadores de logro** que corresponden a cada sesión de aprendizaje o plan de clase.
2. **Referencia al recurso digital.** Descripción y propósito del recurso acompañado de una actividad.
3. **Previsión de dificultades.** Orientación acerca de aspectos particulares que pudieron ser de difícil manejo dentro del trabajo con la unidad y sus temas.
4. **Sugerencias didácticas**
   - Para iniciar el tema y activar conocimientos previos.
   - Para desarrollar, es decir, construir los aprendizajes.
   - Para cerrar, evaluar y reforzar el logro de los indicadores.
5. **Más actividades / Más información.** Actividades / información de refuerzo o ampliación que afianzan los conocimientos.
6. **Atención a la diversidad.** Actividades de refuerzo y de ampliación. Ejercicios que complementan los propuestos en la unidad.
7. **Referencia didáctica al Cuaderno de actividades** para reforzar y ampliar el aprendizaje adquirido.

Páginas de desarrollo de competencias fundamentales



Competencias

- Comunicativa.
- Uso de algoritmos.
- Resolución de problemas.

Indicadores de logro

- **Representa** números enteros en la recta numérica.
- **Ordena** números enteros en la recta numérica.
- **Compara** números enteros usando la recta numérica y los signos de relación.
- **Efectúa** adiciones, sustracciones, multiplicaciones, divisiones, potencias y raíces cuadradas y cúbicas de números enteros.
- **Resuelve** problemas del contexto donde aplica operaciones de los números enteros.

ACTIVIDADES

22 Escribe el número entero correspondiente.
- La temperatura es de 10 °C bajo cero.
- La altura de la montaña es de 879 m.
- La profundidad del pozo es de 18 m.
- La inflación subió 3 puntos porcentuales.
- El avión descendió 200 m.
- Hubo un aumento de sueldo de RD$1 500.
- Luisa tiene una deuda de RD$ 2 500.
- La población disminuyó un 10 %.
- El comercio creció un 25 % este mes.
- El río está a 18 m bajo el nivel del mar.

23 Observa y, luego, completa la tabla.

Número	Opuesto
16	− 16
40	− 40
28	− 28
− 12	12
− 45	45

24 Representa los siguientes números enteros y sus opuestos sobre una recta numérica.

− 10, − 4, + 5, + 12, − 45, − 15, + 25, + 60

25 Escribe, en orden de menor a mayor, todos los números enteros comprendidos entre …
- … − 15 y − 2
- … − 10 y + 5

26 Organiza las temperaturas de los termómetros de mayor a menor.

+ 10 °C > + 5 °C > 0 °C > − 5 °C > − 10 °C

27 Representa las operaciones en la recta numérica y, luego, escribe el resultado.
- $(+5) + (+4)$ 9
- $(-8) + (+12)$ 4
- $(-10) + (+3)$ − 7
- $(-3) + (-9)$ − 12

28 Calcula.
- $(+12) + (-9) - (-5)$ 8
- $(-7) - (+4) - (-10)$ − 1
- $(-25) + (-32) - (+15)$ − 72
- $(+95) - (+40) + (-9)$ 46

29 Obtén los productos y cocientes.
- $(+4) \times (+5)$ 20
- $(-8) \times (+2) \times (+6)$ − 96
- $(+12) \times (-9) \times (-5)$ 540
- $(-5) \times (-6) \times (-8)$ − 240
- $(+36) \div (-12)$ − 3
- $(-120) \div (-15)$ 8

30 Determina las potencias siguientes.
- $(+5)^3$ 125
- $(-3)^4$ 81
- $(+2)^8$ 256
- $(-4)^5$ − 1 024

31 Marca con ✓ las raíces que existen.
- $\sqrt[3]{27}$ ✓
- $\sqrt{-196}$
- $\sqrt[3]{-512}$ ✓
- $\sqrt{400}$ ✓

32 Obtén sin la calculadora, mediante exploración, las raíces siguientes.
- $\sqrt{121}$ 11
- $\sqrt{361}$ 19
- $\sqrt{676}$ 26
- $\sqrt{841}$ 29
- $\sqrt[3]{216}$ 6
- $\sqrt[3]{-125}$ − 5
- $\sqrt[3]{343}$ 7
- $\sqrt[3]{-729}$ − 9

33 Determina la raíz cuadrada entera y el residuo.
- $\sqrt{75}$ 8; 11
- $\sqrt{150}$ 12; 6
- $\sqrt{220}$ 14; 24
- $\sqrt{652}$ 25; 27

34 Obtén el valor de las expresiones aritméticas siguientes.
- $(-3)^2 \times [(+5)^3 + (-12) \div (+3) - \sqrt{36} \times \sqrt{81}]$ 603
- $(-3) \times (+2)^4 - (+24) \times (-3) + \sqrt[3]{-216} - \sqrt{144}$ 6

35 Comprueba que la expresión con radicales siguiente es verdadera.
- $3 \times \sqrt{25} + 5 \times \sqrt{25} + 2 \times \sqrt{25} = 10 \times \sqrt{25}$

  $50 = 50$

22 ©Santillana, S. A.

Competencias fundamentales 1

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

36 Lee y, luego, haz lo que se te pide.
- Un visitante está en el piso 5 de un edificio de siete plantas. Determina en cuál de los niveles soterrados del edificio parqueó el visitante su vehículo, si para llegar hasta el mismo debe bajar 7 pisos.

  Parqueó en el nivel soterrado − 2.
- Escribe la solución del problema anterior como una diferencia de números enteros.
- Un carro está aparcado en el parqueo marcado con el número − 12. Su conductor, una vez terminada la diligencia que lo llevó al lugar, dejó libre el espacio que ocupaba. Más tarde regresa y aparca en el parqueo marcado con el número + 6. ¿A cuántos parqueos de distancia está la nueva posición de la posición original? A 18 parqueos de distancia.

  − 3 − 2 − 1 0 + 1 + 2 + 3
- Describe qué procedimiento utilizaste para responder de la manera en que lo hiciste.

37 Analiza y, luego, responde.
- Luis está parado a 3 metros a la derecha de un farol esperando el autobús. Si se mueve 12 metros hacia la izquierda, ¿en qué posición se colocará respecto al farol?

  A 9 metros a la izquierda del farol.

  − 4 − 3 − 2 − 1 0 + 1 + 2 + 3 + 4
- Diana patina 15 metros hacia la derecha de su casa y se devuelve 25 metros hacia la izquierda, para después moverse 3 metros a la derecha y detenerse. ¿En qué posición con respecto a la puerta de su casa se detiene Diana?

  Se detiene 7 metros a la izquierda de su casa.

  − 15 − 10 − 5 0 + 5 + 10 + 15

38 Responde las preguntas.

Las marcas del control de temperatura de un refrigerador se muestran en la figura. Funciona normalmente a −18 °C.

− 18 − 20 − 16 − 22 − 14
- ¿Cuál es el cambio de la temperatura del refrigerador cuando se pasa de la posición 1 a la posición 4 del control? 6 °C
- ¿Y de la posición 5 a la posición 1? − 18 °C

©Santillana, S. A. 23

Competencias fundamentales

Resolución de problemas

Las habilidades y destrezas adquiridas por los estudiantes para resolver las operaciones con números enteros les permiten aplicar estas destrezas en la resolución de problemas cotidianos que involucran estas operaciones.

Los problemas desarrollados en esta página son un ejemplo de la utilidad de los números enteros y de sus aplicaciones en la vida cotidiana.

Criterios de evaluación

Competencia comunicativa:
- Adaptación de las representaciones gráficas, simbólicas y numéricas a la situación de comunicación.

Competencia de resolución de problemas:
- Claridad en la representación del problema, y de sus causas y sus elementos.
- Claridad en la comunicación de los resultados obtenidos.

Competencias fundamentales

Competencia comunicativa

Es importante que los estudiantes comprendan los procedimientos para efectuar operaciones con números enteros y, al mismo tiempo, puedan desarrollar las habilidades comunicativas que les permitan expresar y aplicar dichos procedimientos sin dificultad. Haga que lean cuidadosamente las instrucciones y, después, verifique las respuestas obtenidas.

Uso de Algoritmos

En la vida cotidiana, con frecuencia se utilizan algoritmos para resolver problemas que involucran las operaciones básicas. Para resolver algunas de las actividades propuestas deben seguir reglas establecidas para tales fines.

Sugerencias didácticas

- Las actividades propuestas en esta página están estrechamente vinculadas a los conceptos y procedimientos desarrollados a lo largo de la unidad.
- En el caso de los ejercicios que involucran raíces y potencias de números enteros, comentar a sus estudiantes que las propiedades de la potenciación también se cumplen con la radicación, siempre y cuando el radicando de las raíces sea positivo.
- Con relación a la actividad 35, comente al grupo que se trata de una suma de multiplicaciones con radicales semejantes, el procedimiento es sumar los coeficientes, dejar o repetir el misma radical y determinar la raíz y obtener el producto.

Sugerencias didácticas

En el apartado *Resolución de problemas*, desarrollarán el concepto de *números enteros positivos y negativos* en sus aplicaciones en la vida cotidiana. Recuerde al grupo que las temperaturas por encima de cero, las distancias por encima del nivel del mar y los números a la derecha en la recta numérica son positivos. Por el contrario, las temperaturas bajo cero, las distancias por debajo del nivel del mar y los números a la izquierda del cero en la recta numérica son negativos.

Aprender a aprender

Motive a sus estudiantes para que inventen ejemplos de las aplicaciones cotidianas de las operaciones con números enteros. Pregunte al grupo:

- *¿Qué situaciones de la vida cotidiana no podrían medirse sin los números enteros?*

Discuta las diversas respuestas con el grupo.

22 ©Santillana, S. A. ©Santillana, S. A. 23

- **Competencias fundamentales**. Actividades para desarrollar las siete competencias fundamentales que forman parte de los componentes del nuevo diseño curricular dado por el Ministerio de Educación de la República Dominicana.
- **Articulación de áreas**. Actividades que promueven la interdisciplanaridad.
- **Procedimiento aplicado para desarrollar la competencia científica y tecnológica**. Se muestra su descripción e importancia.
- **Criterios de evaluación**. Orientan el desarrollo de las competencias fundamentales trabajadas, las cuales se basan en las actividades que se proponen en esta doble página.
- **Aprender a aprender**. Presentación de preguntas de reflexión sobre el aprendizaje y estrategias para el aprendizaje cooperativo y autónomo.

La Guía didáctica

Páginas de evaluación

Vinculación de las actividades de evaluación con los indicadores de la unidad formulados en las páginas de apertura y con los datos del currículo para la materia y el tema.

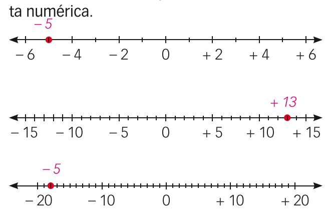
Indicadores de logro de la evaluación

- **Identifica** números enteros en un conjunto de números dados. **Representa** números enteros en la recta numérica. **Ordena** números enteros en la recta numérica. **Compara** números enteros usando la recta numérica y los signos de relación. **Reconoce** y **escribe** las propiedades de los números enteros. **Determina** el valor absoluto de un número entero dado. **Efectúa** adiciones de números enteros. **Realiza** sustracciones de números enteros. **Efectúa** multiplicaciones de números enteros. **Realiza** divisiones de números enteros. **Calcula** potencias de números enteros. **Calcula** raíces cuadradas y cúbicas de números enteros. **Resuelve** problemas del contexto donde aplica operaciones de los números enteros. **Utiliza** recursos virtuales y electrónicos: computadora, softwares educativos, juegos interactivos y otros, en la búsqueda de información.

EVALUACIÓN

Modela y representa

39 Identifica el número representado en cada recta numérica.



Comunica

40 Escribe el signo < o > entre cada par de números enteros.

- + 5 <… + 10
- – 5 >… – 9
- + 5 >… – 10
- 0 >… – 25
- – 30 <… – 20
- – 16 <… + 10

Usa algoritmos

41 Obtén el valor de las siguientes expresiones.

- $5 \times |5-9| + 3 \times |3+5|$ 44
- $6 \times |10+2| - 4 \times |8-14| + |6-15|$ 57
- $|3-8| \times |5-9| - |6+5| \times |4-9|$ – 35
- $|8-(-5)-9| \times |(-15)+10-(-2)|$ – 12

42 Efectúa las operaciones siguientes.

- $10+(-3)-(-12)+18$ 37
- $(-32)-[15+(-8)-12]$ – 27
- $(6-12+15)-(10-(-15)-20)$ 4
- $36-[(-6)+(-12)-4-(-6)]$ 52

43 Efectúa las operaciones combinadas.

- $(-5) \times 8 \times (-2) \times (-4)$ – 320
- $3 \times [(-6)+9-(-3)]$ 18
- $4 \times (-6) \times (-5) \div (-2)$ – 60
- $120 \div [(-3) \times 5 \times (-2)]$ 4

44 Completa la tabla.

a	b	c	b + c	a x (b + c)
– 5	+ 2	– 4	– 2	10
+ 3	– 3	– 9	– 12	– 36
+ 2	+ 5	– 7	– 2	– 4
– 6	– 8	– 5	– 13	78

45 Calcula.

- $2^4 \times 2^3 \times 2$ 256
- $(-3)^3 \times (-3)^2 \div (-3)^4$ – 3
- $(-5)^5 \times (-5)^3 \div (-5)^6$ – 3
- $[9^{10} \times 9^5 \times 9^3] \div 9^{15}$ 276

46 Obtén las siguientes raíces cuadradas exactas o enteras. Escribe los residuos de las raíces enteras.

- $\sqrt{289}$ 17
- $\sqrt{441}$ 21
- $\sqrt{520}$ 22; 36
- $\sqrt{680}$ 26; 4
- $\sqrt{900}$ 30
- $\sqrt{785}$ 28; 1

Conecta

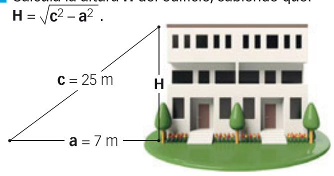
47 Resuelve el problema.

Un biólogo marino se encuentra, inicialmente, a 12 metros por debajo de la superficie del océano. Desciende 8 metros y, de inmediato, asciende 6 metros, colocando allí una cámara para observar el comportamiento de los peces loro.

- ¿A cuántos metros por debajo de la superficie coloca el biólogo la cámara?

A 14 metros de profundidad.

48 Calcula la altura **H** del edificio, sabiendo que: $H = \sqrt{c^2 - a^2}$.



24

©Santillana, S. A.

Sugerencias didácticas para la evaluación 2

- Es importante verificar, antes de dar inicio a las actividades de evaluación, que sus estudiantes dominan la regla de los signos y los procedimientos para comparar números enteros y para resolver las operaciones que los involucran.
- Si cuenta con tecnología como refuerzo, puede aplicar la prueba de la unidad que se encuentra en la plataforma didáctica Pleno.

1 **Competencias específicas** desarrolladas en la evaluación.

2 **Sugerencias didácticas** para las actividades de evaluación.

1 Competencias específicas

- Modela y representa
- Comunica
- Usa algoritmos
- Conecta
- Resuelve problemas

24

49 **Estudio de caso.** Lean cuidadosamente y, luego, hagan lo que se les pide.

El frigorífico de una pescadería mantiene a los mariscos a una temperatura constante de – 10 ºC. Los conserva en buen estado hasta los 0 ºC. A temperaturas mayores que 0 ºC, los mariscos empiezan a descomponerse.

Imaginen que a las 8 de la mañana ocurre una interrupción del servicio de energía eléctrica y la temperatura del frigorífico comienza a aumentar a una velocidad de 2 ºC cada 15 minutos.

- Exploren procedimientos con los que puedan determinar a qué hora de la mañana, si el servicio de energía no es restablecido, los mariscos alcanzarán la temperatura en que empiecen a dañarse.
- Expongan el procedimiento descubierto en el aula y defiéndanlo de las posibles críticas que pudieran surgir.

A las 9:15 se alcanza la temperatura en que empieza a peligrar la provisión.

50 Responde las preguntas.

- ¿Cómo manejas el dinero que te dan tus padres para la merienda del colegio o tus gastos semanales?
- ¿Qué importancia tiene para ti administrar tus gastos?
- ¿Puedes poner ejemplos en los que se muestren actitudes responsables e irresponsables frente al gasto?

APRENDIZAJE AUTÓNOMO

51 Marca según tus logros. *Respuesta personal.*

	Iniciado	En proceso	Logrado
• Identifico, represento y ordeno números enteros.	☐	☐	☐
• Efectúo operaciones aritméticas con números enteros.	☐	☐	☐
• Determino valores absolutos de números enteros.	☐	☐	☐
• Resuelvo problemas en los que intervienen enteros.	☐	☐	☐

52 Reflexiona sobre tu aprendizaje. *Respuesta personal.*

- ¿Te sientes satisfecho con el aprendizaje logrado en esta unidad?
- ¿En cuáles contenidos de los estudiados te gustaría profundizar?

Estudio de caso 3

- En la actividad 49, deberán leer cuidadosamente el problema propuesto y las instrucciones, después, hacer lo que se les indica. En este caso, conocida la temperatura en la que se conservan los mariscos, ante la ocurrencia de un apagón, descubrirán un procedimientos para determinar a qué temperatura los mariscos empezarán a dañarse. Expondrán en el aula el procedimiento descubierto y lo defenderán de las posibles críticas.

Actitudes y valores 4

Convivencia

En la sección destinada a *Actitudes y valores*, actividad 50, responderán cómo manejan el dinero que les dan sus padres para la merienda del colegio o los gastos semanales. Dirán qué importancia tiene para ellos administrar sus gastos. Expresarán si pueden poner ejemplos en los que se muestren actitudes responsables e irresponsables frente al gasto.

Aprendizaje autónomo 5

- En la actividad 51 evaluarán por ellos mismos si los conceptos y procedimientos que trabajaron en la unidad se encuentran en estado de iniciación, en proceso o logrados.En la actividad 52, reflexionarán sobre su aprendizajes.

Aprender a aprender 6

Haga que sus estudiantes apliquen los conceptos aprendidos en la unidad en situaciones de la cotidianidad, por ejemplo, preguntar:

- *¿Qué números se utilizan para indicar las temperaturas bajo cero?*
- *¿Podrían dar otros usos cotidianos de los números enteros?*

25

Sugerencias didácticas para la evaluación 7

- Como medida de control, formule al grupo preguntas sobre los conceptos aprendidos en la unidad, como por ejemplo:
  - — *¿Qué números forman parte del conjunto de los enteros?*
  - — *¿Cuál es el signo del resultado de la suma o resta con cantidades con signos iguales?*
  - — *¿Y cuál es el resultado cuando las cantidades tienen signos distintos?*

3 **Casos para resolver**. Aplicaciones de los temas estudiados en situaciones de la vida cotidiana.

4 **Actitudes y valores**. Aplicados en toda la unidad

5 **Aprendizaje autónomo**. Autoevaluación

6 **Aprender a aprender**. Reflexión sobre las estrategias y técnicas de aprendizaje, aplicadas para el estudio de la unidad y los resultados obtenidos.

7 **Sugerencias didácticas para la evaluación**.

La Guía didáctica

Páginas de los proyectos

Interdisciplinaridad

Los proyectos favorecen la articulación de las áreas curriculares y el desarrollo de las competencias fundamentales y específicas.

1 Competencias fundamentales que se favorecen con la ejecución del proyecto.

2 Indicadores de logro que se derivan de las competencias fundamentales y específicas.

3 Proyecto. Características, objetivos y maneras de realización de las actividades del proyecto.

4 Sugerencias didácticas. Sugerencias e indicaciones hechas por etapas para viabilizar y facilitar el trabajo relacionado con las actividades del proyecto.

1 Competencias fundamentales

- **Competencia comunicativa**: Comprende y usa correctamente el lenguaje matemático.
- **Resolución de problemas**: Identifica y analiza los datos de un problema y traza estrategias para resolverlo.

2 Indicadores de logro

- **Sabe** en qué consisten los problemas de aligación o mezcla y aleaciones.
- **Reconoce** cómo se aborda un problema de aligación o mezcla y aleaciones.
- **Sigue** al pie de la letra los procedimientos para resolver un problema de aligación o mezcla y aleaciones.
- **Experimenta** en su hogar, con ayuda de sus padres, para obtener la solución de un problema de aligación o mezcla y aleaciones.

SABER HACER **Duración**: 2 sesiones de clase.

3 Proyecto

El empleo de proyectos en la enseñanza de las matemáticas favorece el desarrollo de las competencias fundamentales y propias del área del nuevo modelo curricular.

El trabajo con el proyecto podría ser desarrollado individual o grupalmente y discutido tras su realización en el aula.

Sugerencias didácticas

En este proyecto I, *Matemáticas, mezclas y aleaciones*, los estudiantes pondrán en práctica conocimientos adquiridos hasta ahora, en un contexto distinto vinculado a la vida cotidiana. Es importante acompañarles en el proceso y ofrecerles las orientaciones necesarias.

100

PROYECTO I

Matemáticas, mezclas y aleaciones

1 ¿En qué consisten los problemas de aligación?

En la naturaleza, el comercio y los procesos industriales usualmente las sustancias y metales, las materias primas y los productos se presentan o producen en forma de mezclas o aleaciones de componentes distintos. El término aligación significa mezcla o unión.

El conocimiento de la proporción de cada componente para conseguir una masa deseada o la determinación del precio de la mezcla son problemas de aligación.

Observa en el ejemplo cómo se aborda y se resuelve un problema de aligación.

- Un fabricante de especias usa cilantro, comino, cebolla seca y pimiento en la preparación de una mezcla. En la mezcla hay un 30 % de cilantro, un 12 % de comino, 40 % de cebolla seca y un 18 % de pimiento. Los precios por gramo de cada especia componente aparecen en la tabla siguiente. ¿Cuál es el precio de 250 gramos de la mezcla?

Especia	Cilantro	Comino	Cebolla	Pimiento
Precio, p($/g)	0.20	0.75	0.32	0.60

Primero, se determina la masa, **m**, de cada especia componente de la mezcla presente en **M** = 250 gramos:

$\mathbf{m}_{Cil}$ = 30 % de 250 g = 75 g. $\mathbf{m}_{Com}$ = 12 % de 250 g = 30 g.

$\mathbf{m}_{Ceb}$ = 40 % de 250 g = 100 g. $\mathbf{m}_{Pim}$ = 18 % de 250 g = 45 g.

Luego, se calcula el precio, **P**, de cada gramo de la mezcla utilizando la expresión:

$$\mathbf{P} = \frac{\mathbf{m}_{Cil} \times \mathbf{p}_{Cil} + \mathbf{m}_{Com} \times \mathbf{p}_{Com} + \mathbf{m}_{Ceb} \times \mathbf{p}_{Ceb} + \mathbf{m}_{pim} \times \mathbf{p}_{pim}}{\mathbf{M}}$$

Dando los valores correspondientes a las magnitudes presentes en la expresión anterior:

$$\mathbf{P} = \frac{75\text{ g} \times \$\,0.20 + 30\text{ g} \times \$\,0.75 + 100\text{ g} \times \$\,0.32 + 45\text{ g} \times \$\,0.60}{250\text{ g}} = \$0.386$$

Finalmente, el precio de 250 g de la mezcla de especias es: 250 g x $ 0.386 /g = $ 96.50

100 ©Santillana, S. A.

4 Sugerencias didácticas

- **Inicio:** Motivar al grupo para que lean y comenten en el aula el texto que expresa en qué consisten los problemas de aligación.
- **Desarrollo:** Pídales que lean el problema con el cual observarán cómo se aborda un problema de aligación. Escriba los datos del problema en la pizarra y los procedimientos requeridos para obtener la solución del mismo. Pídales que desarrollen los pasos en sus cuadernos. Formúleles preguntas vinculadas a los mismos a fin de verificar que han comprendido su solución.

Inteligencia colaborativa

SABER HACER

■ Haz lo que se te pide.

■ **Consigue** los precios por libra de tres clases de arroz de los que normalmente se ofertan en los supermercados y, luego, **llena** una tabla como la que se muestra a continuación.

Tipo de arroz	A	B	C
Precio por paquete (en $)	....	....	....
Precio por libra (en $)	....	....	....

■ Ahora, **imagínate** que vas a mezclar los tres tipos de arroz que elegiste de la siguiente manera: 28 lb del arroz tipo **A**; 32 lb del tipo **B** y 20 lb del tipo **C**. **Calcula** el precio, por libra, al que deberás vender el arroz conseguido con la mezcla.

■ **Responde** y **justifica** tu respuesta. ¿Si se mantiene el mismo peso de la mezcla, qué le ocurre a su precio si aumentamos la cantidad de libras del arroz más caro y bajamos igual número de libras al arroz más barato? **Comparte** y **comenta** tus resultados con el grupo.

2 Quilates y milésimas

La fracción de metal precioso, como el oro o la plata, que contiene una aleación, indica la ley o pureza de una joya. La ley de una aleación con un metal precioso se mide en quilates y, más recientemente, en milésimas (24 quilates = 1 000 milésimas).

Un quilate equivale a 1/24 de la masa de la joya. Una joya de oro de 14 quilates tiene 14/24 partes de su peso en oro y el resto de otros metales.

La masa de oro de la aleación con que está hecha una joya de este metal se consigue multiplicando su número de quilates por la masa de la aleación y dividiendo el resultado por 24.

■ **Resuelve** el problema.

Un joyero compra joyas deterioradas para extraer su parte de oro. Recibió en su establecimiento un viejo anillo de oro de 18 quilates con una masa de 10.4 g. El dueño del anillo le dijo al joyero que este tenía 8 g de oro. ¿Cómo ayudarías al joyero a saber si en verdad el anillo contiene esa cantidad de oro?

■ **Experimenta en tu hogar**.

Junto a tus padres, escoge algunas piezas de oro de las cuales se conozca su número de quilates y diseñen una estrategia para calcular la cantidad de oro de las piezas.

■ ¿Qué supuesto inicial o hipótesis es su punto de partida?

■ ¿Qué harían para someter su hipótesis a prueba?

■ Escribe las conclusiones a que llegaron.

- **Desarrollo:** Lean en el grupo los problemas propuestos en esta página y los procedimientos que deberán aplicar para alcanzar la solución de los mismos. Observe de cerca que realizan correctamente las operaciones en cada caso y motíveles a expresar los procedimientos seguidos.
- **Cierre:** En el último problema experimentarán en sus hogares con la colaboración de sus padres, tomando algunas piezas de oro, y diseñarán una estrategia para calcular la cantidad de oro de las piezas. Ofrézcales las orientaciones que sean necesarias.

Otras sugerencias 5

- Es importante explicar a los estudiantes en qué consiste el proyecto I, *Matemáticas, mezclas y aleaciones*. Hacer un breve comentario acerca de la presencia de la Matemática en la vida cotidiana y en aspectos relacionados con la Química, como es el caso de los problemas que resolverán en este proyecto.
- Pídales que lean y comenten el siguiente problema en el que mezclarán tres tipos de arroz para determinar el precio por libra. Para este fin, llenarán una tabla especificando el tipo de arroz, el precio por paquete y el precio por libra.
- Motíveles para que lean y comenten las informaciones sobre el último problema de aleación, *Quilates y milésimas*. Haga que presten atención a los procedimientos para determinar la masa de oro de una aleación. Motíveles para que lean el problema, realicen los cálculos necesarios y respondan las preguntas.
- Acompáñeles y oriénteles en el proceso de realización de las actividades involucradas en este proyecto.

Previsión de dificultades 6

- Durante el proyecto los estudiantes podrían encontrar dificultades. Hágales las precisiones y sugerencias que sean necesarias para su mejor desempeño en la realización de las actividades.

Aprender a aprender 7

Pregunte a sus estudiantes:

- *¿Les parecieron importantes para su vida personal los conceptos trabajados en este proyecto?*
- *¿Podrían dar un ejemplo de estas aplicaciones?*

101

5 Otras sugerencias. Para favorecer y enriquecer el trabajo con los temas y problemas planteados en el proyecto.

6 Previsión de dificultades. Para anticipar las posibles dificultades que pudieran presentarse a los estudiantes en el trabajo con el proyecto.

7 Aprender a aprender. Preguntas metacognitivas con el fin de que los estudiantes reflexionen sobre su proceso de aprendizaje.

La Guía didáctica

Páginas de los proyectos

Competencias fundamentales

- **Competencia científica y tecnológica**: Reconoce los avances del conocimiento matemático y emplea instrumentos tecnológicos para comprobar relaciones numéricas.
- **Pensamiento lógico, creativo y crítico**: Emplea correctamente procesos para comprobar proposicones matemáticas.

Indicadores de logro

- **Conoce** la importancia y el significado del número llamado *fi*.
- **Identifica** la presencia del número llamado *fi* en la naturaleza y en el arte.
- **Identifica** la presencia del número llamado *fi* en un segmento de recta.
- **Construye** rectángulos áureos de acuerdo con las especificaciones indicadas.

SABER HACER **Duración**: 2 sesiones de clase.

Proyecto

El empleo de proyectos en la enseñanza de las matemáticas favorece el desarrollo de las competecias fundamentales y propias del área del nuevo modelo curricular.

El trabajo con el proyecto podría ser desarrollado individual o grupalmente y discutido tras su realización en el aula.

Sugerencias didácticas

En este proyecto II, *Un extraño número llamado fi*, los estudiantes pondrán en práctica conocimientos adquiridos hasta ahora, en un contexto distinto vinculado a la vida cotidiana. Es importante acompañarles en el proceso y ofrecerles las orientaciones necesarias.

190

PROYECTO II

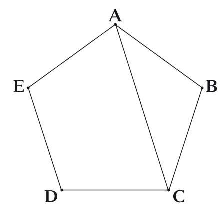
Un extraño número llamado *fi*

1 ¿Qué es el número *fi*?

Después de π (*pi*), el llamado número de oro, número áureo o, simplemente, número *fi*, es tal vez uno de los números que más ha llamado la atención en la historia, por su misteriosa relación con la belleza de muchas formas de la naturaleza y del arte.

Observa el pentágono regular de la derecha. El número de oro es la relación entre la longitud de la diagonal, $\overline{AC}$, de un pentágono regular y su lado, $\overline{AB}$.

Fi no es un número racional, esto es no puede ser escrito como un decimal exacto o periódico.



$$fi = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) \approx 1.618033\ldots$$

2 La presencia de *fi* en la naturaleza y en el arte

El número *fi* está presente en muchas formas espirales como la de algunas conchas de moluscos.

Si observas con atención el centro del girasol, notarás que en su diseño hay presente una combinación de espirales en sentidos opuestos que se acercan a un punto. El número de espirales en uno y otro sentido guarda relación con *fi*.

En algunas proporciones entre partes del cuerpo humano se obtienen razones muy cercanas al número aúreo.

El Partenón de Atenas, una obra de la arquitectura griega clásica, muestra una razón cercana a fi entre su anchura y su altura.

190

Sugerencias didácticas

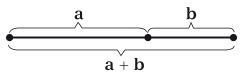
- **Inicio:** Motivar al grupo para que lean y comenten en el aula el texto que expresa qué es el número *fi* y la presencia del *fi* en la naturaleza y en el arte. Pídales que observen y comenten las ilustraciones.
- **Desarrollo:** Pídales que lean en el grupo las informaciones relacionadas con el número *fi* en un segmento de recta. Haga que se fijen en la representación del rectángulo áureo de base **a** + **b** y de altura **a**.

Inteligencia colaborativa

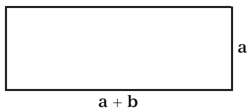
SABER HACER

3 El número *fi* en un segmento de recta

El segmento $\overline{AB}$ estará dividido con razón áurea si se compone de otros dos segmentos, uno mayor de longitud **a** y otro menor de longitud **b**, y se cumple que la razón de la longitud total del segmento, **a** + **b**, y la de su parte mayor, **a**, es igual a la razón entre la longitud de la parte mayor, **a**, y la de su parte menor.

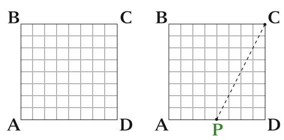


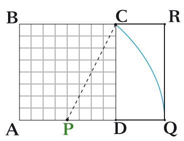
Un rectángulo de base de longitud **a** + **b** y de altura de longitud **a** se llama rectángulo áureo.



$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} = 1.618033\ \ldots$$

- **Construyan**, en grupos, lo que se les pide.
- Un rectángulo áureo siguiendo las instrucciones y el modelo.
  - **Traza** un cuadrado **ABCD** sobre una hoja de papel cuadriculado. **Escoge** un lado que tenga por longitud un número par de unidades.
  - **Ubica** el punto medio **P** de la base del cuadrado y, desde **P**, **traza** un segmento hasta el vértice **C**.
  - Con radio $\overline{PC}$ y centro en **P**, traza un arco que corte a la base prolongada en **Q** y une con un segmento al vértice **A** con el punto **Q**. El rectángulo **ABRQ** es el rectángulo áureo buscado. Compruébalo.



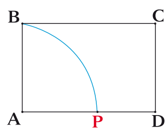


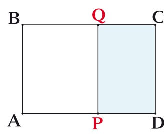
- Un rectángulo áureo a partir de otro.

Den los pasos indicados.

Un rectángulo áureo tiene la propiedad de que a partir de él se pueden construir incontables rectángulos áureos.

- Si **ABCD** es un rectángulo áureo, con centro en **A** y radio $\overline{AB}$, se traza un arco que corte al lado $\overline{AD}$ en un punto **P**.
- Luego, **traza** desde **P** un segmento perpendicular que toque al lado **BC** en un punto **Q**. El rectángulo **PQCD** es otro rectángulo áureo. ¿Cómo lo compruebas? **Hazlo.**





- **Comprueben**, usando la calculadora, que la razón áurea cumple con las siguientes propiedades.
  - Su cuadrado, fi^2 y su recíproca, $1/fi$, tienen la misma parte decimal.
  - Su cuadrado, fi^2, es el mismo *fi* aumentado en 1:

$$fi^2 = fi + 1.$$

- **Compartan** y **comenten** los resultados obtenidos por los distintos grupos.

- **Desarrollo:** Lean en el grupo los problemas propuestos en esta página y los procedimientos que deberán aplicar para alcanzar trazar o construir las figuras propuestas. Observe de cerca que ubican los puntos como se les indica para realizar correctamente el trazado de las figuras.
- **Cierre:** En la última actividad seguirán los mismo procedimientos para el trazado y, luego, comprobarán, usando la calculadora, que la razón áurea *fi* cumple con las propiedades indicadas. Ofrézcales las orientaciones que sean necesarias.

Otras sugerencias

Es importante explicar a los estudiantes en qué consiste el Proyecto II, *Un extraño número llamado fi*. Hacer un breve comentario acerca de la presencia de la Matemática en la vida cotidiana y en aspectos relacionados con la naturaleza y el arte, como es el caso de las actividades que realizarán en este proyecto.

Fórme en grupos y pídales que lean los pasos para construir el rectángulo áureo que se les indica. Para este fin, haga que sigan las instrucciones y que observen las figuras representativas del procedimiento.

Motíveles para que lean y comenten las informaciones sobre el siguiente rectángulo que construirán. Haga que sigan los pasos como se les indica en las instucciones. Motíveles para que se fijen en la representación de los mismos en las figuras de la derecha de la página.

Acompáñeles y oriénteles en el proceso de realización de las actividades involucradas en este proyecto.

Previsión de dificultades

- Durante el proyecto los estudiantes podrían encontrar dificultades. Hágales las precisiones y sugerencias que sean necesarias para su mejor desempeño en la realización de las actividades.

Aprender a aprender

Pregunte al grupo:

- *¿Hubo alguno de los temas involucrados en este proyecto que les resultara difícil?*

La Guía didáctica

Valioso instrumento de apoyo al trabajo pedagógico con una gran cantidad de recursos y sugerencias.

Páginas de programación de la unidad de aprendizaje

A **Las medidas en la historia**

Propuesta de programación

ÁREAS	COMPETENCIAS ESPECÍFICAS	CONTENIDOS			INDICADORES DE LOGRO
		Conceptuales	Procedimentales	Actitudinales	
Matemática	■ **Comunica**: **Expresa** con la notación adecuada las experiencias con medidas que ha experimentado en su diario vivir. **Usa** los símbolos de las unidades de longitud, peso, masa, capacidad y tiempo. ■ **Modelar** y **representar**: **Usa** los símbolos de las unidades de longitud, peso, masa, capacidad y tiempo en diferentes sistemas de medidas. ■ **Usa algoritmo**: **Sigue** las reglas que les permiten obtener un resultado al resolver problemas que involucran unidades de medidas de longitud, peso, masa, capacidad y tiempo. ■ **Conecta**: **Aplica** las diferentes unidades de medidas de longitud, peso, masa, capacidad y tiempo para resolver problemas de situaciones del contexto, de otras ciencias y de la propia matemática.	■ Unidades de medidas de longitud, peso, masa, capacidad y tiempo. ■ Intervalos de tiempo entre dos acontecimientos. ■ Husos horarios y cálculo de la hora en lugares lejanos. ■ Conversiones de unidades de sistemas distintos.	■ Desarrollo de algoritmo de conversión de unidades de medidas antiguas y modernas. ■ Conversiones y estimaciones de unidades de medidas de longitud, peso, masa, capacidad y tiempo. ■ Cálculo de intervalos de tiempo entre dos acontecimientos. ■ Resolución de problemas que involucran conversiones de unidades de medidas de longitud, peso, masa, capacidad y tiempo.	■ Valoración del desarrollo del conocimiento. ■ Apreciación del uso de la tecnología en la vida.	■ **Realiza** transformaciones de unidades de medidas antiguas y medidas utilizadas en la actualidad. ■ **Construye** problemas ambientados en épocas pasadas. ■ **Realiza** conversiones de unidades de longitud, peso, masa, capacidad y tiempo. ■ **Resuelve** problemas de la cotidianidad que involucran unidades de longitud, peso, masa, capacidad y tiempo. ■ **Identifica** unidades de tiempo equivalentes. ■ **Determina** intervalos de tiempo entre acontecimientos. ■ **Calcula** el tiempo total partiendo de tiempos transcurridos. ■ **Calcula** la hora de otros lugares mediante los husos horarios. ■ **Resuelve** problemas del contexto donde aplica diversas unidades de medidas de longitud, peso, masa, capacidad y tiempo. ■ **Utiliza recursos virtuales y electrónicos**: computadora, softwares educativos, juegos interactivos y otros, en la búsqueda de información.
Ciencias Sociales	■ **Interpreta** y **relaciona** los hechos históricos con los espacios geográficos y los cambios relacionados con los mismos.	■ Capitalismo.	■ Búsqueda de comparaciones, relaciones y diferencias de las realidades estudiadas con las condiciones específicas de su comunidad o nación.	■ Asunción de una actitud crítica en torno a las condiciones de vida de los seres humanos bajo el régimen colonialista.	■ **Argumenta** sobre los cambios experimentados por las sociedades europeas en la transición del mercantilismo hacia el capitalismo.

Competencias fundamentales

Resolución de problemas: **Plantea** y **resuelve** problemas sobre situaciones del entorno que involucran el uso de unidades de longitud, peso, masa, capacidad y tiempo.

Valor transversal

Ciencia y tecnología

Recursos digitales

Plataforma digital — CD

BIBLIOTECA DEL DOCENTE
- DOCUMENTOS PARA LA PLANIFICACIÓN
- GUÍA DE RECURSOS TIC

RECURSOS DE REFUERZO Y AMPLIACIÓN

LibroMedia

ACTIVIDAD INTERACTIVA

PÁGINA 103 — Libertad, igualdad y fraternidad.

CD DE RECURSOS DIGITALES: PLAN REGULAR

Pleno — PRUEBA DE EVALUACIÓN FORMATIVA DE LA UNIDAD

Tiempo estimado de trabajo

Una semana.

Estrategias pedagógicas

- Recuperación de experiencias previas.
- Trabajo en equipo.
- Aprendizaje basado en problemas (ABP).

102 A ©Santillana, S. A. ©Santillana, S. A. 102 B

Información curricular

Se muestran las competencias, contenidos conceptuales, procedimentales y actitudinales e indicadores de logro de las áreas articuladas en la unidad.

Competencias fundamentales
que se desarrollan en la unidad.

Materiales necesarios
para aplicar las estrategias de aprendizaje de la unidad.

Estrategias de aprendizaje
que se aplicarán y desarrollarán.

Páginas de apertura

Unidad A

Competencias

- **Lee** y **comenta** las informaciones expuestas en el apartado *Situación de aprendizaje*.
- **Responde** preguntas relacionadas con las informaciones expuestas en el apartado *Situación de aprendizaje*.
- **Recupera** experiencias vividas mediante la observación de las imágenes de la ilustración.
- **Responde** preguntas vinculadas a sus experiencias previas sobre los conceptos que desarrollarán en la unidad en el apartado *Recuperación de conocimientos*.
- **Responde** preguntas vinculadas a las aplicaciones cotidianas de los conceptos que desarrollarán en la unidad en el apartado *Observación*

Esquema de la unidad

Las medidas en la historia

- Las matemáticas, las medidas y la sociedad
  - Conversiones de medidas antiguas
  - Resolución de problemas con medidas antiguas
- Otras conversiones de medidas
  - Equivalencia de unidades de tiempo
  - Cálculo de intervalos de tiempo
    - Resolución de problemas
  - Cálculo de la hora mediante los husos horarios

102

A Las medidas en la historia

Situación de aprendizaje

Los procesos de medición acompañan a los seres humanos desde tiempos remotos –concluye el profesor de Ciencias Sociales, para dar paso a las intervenciones de los estudiantes–.

Sergio, que había levantado la mano para exponer sus consideraciones, opinó: *"Desde los inicios de la historia, los seres humanos han recurrido a las medidas para cuantificar bienes, productos agrícolas o unidades fabricadas, distancias de un lugar a otro y tiempos para iniciar o terminar una siembra"*.

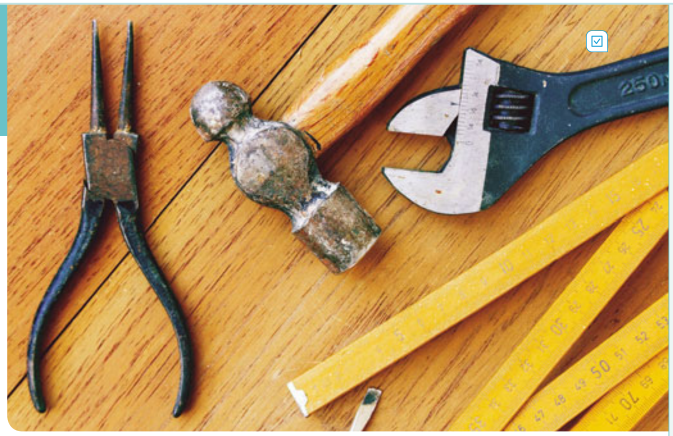
Tras el intercambio de ideas, los estudiantes acabaron por comprender que cualquier comunidad humana necesita prácticas de medición y que estas se hacen más rigurosas al tiempo que son más precisos los instrumentos de medida y las sociedades, más complejas y exigentes.

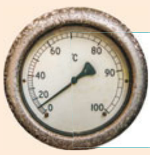
Conceptos y procedimientos

- Unidades de medidas de longitud, peso, masa, capacidad y tiempo.
- Intervalos de tiempo entre dos acontecimientos.
- Husos horarios y cálculo de la hora en lugares lejanos.
- Conversiones de unidades de sistemas distintos.

Actitudes y valores

- Valorar el papel de las medidas en la historia.
- Apreciar el rigor y la precisión de la vida.





RECUPERACIÓN DE CONOCIMIENTOS

- ¿Qué relaciones puedes establecer entre el desarrollo social y los avances de las prácticas de medición?
- ¿Qué ejemplos podrías dar para apoyar tu respuesta?
- ¿Cómo cambian los procesos de medición con el avance de la tecnología? Pon tres ejemplos.
- ¿Cómo contribuye la precisión de los sistemas de unidades de medida con el desarrollo social?

OBSERVACIÓN

- ¿Cuáles instrumentos de medición identificas en las ilustraciones?
- ¿Qué magnitudes o cantidades físicas se miden con ellos?
- ¿Cómo son los instrumentos actuales que han sustituido a los que se muestran en estas ilustraciones?
- ¿Cuáles ventajas tienen los instrumentos de medición actuales respecto a los del pasado? Pon tres ejemplos.

102 ©Santillana, S. A. ©Santillana, S. A. 103

Trabajo colectivo de apertura

- **Situación de aprendizaje:** Guíe a sus estudiantes a leer y comentar en el grupo las informaciones expuestas en el apartado *Situación de aprendizaje* relacionadas con la participación de los estudiantes en un salón de clase y su profesor de Ciencias Sociales en una discusión sobre la evolución y el uso de las unidades de medidas.
- **Recuperación de conocimientos:** Las preguntas de este apartado permiten hacer un diagnóstico de los conocimientos y las experiencias previas vinculados al impacto de las medidas en las sociedades.
- **Observación:** En este apartado se plantean preguntas relacionadas con los diversos instrumentos y herramientas que se observan en la ilustración.

Actividades de motivación

Pida a sus estudiantes que lean en la sección: *Conceptos y procedimientos*, los temas que trabajarán en esta unidad de aprendizaje y las actitudes y valores que estarán presentes en el desarrollo de la misma. Luego, para que interioricen la importancia de conocer cómo han evolucionado los mecanismos de medida con el paso del tiempo, formúleles preguntas como las siguientes: *¿Cómo se contaba el ganado y la producción agrícola en la antigüedad? ¿Por qué se hizo necesario que las medidas fueran cada vez más precisas? ¿Qué ha hecho posible que las medidas sean más exactas? ¿Qué aspectos importantes de nuestra vida son medibles?*

Actividad interactiva

Libertad, igualdad y fraternidad

El recurso es un interesante video que desarrolla una escena del uso de la vara en una actividad comercial de la antigüedad y lo inexacta de la misma. Además, el surgimiento del metro como medida más precisa de longitud.

Cultivamos valores

Ciencia y tecnología

Aprovechar la situación planteada en el apartado *Situación de aprendizaje* y en las imágenes de la ilustración para conversar con sus estudiantes acerca de por qué las medidas están presentes en todos los aspectos de nuestra vida y del valor del conocimiento científico. Pregunte al grupo: *¿Creen que el conocimiento científico ha influido en el proceso de evolución de las unidades de medidas?*

103

Mapa conceptual de la unidad y la articulación curricular con otras áreas.

Tiempo sugerido para desarrollar las actividades propuestas.

Articulación con otras áreas curriculares para favorecer el proceso de integración.

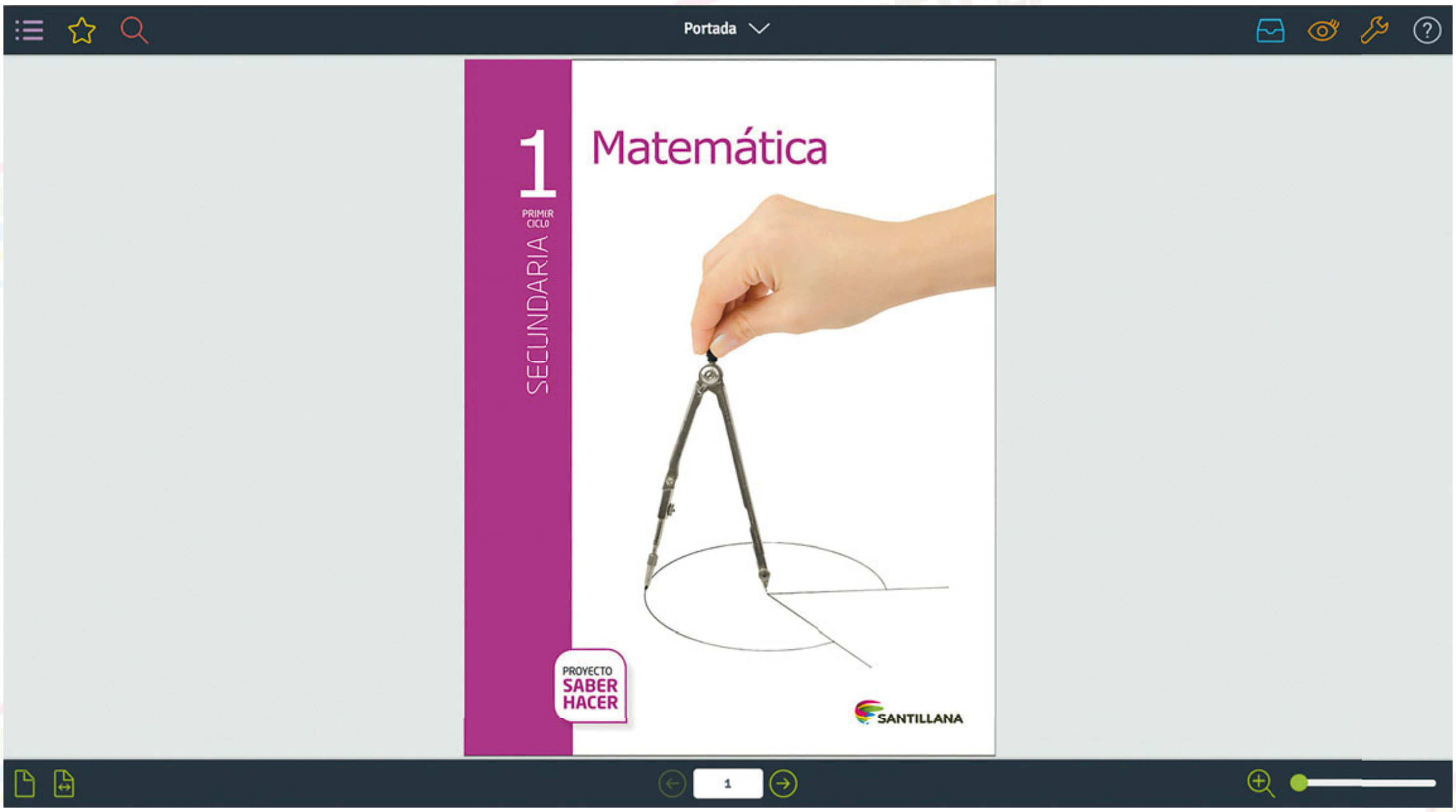
Situación de aprendizaje que tiene por finalidad insertar a los estudiantes en situaciones en las que se propician preguntas y respuestas, dirigidas a enfrentar problemas relativos a situaciones reales o ficticias.

El Libromedia

SANTILLANA.COMPARTIR e-stela

Libro en versión digital que integra las tecnologías de la información y la comunicación en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

El Libromedia es una aplicación que **reproduce las páginas del texto del estudiante** y permite acceder a recursos multimedia y herramientas para multiplicar las posibilidades de uso.



¿Cómo está organizado?

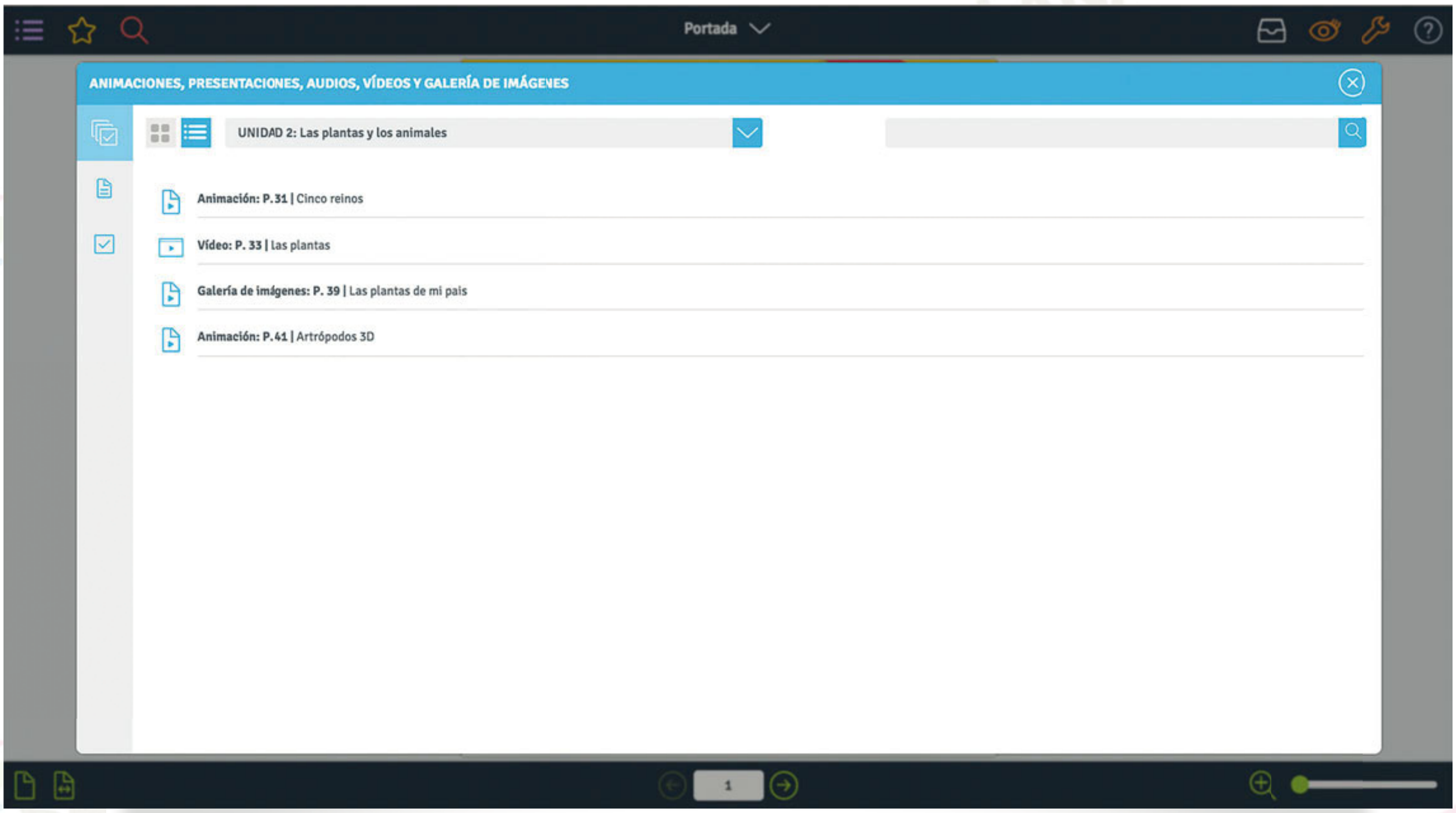
Está organizado por cuatro elementos principales: botones de navegación, botones de contenido y edición, botón de ayuda y botones de acción.

El Libromedia

Libro en versión digital que integra las tecnologías de la información y la comunicación en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

¿Qué recursos contiene?

Contiene una variedad de recursos multimedia para apoyar, reforzar, consolidar y ampliar el aprendizaje.



Algunos de los recursos son:

Recursos multimedia:

- Animaciones
- Presentaciones
- Videos
- Audios
- Galerías de imágenes

Actividades interactivas

Documentos

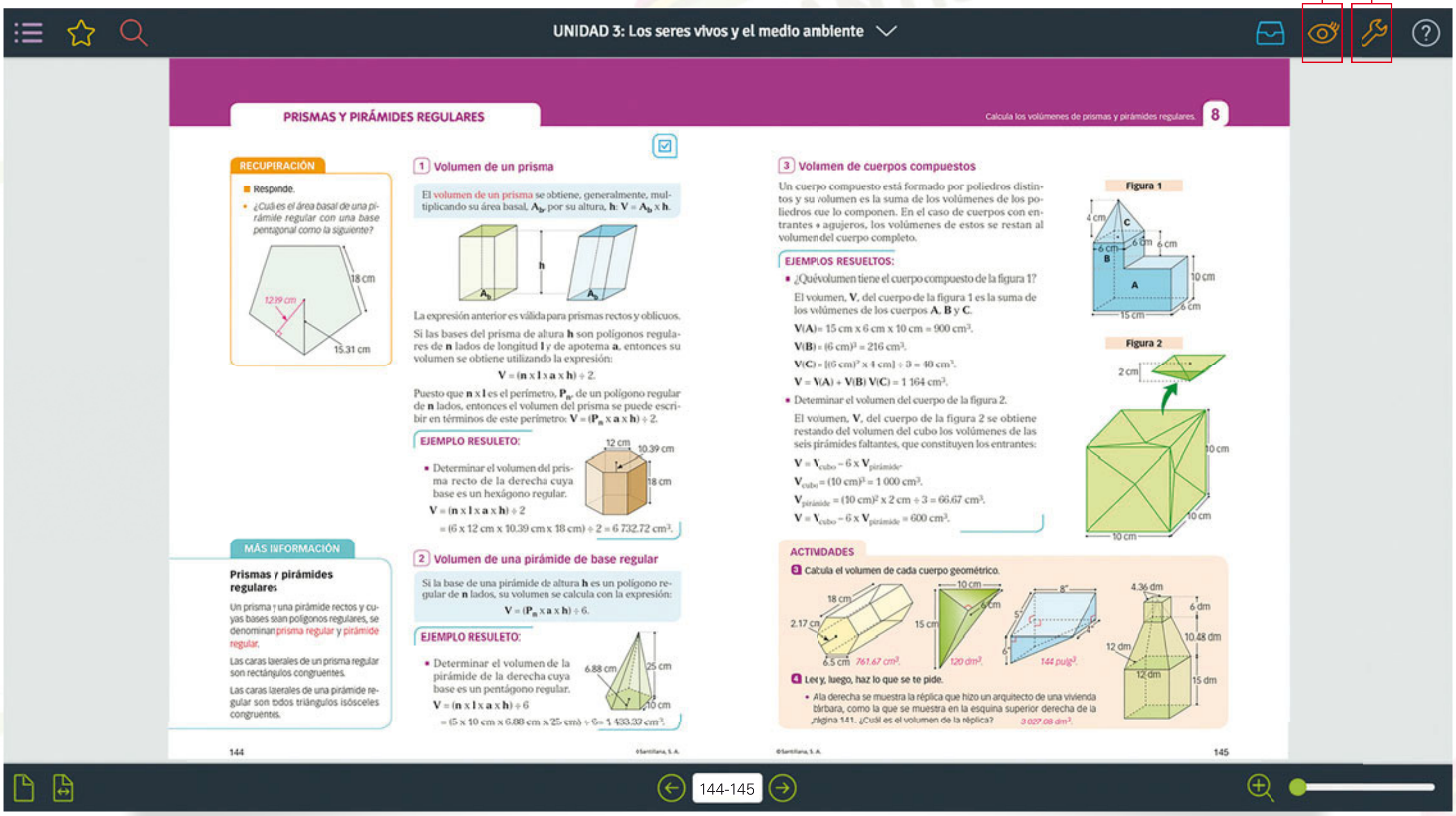
Enlaces web | Webquests

¿Cómo se personaliza el Libromedia?

Los botones de herramientas de edición y de personalización permiten adaptar el contenido de acuerdo a las necesidades personales y de la clase. Estas herramientas permiten también desarrollar y mejorar las estrategias de estudio o aprendizaje.

Botón de herramientas de edición

Botón de personalización



Presenta una serie de **herramientas** que permiten al estudiante **aprender a aprender**:

- Seleccionar
- Dibujar
- Escribir
- Subrayar/Resaltar
- Vincular
- Ocultar/Destacar
- Deshacer/Rehacer
- Guardar/Abrir
- Cerrar

Mapa de contenidos

UNIDADES DIDÁCTICAS		CONTENIDOS		
1 Los números enteros. Operaciones	6	Los números enteros.	Adición de números enteros.	Sustracción de números enteros.
2 Los números racionales. Operaciones	26	Los números racionales. Orden.	Fracción generatriz de un número decimal.	Adición y sustracción de números racionales.
3 Variación proporcional	46	Proporciones.	Proporcionalidad directa.	Proporcionalidad inversa.
4 Elementos de Geometría. Ángulos	64	Rectas paralelas y perpendiculares.	Construcciones con regla y compás.	Ángulos. Complemento y suplemento de un ángulo.
5 Medidas	84	Medidas angulares.	Transformaciones de medidas angulares.	Medidas de peso, masa y capacidad.
PROYECTO I	100	**Matemáticas, mezclas y aleaciones.**		
UNIDAD DE APRENDIZAJE A	102	**Las medidas en la historia.**		
UNIDADES DIDÁCTICAS				
6 Polígonos. Construcciones geométricas	110	Concepto de polígono. Clasificación.	Construcción de polígonos, I.	Construcción de polígonos, II.
7 Cuerpos geométricos. Área	124	Poliedros.	Prismas y pirámides.	Área de poliedros.
8 Cuerpos geométricos. Volumen	140	El cubo, el paralelepípedo y la pirámide.	Prismas y pirámides regulares.	Cuerpos redondos.
9 Recolección y análisis de datos	154	Población y muestra.	Gráfica de barras y poligonales.	Agrupación de datos.
10 Probabilidades	174	Experimentos deterministas y aleatorios.	Cálculo de probabilidades.	Formas decimal y porcentual de las probabilidades.
PROYECTO II	190	**Un extraño número llamado *fi*.**		
UNIDAD DE APRENDIZAJE B	192	**Las matemáticas de la vida.**		

CONTENIDOS				COMPETENCIAS FUNDAMENTALES	EVALUACIÓN
	■ Multiplicación de números enteros.	■ Potenciación de números enteros.	■ Radicación de números enteros.	■ Resolución de problemas.	■ Casos para resolver.
	■ Multiplicación y división de números racionales.	■ Potenciación de números racionales. Notación científica.	■ Radicación.	■ Competencia científica y tecnológica.	■ Casos para resolver.
	■ Problemas de proporcionalidad.	■ Porcentajes.	■ Interés simple.	■ Competencia científica y tecnológica.	■ Casos para resolver.
	■ Ángulos entre rectas paralelas y una secante.	■ Plano cartesiano. Coordenadas de un punto.	■ Distancia entre dos puntos del plano.	■ Resolución de problemas.	■ Casos para resolver.
	■ Medidas del tiempo.	■ Medidas de temperatura.		■ Resolución de problemas.	■ Debate.
					■ Resolución de problemas.

	■ Perímetro y área de polígonos.			■ Resolución de problemas.	■ Debate.
	■ Áreas de cuerpos redondos.	■ Proyecciones ortogonales.		■ Resolución de problemas.	■ Resolución de problemas.
	■ Simetría de los cuerpos geométricos.			■ Resolución de problemas.	■ Debate.
	■ Gráfica circular.	■ Medidas de tendencia central y valores medios de datos agrupados.	■ Medidas de dispersión	■ Resolución de problemas.	■ Estudio de caso.
	■ Experimentos aleatorios simples y compuestos.	■ Operaciones con eventos aleatorios.		■ Resolución de problemas.	■ Estudio de caso.
					■ Resolución de problemas.

1 Los números enteros. Operaciones

Propuesta de programación

COMPETENCIAS

Específicas

- **Razona y argumenta**: **Identifica** los números enteros. **Crea** y **expresa** argumentos matemáticos sobre las propiedades de los números enteros.
- **Comunica**: **Compara** los números enteros usando los signos de relación.
- **Usa algoritmo**: **Sigue** las reglas que les permiten obtener un resultado.
- **Conecta**: **Aplica** las operaciones con números enteros para resolver problemas de situaciones del contexto, de otras ciencias y de la propia matemática.
- **Resuelve problemas**: **Resuelve** problemas de situaciones cotidianas que involucren diferentes operaciones con números enteros.
- **Utiliza herramientas tecnológicas**: **Utiliza** soportes tecnológicos como la Internet, la calculadora científica y otros dispositivos.

Fundamentales

Competencia comunicativa: **Comprende** las instrucciones y **expresa** con claridad los procedimientos en una operación.

Resolución de problemas: **Plantea** y **resuelve** problemas sobre situaciones del entorno que involucran operaciones con números enteros.

Científica y tecnológica: **Reconoce** la importancia de la investigación científica.

Ética y ciudadana: **Reconoce** la importancia del gasto responsable.

CONTENIDOS

Conceptos

- Los números enteros.
- La representación de los números enteros en una recta numérica.
- El valor absoluto de un número entero.
- Las operaciones con números enteros y sus propiedades.
- Las operaciones combinadas con números enteros.
- Las operaciones enteras.

Procedimientos

- Identificación, lectura y escritura de números enteros.
- Representación de los números enteros en la recta numérica.
- Determinación del valor absoluto de un número entero.
- Obtención del resultado de las operaciones de adición, sustracción, multiplicación, división, potenciación y radicación utilizando números enteros.

Actitudes y valores

- Valoración del gasto responsable.
- Apreciación del espíritu de investigación y búsqueda.

Tiempo estimado de trabajo: 2 semanas

INDICADORES DE LOGRO

- **Identifica** números enteros en un conjunto de números dados.
- **Representa** números enteros en la recta numérica.
- **Ordena** números enteros en la recta numérica.
- **Compara** números enteros usando la recta numérica y los signos de relación.
- **Reconoce** y **escribe** las propiedades de los números enteros.
- **Determina** el valor absoluto de un número entero dado.
- **Efectúa** adiciones de números enteros.
- **Efectúa** sustracciones de números enteros.
- **Efectúa** multiplicaciones de números enteros.
- **Efectúa** divisiones de números enteros.
- **Calcula** potencias de números enteros.
- **Calcula** raíces cuadradas y cúbicas de números enteros.
- **Resuelve** problemas del contexto donde aplica operaciones de los números enteros.
- **Utiliza** recursos virtuales y electrónicos: computadora, softwares educativos, juegos interactivos y otros, en la búsqueda de información.

Valor transversal: Convivencia

Recursos digitales

Plataforma digital

CD

BIBLIOTECA DEL DOCENTE

- DOCUMENTOS PARA LA PLANIFICACIÓN
- EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA
- GUÍA DE RECURSOS TIC

CUADERNO DE ACTIVIDADES

UNIDAD 1	Los números enteros. Operaciones.

RECURSOS DE REFUERZO Y AMPLIACIÓN

LibroMedia

DOCUMENTOS

PÁGINA 20	Números enteros

ACTIVIDADES INTERACTIVAS

PÁGINA 7	Recta numérica
PÁGINA 8	Enteros positivos y negativos
PÁGINA 10	El termómetro y los números enteros
PÁGINA 12	Ponte a prueba

CD DE RECURSOS DIGITALES: PLAN REGULAR

Pleno — PRUEBA DE EVALUACIÓN FORMATIVA DE LA UNIDAD

Estrategias pedagógicas

- Recuperación de experiencias previas.
- Trabajo en equipo.
- Aprendizaje basado en problemas (ABP).

Unidad 1

Competencias de la unidad

- **Lee** y **comenta** las informaciones expuestas en el apartado *Punto de partida*.
- **Responde** preguntas relacionadas con las informaciones expuestas en el apartado *Punto de partida*.
- **Recupera** experiencias vividas mediante la observación de las imágenes de la ilustración.
- **Responde** preguntas vinculadas a sus experiencias previas sobre los conceptos que desarrollarán en la unidad en el apartado *Recuperación de conocimientos*.
- **Responde** preguntas vinculadas a las aplicaciones cotidianas de los conceptos que desarrollarán en la unidad en el apartado *Observación*

1 Los números enteros. Operaciones

Punto de partida

La mamá de Carlos tenía un sobregiro en el estado de su cuenta bancaria. Había gastado más de lo que tenía en sus fondos, y esto significa una deuda con el banco.

El sobregiro aparecía en la columna de los balances con un signo menos (–).

De inmediato, procedió a depositar fondos para eliminar la deuda. Carlos, que había estado junto a su mamá cuando recibió el balance, se preguntó a sí mismo: *¿Siempre que haya una deuda por sobregiro, aparecerá el signo menos? ¿De dónde sale este signo?*

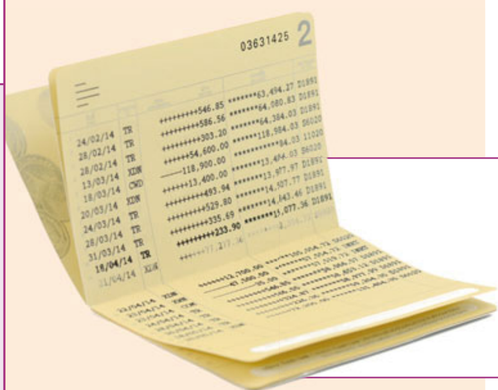
- ¿Qué operación aritmética asocias con el signo menos (–)?
- ¿Por qué los sobregiros aparecen con un signo menos?
- Si se aceptan números con signo menos, ¿tiene algún sentido una diferencia como 75 – 100?

Conceptos y procedimientos

- Los números enteros.
- La representación de los números enteros en una recta numérica.
- El valor absoluto de un número entero.
- Las operaciones con números enteros y sus propiedades.
- Las operaciones combinadas con números enteros.
- Las operaciones enteras.

Actitudes y valores

- Valorar el gasto responsable.
- Apreciar el espíritu de investigación y búsqueda.



RECUPERACIÓN DE CONOCIMIENTOS

- ¿Qué son los números naturales?
- ¿Qué propiedades tienen los números naturales?
- ¿La adición o multiplicación de dos números naturales cualesquiera, da como resultado un número natural?
- ¿Con qué otra clase de números has trabajado hasta ahora?

Apertura de la unidad

Dentro de los objetivos principales de la apertura de esta unidad se encuentran el plantear una situación de aprendizaje, una problemática o un texto que sirve para contextualizar el tema de la unidad. Todo esto con la finalidad de motivar y despertar la curiosidad de los estudiantes.

A partir de la situación o texto planteado y las imágenes de la ilustración se conecta al estudiante con el tema a tratar, a la vez que se vincula con la realidad o cotidianidad con los temas que se van a desarrollar.

Todos los elementos que conforman la portada promueven la recuperación de experiencias o conocimientos previos y la motivación o el interés por los conocimientos que adquirirán en la unidad.

Trabajo colectivo de apertura

- **Punto de partida:** Guie a sus estudiantes a leer y comentar en el grupo las informaciones expuestas en el apartado *Punto de partida*. Motíveles para que respondan las preguntas que aparecen al final del texto y para que justifiquen sus respuestas.
- **Recuperación de conocimientos:** Las preguntas de este apartado permiten hacer un diagnóstico de los conocimientos previos vinculados a los conceptos que trabajarán en la unidad.
- **Observación:** En este apartado se plantean preguntas que conectan los temas a desarrollar en la unidad con experiencias de la vida cotidiana. Promueva nuevas ideas que partan de las respuestas a las preguntas y de las experiencias vividas.

OBSERVACIÓN

- ¿Has visto alguna vez un estado de cuentas bancario?
- ¿Qué significado tienen los términos débito, crédito y balance?
- ¿Qué operaciones aritméticas están presentes en un crédito y en un débito?
- ¿Qué importancia tiene para el cliente revisar sus estados bancarios?

Esquema conceptual de la unidad

Los números enteros

forman el conjunto de los

Números positivos, el cero y los negativos — *se sujetan a* — Relaciónes de orden

y con ellos se realizan operaciones de

- Adición
- Sustración
- Multiplicación
- División
- Potenciación
- Radicación

Actividad de motivación

Pida a sus estudiantes que lean en la sección: *Contenido*, los temas que trabajarán en la unidad y las actitudes y valores que estarán presentes en el desarrollo de la misma. Luego, para que interioricen la importancia de los números enteros en la vida cotidiana, formúleles preguntas como las siguientes:

- *¿Cómo representan las temperaturas bajo cero? ¿Y las distancias por debajo del nivel del mar? ¿Qué números utilizan para indicar las alturas por encima del nivel del mar? ¿Y el descenso de un avión que se encuentra en las alturas?*

Actividad interactiva

Recta numérica

Actividad interactiva de recuperación de experiencias previas que trabaja conceptos relacionados con la ubicación de números enteros sobre la recta numérica.

Actitudes y valores

Convivencia

Aprovechar la situación planteada en el apartado *Punto de partida* y en las imágenes de la ilustración para conversar con sus estudiantes sobre la importancia de ser responsables al gastar el dinero o los recursos de los cuales disponemos. Aclararles que debemos planificar y distribuir cuidadosamente los recursos y así evitar las deudas y los sobregiros.

Indicadores de logro

- **Identifica** números enteros en un conjunto de números dados.
- **Representa** números enteros en la recta numérica.
- **Ordena** números enteros en la recta numérica.
- **Compara** números enteros usando la recta numérica y los signos de relación.
- **Reconoce** y **escribe** las propiedades de los números enteros.
- **Determina** el valor absoluto de un número entero dado.

Actividad interactiva

Enteros positivos y negativos

Actividad interactiva de aplicación al uso de los números enteros positivos y negativos en situaciones de la cotidianidad.

Previsión de dificultades

Escriba en la pizarra distintos números entre los que hayan enteros, fracciones y decimales. Motive a sus estudiantes para que los clasifiquen y que expresen cuáles son enteros y por qué.

Haga que sus estudiantes construyan una recta numérica y que representen, con puntos de colores, números enteros positivos y negativos.

Construya un cuadro en la pizarra que contenga tres casillas tituladas: *Número*, *Entero* y *Natural*. Escriba en la casilla de *Número*, distintas cantidades positivas, negativas, decimales y fraccionarias; luego, motive a sus estudiantes para que las clasifiquen marcando las casillas correspondientes.

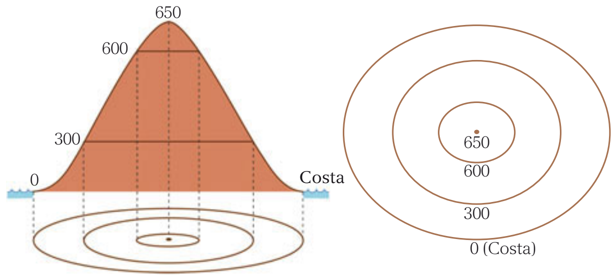
RECUPERACIÓN

¿Has visto cómo se muestran en los ascensores los pisos superiores y los soterrados, cuando los hay?

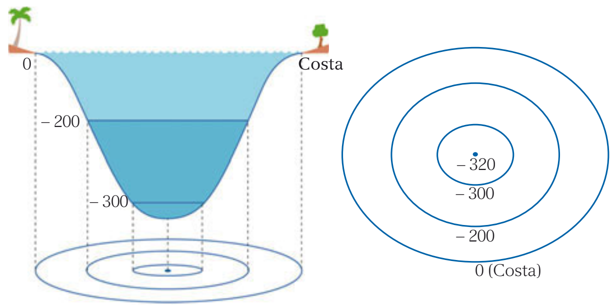
¿Cómo sabes cuándo se está representando un piso sobre el suelo y un piso soterrado?

1 Los números enteros

Entre los geógrafos y topógrafos es usual representar accidentes geográficos mediante curvas de nivel. Las elevaciones se representan en las curvas de nivel con un signo más (+), indicando con este signo que se está sobre el nivel de la costa, que se toma como 0.



Para las depresiones terrestres o el relieve submarino, los números que acompañan a las curvas de nivel se toman con un signo menos (–), que indica que se está por debajo del nivel de la costa.



Los números enteros positivos (números naturales), el cero y los enteros negativos forman el conjunto de los números enteros, que se representa con la letra $\mathbb{Z}$.

$$\mathbb{Z} = \{\ldots\ \ldots, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, \ldots\ \ldots\}.$$

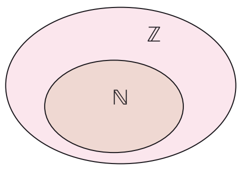
El cero, 0, es el número que separa a los números enteros positivos y los números enteros negativos. El cero carece de signo.

Sobre la recta numérica, los enteros positivos aparecerán a la derecha del 0 y los enteros negativos a la izquierda del 0.

MÁS INFORMACIÓN

Números naturales y enteros

Los números naturales $\mathbb{N}$ están incluidos en el conjunto de los números enteros, $\mathbb{Z}$.



Todo número natural es un número entero positivo.

Por razones de simplicidad, el signo + suele omitirse:

$$+5 = 5\ ;\ +12 = 12.$$

Sugerencias didácticas

- **Inicio:** Oriente a sus estudiantes para que lean y respondan en el aula las preguntas vinculadas a la recuperación de experiencias previas propuestas en el apartado *Recuperación*. Motive al grupo a justificar sus respuestas.
- **Desarrollo:** Pida a sus estudiantes que lean cuidadosamente el contenido de la doble página y que observen las ilustraciones. Formúleles preguntas vinculadas al contenido como por ejemplo: *¿Cómo se expresan las temperatura por encima de 0º? ¿Y las profundidades del mar?*

  Discuta con el grupo las informaciones del apartado *Más información*, sobre los números naturales y enteros. Haga que construyan ejemplos en sus cuadernos.

2 Números enteros opuestos. Valor absoluto

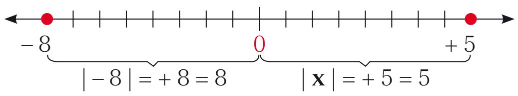
Dos números enteros distintos son opuestos, si están a la misma distancia del cero. Los enteros opuestos tienen signos contrarios.

EJEMPLOS:

- + 10 y – 10 son opuestos.
- – 35 y + 35 son opuestos.

En relación con la adición, al opuesto de un número se le llama su inverso aditivo.

El valor absoluto de un número entero **x** es su distancia al 0. Este es siempre positivo y se representa |**x**|. Por razones de simplicidad |**x**| se escribe sin el signo positivo.

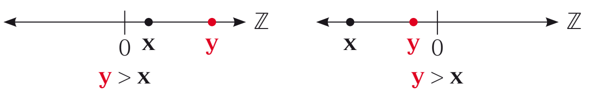


3 Relaciones de orden entre los enteros

Dados dos números enteros cualesquiera, **x** e **y**, siempre es posible saber si **x** es menor, igual o mayor que **y**:

x < **y**, **x** = **y** o **x** > **y** (Ley de la tricotomía).

Si se representan los números enteros **x** e **y** en una recta numérica, el número situado a la derecha es mayor que el situado a la izquierda.



Las alturas respecto al nivel del mar, las temperaturas por encima del punto de congelación del agua, los depósitos bancarios y los movimientos hacia la derecha se asocian a números positivos.

Las depresiones respecto al nivel del mar, las temperaturas por debajo del punto de congelación del agua, las deudas y los movimientos hacia la izquierda, se asocian a números negativos.

ACTIVIDADES

1 Escribe el número positivo o negativo que corresponde a cada afirmación.

- En Jarabacoa se registró ayer una temperatura de 15 °C sobre cero. *+ 15*
- El lago Enriquillo está a 40 metros por debajo del nivel del mar. *– 40*
- El vehículo se desplazó 30 km hacia la derecha. *+ 30*
- Marcos debe RD$ 25 a la cafetería del colegio. *– 25*
- Se han descubierto organismos vivos a casi 15 km bajo tierra. *– 15*

2 Represente en una recta numérica los números enteros anteriores.

- **Desarrollo:** Pida a sus estudiantes que comenten las informaciones que ofrece la niña de la página 9. Pregúnteles: *¿Puede representarse cualquier número entero en la recta numérica? ¿Podría ubicarse siempre, entre dos números enteros cualesquiera, otro número entero?* Para que tengan una idea más clara sobre el concepto de valor absoluto, trace en la pizarra una recta numérica con los números enteros – 10 y + 10 y, luego, pregunte al grupo: *¿A cuántas unidades de distancia está el 5 del 0? ¿Y el – 5 del 0? ¿Qué número entero está justo a la mitad del – 5 y el + 5? ¿Y el –7 y el +7?*
- **Cierre:** Motive a sus estudiantes a realizar los ejercicios del apartado *Actividades*. En la actividad 1, escribirán el número positivo o negativo que corresponde a cada afirmación. En la actividad 2, representarán en una recta numérica los números enteros del ejercicio anterior.

Más información

Aclare a sus estudiantes que es posible y tiene sentido restar un número menor de otro mayor, por ejemplo, 12 – 25. En casos como este el resultado será un número negativo, –13.

Recuerde al grupo que en una resta, cuando el minuendo es mayor que el sustraendo, el resultado es un número natural.

Comente a sus estudiantes que se les llama operaciones enteras a la suma, a la resta y la multiplicación.

Atención a la diversidad

Actividad de refuerzo: Pida a sus estudiantes que escriban el número positivo o negativo que corresponda a cada situación.

- En ocasiones la temperatura en Alaska se mantiene 15 °C bajo cero. Resp.: – 15 °C.
- En el Pico Duarte se registró una temperatura de 6 °C sobre cero. Resp.: + 6 °C.
- La isla Cabritos se encuentra 22 metros bajo el nivel del mar. Resp.: – 22 metros.
- Deposité 5 000 pesos en el banco. Resp.: + 5 000 pesos.
- Caminé 25 metros hacia la izquierda. Resp.: – 25 metros.
- Me sumergí 4 metros hasta el fondo de la piscina. Resp.: – 4 metros.

Ficha 1.

Aprender a aprender

Pregunte a sus estudiantes si creen que dominan completamente los conceptos estudiados en la doble página o requieren que se amplíen las actividades.

Indicadores de logro

- **Efectúa** adiciones de números enteros.

Actividad interactiva

El termómetro y los números enteros

Actividad interactiva de aplicación al uso de los números enteros positivos y negativos en una situación de la vida cotidiana, el uso del termómetro.

Previsión de dificultades

Dibuje una recta numérica en la pizarra con los números enteros positivos, negativos y el cero. Luego, pida a sus estudiantes que imaginen que un vehículo parte del cero y se traslada 5 metros hacia la derecha y, luego, 3 metros más hacia la derecha, después, pregunte:

- ¿Sobre qué número entero se encuentra parado el vehículo?
- ¿Se encuentra a la izquierda o a la derecha del cero?
- ¿Qué signo tienen los números que están a la derecha del cero?
- ¿Y los que están a la izquierda del cero?

RECUPERACIÓN

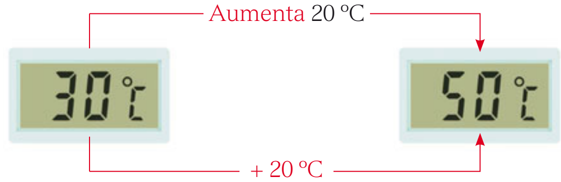
Un termómetro marca una temperatura inicial de 27 °C. Sube 3 °C y luego baja 5 °C.

¿Qué temperatura final se lee en el termómetro?

¿Qué procedimiento seguiste para averiguarlo?

1 Adición de números enteros del mismo signo

Observa la manera en que cambió la temperatura del termómetro digital.



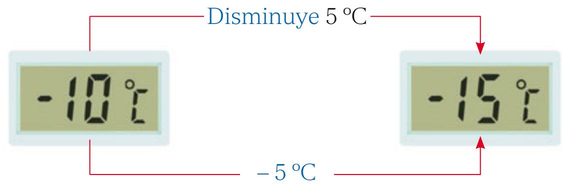
Inicialmente el termómetro marcaba una temperatura de + 30 °C. Si la temperatura aumenta 20 °C, el termómetro acabará marcando una temperatura de + 50 °C.

La temperatura final marcada por el termómetro, + 50 °C, es la adición de la temperatura inicial, + 30 °C y el aumento de temperatura, + 20 °C:

$$(+30\ °C) + (+20\ °C) = +50\ °C.$$

La adición de dos números enteros positivos es la suma de los valores absolutos de dichos números.

Fíjate ahora cómo cambió la temperatura del termómetro.



Inicialmente, el termómetro marcaba una temperatura de – 10 °C. Si la temperatura baja 5 °C, el termómetro acabará marcando una temperatura de – 15 °C.

La temperatura final marcada por el termómetro, – 15 °C, es la adición de la temperatura inicial, – 10 °C, y la disminución de temperatura, – 5 °C:

$$(-10\ °C) + (-5\ °C) = -15\ °C.$$

La adición de dos números enteros negativos es la suma de los valores absolutos de dichos números, con signo negativo.

MÁS INFORMACIÓN

Regla de los signos para la adición de números enteros de igual signo

Positivo + positivo = positivo.

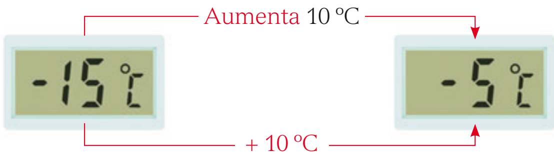
Negativo + negativo = negativo.

Sugerencias didácticas

- **Inicio:** Oriente a sus estudiantes para que lean y respondan en el aula las preguntas vinculadas a la recuperación de experiencias previas propuestas en el apartado *Recuperación*. Motive al grupo a justificar sus respuestas.
- **Desarrollo:** Pida a sus estudiantes que lean el contenido de la doble página y que observen las ilustraciones. Formúleles preguntas vinculadas al contenido como, por ejemplo: *¿Qué ocurre con la lectura del termómetro cuando la temperatura aumenta? ¿Cuál es el resultado de la suma de dos números enteros negativos?* Discuta con el grupo las informaciones del apartado *Más información*, sobre el signo que acompaña los resultados de las adiciones de enteros de igual signo. Haga que construyan ejemplos en sus cuadernos.

2 Adición de números enteros de signos distintos

Observa la manera en que cambió la temperatura del termómetro digital.



Inicialmente, el termómetro indicaba una temperatura de – 15 °C. Si la temperatura aumenta 10 °C, el termómetro acabará marcando una temperatura de – 5 °C.

La temperatura final marcada por el termómetro, – 5 °C, es la adición de la temperatura inicial, – 15 °C, y el aumento de temperatura, + 10 °C: (– 15 °C) + (+ 10 °C) = – 5 °C.

> El resultado de la adición de dos números enteros de distinto signo es la diferencia de los valores absolutos del mayor y del menor de esos números con el signo del que tiene mayor valor absoluto.

En el caso anterior, la adición de – 15 y + 10 es – 5, que equivale a la diferencia 15 – 10 = 5, con el signo negativo del número – 15 que es el número de mayor valor absoluto.

RECUERDA

Propiedades de la adición de números enteros

La adición de dos números enteros **x** e **y** cumple con:

- Propiedad conmutativa:

  x + **y** = **y** + **x**.
- Propiedad asociativa:

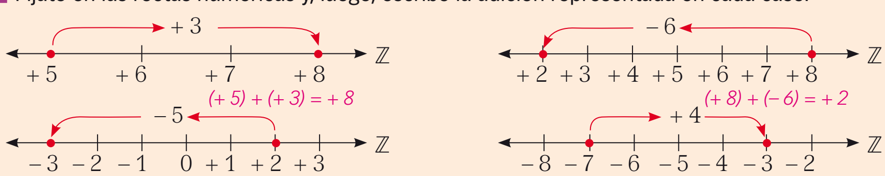
  (**x** + **y**) + **z** = **x** + (**y** + **z**).
- Propiedad del cero:

  x + 0 = 0 + **x** = **x**.
- Propiedad del opuesto:

  x + (– **x**) = (– **x**) + **x** = 0.

ACTIVIDADES

3 Fíjate en las rectas numéricas y, luego, escribe la adición representada en cada caso.



(+ 5) + (+ 3) = + 8

(+ 8) + (– 6) = + 2

(+ 2) + (– 5) = – 3

(– 7) + (+ 4) = – 3

4 Escribe el signo de las sumas de cada operación de adición.

- (+ 75) + (+ 12) *+*
- (+ 32) + (– 18) *+*
- (+ 14) + (– 44) *–*
- (– 75) + (– 12) *–*
- (– 19) + (+ 35) *+*
- (– 23) + (– 15) *–*
- (– 29) + (+ 12) *–*
- (+ 84) + (– 75) *+*

5 Efectúa las siguientes operaciones de adición.

- (+ 12) + (+ 45) *+ 57*
- (– 25) + (– 45) *– 70*
- (– 26) + (+ 18) *– 8*
- (+ 65) + (– 120) *– 55*
- – 89) + (+ 60) *– 29*
- (– 19) + (– 320) *– 339*
- (+ 62) + (– 50) *– 12*
- (+ 104) + (– 96) *+ 8*

- **Desarrollo:** Pida a sus estudiantes que comenten el contenido del apartado *Recuerda* acerca de las propiedades de la adición de números enteros. Desarrolle en la pizarra algunos ejemplos aplicando estas propiedades y haga que desarrollen sus propios ejemplos en sus cuadernos.

  Pregunte a sus estudiantes: *¿Cuál es el resultado de la adición de dos números enteros de distintos signos? ¿Cuál será el signo del resultado de la operación?*
- **Cierre:** Motive a sus estudiantes a realizar los ejercicios del apartado *Actividades*. En la actividad 3, fijarán su atención en la recta numérica y, luego, escribirán la adición representada en cada caso. En la actividad 4, escribirán el signo de las sumas de las operaciones de adición. En la actividad 5, efectuarán diversas operaciones de adición de números enteros.

Atención a la diversidad

Actividades de refuerzo: Pida a sus estudiantes que resuelvan los siguientes problemas:

- María tiene una cuenta de ahorros con 6 500 pesos, el lunes deposita 3 450 pesos, el sábado retira 2 800. ¿Cuál es el balance de la cuenta de María? Resp.: 6 500 + (+ 3 450) + (– 2 800) = Balance 7 150 pesos.
- Un submarino desciende 400 metros, luego asciende 125 metros y, finalmente, desciende 50 metros. ¿A qué distancia bajo el nivel del mar se encuentra el submarino?. Resp.: Se encuentra a 325 metros bajo el nivel del mar, es decir – 325.

En el pasado se tomaban dos eventos como referencia para contar los años, el período antes de Cristo y después de Cristo. Pregunte al grupo:

- ¿En qué año nació Arquímedes, si murió en el 212 a. de C. y vivió 75 años? Resp.: En el año 287 a. C.
- ¿En qué año nació Aristóteles, si murió en el 322 a. de C. y vivió 62 años? Resp.: En el año 384 a. C.
- ¿En qué año nació Pitágoras, si murió en el 495 a. de C. y vivió 75 años? Resp.: En el año 570 a. C.

Ficha 2.

Actividades de ampliación: Pida al gupo que completen las siguientes operaciones de sustracción.

- 36 + (   ) = 0. Resp.: – 36.
- (– 25) + (   ) = – 40. Resp.: – 15
- (12) + (   ) = 25. Resp.: 13.
- (– 75) + (   ) = – 100. Resp.: – 25.

Indicadores de logro

- **Efectúa** sustracciones de números enteros.

Actividad interactiva

Ponte a prueba

Actividad interactiva que trabaja la ubicación de los números enteros sobre la recta numérica y las relaciones de orden entre los mismos.

Competencia comunicativa

Recuerde a sus estudiantes que cuando se presenten operaciones de suma o de resta, encerradas en paréntesis o corchetes, primero se realizan las operaciones encerradas y se eliminan, de esta manera, los paréntesis y corchetes. Haga que realicen ejercicios con estas características en sus cuadernos y, después, mándeles a la pizarra.

Otras actividades

Anime al grupo para que resuelvan las expresiones siguientes:

- 850 + 120 – (125 + 75).
- (– 30) + (+54) + (– 25).
- (– 400) – (+ 250) + (50).
- (+ 300) – (– 300) + (–75).

Después, haga que expliquen cómo las resolvieron.

SUSTRACCIÓN DE NÚMEROS ENTEROS

RECUPERACIÓN

¿Qué es el opuesto de un número entero?

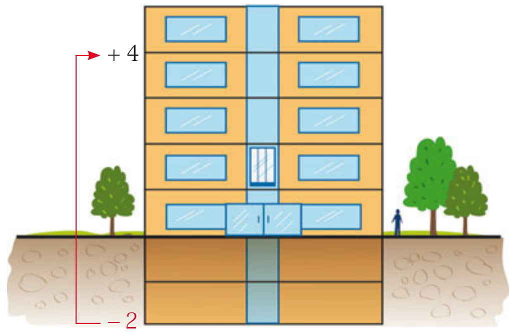
Escribe el opuesto de los siguientes números enteros:

– 5 + 8 + 15 – 34.

¿Por qué el entero 0 no tiene un opuesto?

1 Diferencia de números enteros

Observa cuántos pisos subió el ascensor al pasar del nivel soterrado – 2 al piso + 4.



Si inicialmente el ascensor se encontraba en el piso – 2 y sube hasta el piso + 4, el ascensor subió en total 6 = + 6 pisos.

El número de pisos que sube el ascensor es la diferencia de los números enteros (+ 4) y (– 2):

$$\underset{\text{Minuendo}}{(+4)} - \underset{\text{Sustraendo}}{(-2)} = +6.$$

La operación de diferencia (+ 4) – (– 2) es equivalente a la adición del minuendo (+ 4) y el opuesto del sustraendo (+ 2):

$$\underset{\text{Minuendo}}{(+4)} + \underset{\text{Opuesto del sustraendo}}{(+2)} = +6.$$

La diferencia de dos números enteros es la suma del minuendo y el opuesto del sustraendo.

Así, si **x** e **y** son dos números enteros, su diferencia **x** – **y** es equivalente a la adición: **x** + (– **y**).

Ejemplos resueltos:

- (+ 35) – (+ 10) = (+ 35) + (– 10) = 35 – 10 = + 25 = 25.
- (+ 70) – (– 20) = (+ 70) + (+ 20) = 70 + 20 = + 90 = 90.
- (– 40) – (+ 12) = (– 40) + (– 12) = – 40 – 12 = – 52.
- (– 18) – (– 62) = (– 18) + (+ 62) = – 18 + 62 = + 44 = 44.

Sugerencias didácticas

- **Inicio:** Oriente a sus estudiantes para que lean y respondan en el aula las preguntas vinculadas a la recuperación de experiencias previas propuestas en el apartado *Recuperación* relacionadas con los números opuestos. Motive al grupo a justificar sus respuestas.
- **Desarrollo:** Pida a sus estudiantes que lean cuidadosamente el contenido de la doble página y que observen las ilustraciones. Formúleles preguntas vinculadas al contenido como, por ejemplo: *¿Con qué números se identifican las partes soterradas de un edificio?*

  Discuta con el grupo las informaciones del apartado *Más información*, relacionadas con la regla para eliminar los signos de agrupación. Haga que reproduzcan los ejemplos resueltos y que construyan otros similares.

2 Propiedades de la diferencia de números enteros

Si **x**, **y** y **z** son números enteros, la sustracción:

- No es conmutativa: **x** – **y** ≠ **y** – **x**.
- No es asociativa: **x** – (**y** – **z**) ≠ (**x** – **y**) – **z**.
- Verifica que **x** – 0 = **x**, pero 0 – **x** ≠ **x**.

3 Suma algebraica de números enteros

Una suma algebraica es el valor de una expresión que combina operaciones de adición o de sustracción de números enteros. Los números que forman la expresión son sus términos.

La suma algebraica no depende del orden en que se realicen estas operaciones.

Ejemplo resuelto:

- Determinar el valor de la expresión: (+ 22) – (– 18) + (– 25).

(+ 22) – (– 18) + (– 25) = (+ 22) + (+ 18) + (– 25)
= (+ 40) + (– 25) = + 15

Cuando se presentan operaciones de adición o sustracción, encerradas en signos de agrupación (paréntesis o corchetes), se realizan primero las operaciones encerradas.

Ejemplo resuelto:

- Efectuar las operaciones: (– 32) – [(+ 18) – (+ 10)]
- Primero efectuamos las operaciones del corchete:

(– 32) – [(+ 18) – (+ 10)] = (– 32) – (+ 8) = (– 32) + (– 8) = – 40.

MÁS INFORMACIÓN

Regla para eliminar signos de agrupación

Para eliminar un signo de agrupación antes de realizar las operaciones encerradas las reglas son:

- Si hay un signo + antes del signo de agrupación, dicho signo de agrupación se elimina, sin modificar los signos a las cantidades, **x** e **y**, encerradas.

+ (**x** + **y**) = **x** + **y**.

Ejemplo resuelto:

+ [(+ 5) – (– 3)] = (+ 5) – (– 3)

- Si hay un signo – antes del signo de agrupación, dicho signo de agrupación se elimina, cambiando de signo a todas las cantidades encerradas.

– (**x** + **y**) = – **x** – **y**.

Ejemplo resuelto:

– [(+ 5) – (– 3)] = – (+ 5) + (– 3).

ACTIVIDADES

6 Efectúa las operaciones de sustracción.

- (+ 62) – (+ 25) *37*
- (– 12) – (+ 60) *– 72*
- (+ 75) – (+ 48) *27*
- (+ 95) – (– 105) *200*
- (+ 89) – (– 90) *179*
- (– 10) – (– 25) *– 15*
- (+ 55) – (+ 90) *– 35*
- (– 14) – (+ 96) *– 110*

7 Comprueba las expresiones siguientes.

- (+ 75) – (– 30) ≠ (– 30) – (+ 75)
- (– 6) – [(+ 9) – (– 15)] ≠ [(– 6) – (+ 9)] – (– 15)

- **Desarrollo:** Muestre a sus estudiantes el proceso de solución de los ejemplos resueltos. Desarrolle en la pizarra algunos ejemplos adicionales y haga que desarrollen sus propios ejemplos en sus cuadernos. Pregunte a sus estudiantes: *¿Por qué la operación de sustracción no es conmutativa? ¿Qué es una suma algebraica de números enteros? ¿Qué efecto produce el signo negativo antes del signo de agrupación?* Discuta las diversas respuestas en el grupo justificando siempre sus respuestas.
- **Cierre:** Motive a sus estudiantes a realizar los ejercicios del apartado *Actividades*. En la actividad 6, resolverán diversas operaciones de sustracción de números enteros. En la actividad 7, comprobarán expresiones aritméticas de números enteros. Revise los resultados en el grupo y envíeles a la pizarra.

Atención a la diversidad

Actividades de refuerzo: Exprese a sus estudiantes la situación siguiente:

- El valor de **a** es – 6 y el de **b** es – 12.
  - ¿Cuál es el valor de **a** – **b**? Resp.: + 6
  - ¿Cuál es el valor de **b** – **a**? Resp.: – 6

Explique al grupo que los resultados son distintos porque la resta no es conmutativa.

Haga que resuelvan problemas como el siguiente:

Un buzo se sumerge 15 m por debajo de la superficie. Luego, asciende 6 m, para después volver a bajar 4 m.

- ¿A qué profundidad se encuentra de la superficie? Resp.: – 13, se encuentra a 13 m bajo el nivel del mar.

Proponga al grupo que apliquen la regla de los signos y resuelvan estas operaciones:

- (+ 8) – (– 4) – (+ 6). Resp.: + 6.
- (– 20) + (+ 14) – (– 10). Resp.: + 4.
- – (+ 16) – (+ 5) – (– 8). Resp.: – 13.

Ficha 3.

Actividades de ampliación: Haga que completen, en sus cuadernos, las siguientes operaciones.

- ( ) – (– 45) = – 15. Resp.: – 60.
- 32 – ( ) = 40. Resp.: – 8.
- ( ) – (– 25) = 65. Resp.: 40.
- 72 – ( ) = 80. Resp.: – 8.
- ( ) – (– 40) = – 60. Resp.: – 100.

Indicadores de logro

- **Efectúa** multiplicaciones de números enteros.

Competencia comunicativa

Comente a sus estudiantes sobre la importancia de la regla de signos. Aclárarles que el producto de un par de números negativos es positivo, y que el de un número impar es negativo. Por ejemplo:

- (– 5) x (– 8) = + 40.
- (– 2) x (– 3) x (– 6) = – 36

Previsión de dificultades

Pregunte a sus estudiantes:

- ¿Conocían las propiedades de la multiplicación?
- ¿Ven alguna diferencia con la de los números naturales?

Explique al grupo, con ejemplos en la pizarra, cómo se resuelven las multiplicaciones de números enteros. Luego, haga que pasen a la pizarra y desarrollen las actividades en sus cuadernos.

Motíveles para que memoricen y reproduzcan en sus cuadernos las propiedades de la multiplicación de números enteros y los ejemplos ubicados en la doble página.

RECUPERACIÓN

*¿Cuál es el valor de **x** en las expresiones siguientes?*

- 8 x **x** = 72. *x = 9*
- **x** x 12 = 96. *x = 8*
- (15 + 12) x **x** = 135. *x = 5*
- **x** x (21 – 15) = 108. *x = 18*
- 18 x (**x** + 15) = 90. *x = 10*

MÁS INFORMACIÓN

Múltiplos de un número entero

Un múltiplo de un número entero **x** es un número que se obtiene al multiplicar **x** por sí mismo o cualquier otro número entero.

Los múltiplos de **x** pueden ser positivos o negativos.

Ejemplos:

- – 12 es un múltiplo de + 6, porque:

  (+ 6) x (– 2) = – 12.
- + 18 es un múltiplo de – 2, porque:

  (– 2) x (– 9) = + 18.

1 Multiplicación de números enteros

La multiplicación de números enteros se diferencia de la multiplicación de números naturales en que, en la primera, hay que tomar en cuenta los signos de los factores.

Al multiplicar dos números enteros, se presentan dos situaciones distintas:

- Los números son del mismo signo. En este caso, el producto es el resultado de multiplicar sus valores absolutos.

Ejemplos resueltos:

- (+ 7) x (+ 5) = |+ 7| x |+ 5| = 7 x 5 = 35.
- (– 9) x (– 8) = |– 9| x |– 8| = 9 x 8 = 72.

El producto de dos números enteros de igual signo es positivo.

- Los números son de distinto signo. En este caso, el producto es el opuesto del resultado de multiplicar sus valores absolutos.

Ejemplos resueltos:

- (+ 6) x (– 5) = – (| + 6 | x | – 5 |) = – (6 x 5) = – 30.
- (– 10) x (+ 2) = – (| – 10 | x | + 2 |) = – (10 x 2) = – 20.

El producto de dos números enteros de distinto signo es negativo.

Para efectuar multiplicaciones de números enteros en forma rápida, es útil recordar la regla de los signos que se muestra a continuación:

- + x + = +
- + x – = –
- – x + = –
- – x – = +

Si se multiplican más de dos números enteros, el producto será positivo, si el número de factores negativos es par y, negativo, si el número de factores negativos es impar.

Ejemplos resueltos:

- (– 5) x (+ 9) x (– 3) = + 135.
- – 2) x (+ 3) x (– 5) x (– 9) = – 270.
- (– 1) x (– 7) x (+ 4) x (– 3) x (+ 2) x (– 5) = + 840.

Sugerencias didácticas

- **Inicio:** Oriente a sus estudiantes para que lean y resuelvan en el aula la actividad vinculada a la recuperación de experiencias previas propuesta en el apartado *Recuperación*, en la que determinarán el valor de **x** en cada una de las expresiones.
- **Desarrollo:** Pida a sus estudiantes que lean cuidadosamente el contenido de la doble página y que observen los procedimientos aplicados en los ejemplos resueltos. Formúleles preguntas vinculadas al contenido como, por ejemplo: *¿En qué se diferencian la multiplicación de los números naturales y la de los números enteros? ¿Cuál es el signo del producto de dos números enteros de igual signo? ¿Y el de signos distintos?* Discuta con el grupo las informaciones del apartado *Más información*, relacionadas con los múltiplos de números enteros.

2 Propiedades de la multiplicación

- **Propiedad conmutativa**: El producto de dos números enteros cualesquiera, **x** e **y**, es independiente del orden de los factores.

$$\mathbf{x} \times \mathbf{y} = \mathbf{y} \times \mathbf{x}.$$

- **Propiedad asociativa**: El producto de tres números enteros cualesquiera, **x**, **y**, **z**, es independiente de la manera en que se agrupen los factores.

$$(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \times \mathbf{z} = \mathbf{x} \times (\mathbf{y} \times \mathbf{z}).$$

- **Propiedad distributiva con respecto a la adición**: Si **x**, **y**, **z** son números enteros cualesquiera, el producto de la multiplicación de **x** por la suma (**y** + **z**) es igual a la suma (**x** x **y**) + (**x** x **y**).

$$\mathbf{x} \times (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = (\mathbf{x} \times \mathbf{y}) + (\mathbf{x} \times \mathbf{z}).$$

- **Propiedad del cero**: El resultado de multiplicar un número entero **x**, por cero, 0, es cero.

$$\mathbf{x} \times 0 = 0 \times \mathbf{x} = 0.$$

- **Propiedad de la unidad**: El resultado de multiplicar un número entero **x**, por la unidad positiva, + 1, es el propio número entero **x**.

$$\mathbf{x} \times (+1) = (+1) \times \mathbf{x} = \mathbf{x}.$$

En la expresión (**x** x y) + (**x** x z), **x** es un factor común.

En la expresión numérica (– 5) x (+ 9) + (– 5) x (– 4), – 5 es un factor común. La aplicación de la propiedad distributiva de la multiplicación permite extraer o sacar el factor común (– 5) de la expresión numérica:

$$(-5) \times (+9) + (-5) \times (-4) = (-5) \times [(+9) + (-4)].$$

MÁS INFORMACIÓN

Elementos absorbente y neutro de la multiplicación

El número entero 0 es el elemento absorbente de la multiplicación, porque todo número entero **x** multiplicado por 0 proporciona el 0.

El número entero (+ 1) es el elemento neutro de la multiplicación, porque todo número entero **x** multiplicado por + 1 proporciona al propio número **x**.

RECUERDA

Operaciones enteras

La adición, la sustracción y la multiplicación de dos números enteros **x** e **y** dan como resultados números enteros. Cualquiera de las tres operaciones es un ejemplo de operación entera.

ACTIVIDADES

8 Efectúa las operaciones de multiplicación.

- (+ 2) x (– 5) *–*
- (– 8) x (+ 6) *–*
- (+ 5) x (– 8) x (– 3) *+*
- (– 1) x (+ 9) x (– 5) x (– 2) x (+ 9) *–*

9 Efectúa las multiplicaciones siguientes.

- (+ 8) x (– 5) *– 40*
- (– 7) x (– 12) *84*
- (– 5) x (+ 8) x (– 2) *80*
- (– 9) x (–5) x (–4) *– 180*
- (+ 15) x (– 8) x (+ 2) *– 240*
- (– 6) x (+ 12) x (– 3) x (+ 4) *– 864*
- (– 12) x (– 8) x (– 1) x (+ 3) *– 288*

10 Comprueba la igualdad: (– 2) x [(– 5) + (+ 9)] = (– 2) x (– 5) + (– 2) x (+ 9). *– 8 = – 8*

- **Desarrollo:** Muestre a sus estudiantes el proceso de solución de los ejemplos resueltos. Pregunte a sus estudiantes: *¿Por qué la operación de multiplicación es conmutativa? ¿Cuál es el producto de multiplicar un número por cero?* Continúe con las preguntas y discuta las diversas respuestas en el grupo justificando siempre sus respuestas. Motíveles para que lean y comenten en el grupo las informaciones de los apartados *Más información* (Elemento absorbente y neutro de la multiplicación) y *Recuerda* (Operaciones enteras).
- **Cierre:** Motive a sus estudiantes a realizar los ejercicios del apartado *Actividades*. En la actividad 8, resolverán diversas operaciones de multiplicación de números enteros. En la actividad 9, efectuarán diversas multiplicaciones de números enteros. En la actividad 10, comprobarán las igualdades indicadas. Revise los resultados en el grupo y envíeles a la pizarra.

Atención a la diversidad

Actividades de refuerzo: Escriba las siguientes operaciones con números enteros en la pizarra, a fin de que las resuelvan en sus cuadernos.

- (– 7) x (– 3) x (+ 10) x (+ 5)
  Resp.: + 1 050
- (+ 9) x (– 10) x (– 8) x (– 22)
  Resp.: – 15 840
- (+ 20) x (– 10) x (+ 5) x (– 12)
  Resp.: + 12 000
- (+ 5) x (+ 2) x (– 12) x (+ 2)
  Resp.: – 240
- (– 3) x (– 4) x (+ 10) x (– 5)
  Resp.: – 600.

Ficha 4.

Actividades de ampliación: Escriba en la pizarra las siguientes expresiones incompletas y, luego, haga que escriban los factores faltantes.

- ____ x (+ 8) = – 24.
  Resp.: – 3.
- (– 15) x ____ = 60.
  Resp.: – 4.
- ____ x (– 5) x (+ 8) = 80.
  Resp.: – 2.
- (– 15) x ____ x (+ 3) = – 90.
  Resp.: + 2.

Aprender a aprender

Pregunte a sus estudiantes:

- *¿En qué situación de la cotidianidad podríamos utilizar la multiplicación con números enteros?*

Indicadores de logro

- **Efectúa** divisiones de números enteros.

Competencia científica y tecnológica

Comente a sus estudiantes que la calculadora científica facilita el cálculo de las operaciones aritméticas con paréntesis y corchetes.

Más información

Antes de desarrollar el tema de la clase, haga un repaso general sobre la división de los números naturales y los criterios de divisibilidad y, después, formúleles preguntas relacionadas con la división.

Destáqueles las propiedades de la división y, después, haga que las comprueben. Muéstreles el orden jerárquico de las operaciones combinadas.

Diseñe ejercicios relacionados con divisiones y operaciones combinadas para que los desarrollen en sus cuadernos. Ofrézcales las orientaciones necesarias y, luego, envíeles a la pizarra.

RECUPERACIÓN

¿Cuál es el valor de **x** *en las expresiones siguientes?*

- 18 ÷ **x** = 3. **x** = *6*
- **x** ÷ 12 = 4. **x** = *48*
- (45 + 15) ÷ **x** = 5. **x** = *12*
- **x** ÷ (18 − 12) = 7. **x** = *42*
- 20 ÷ (**x** + 3) = 4. **x** = *2*

1 División de números enteros

Al dividir dos números enteros hay que tomar en cuenta, como en el caso de la multiplicación, los signos del dividendo y del divisor. En la división de dos enteros se presentan las siguientes situaciones:

- El dividendo y el divisor son números enteros del mismo signo. En esta primera situación, el cociente es el resultado de dividir los valores absolutos del dividendo y del divisor.

Ejemplos resueltos:

- $(+8) \div (+2) = |+8| \div |+2| = 8 \div 2 = 4.$
- $(-9) \div (-3) = |-9| \div |-3| = 9 \div 3 = 3.$

El resultado de dividir dos números enteros de igual signo es positivo.

El dividendo y el divisor son números enteros de distinto signo. En esta segunda situación, el cociente es el opuesto del resultado de multiplicar los valores absolutos del dividendo y del divisor.

Ejemplos resueltos:

- $(+18) \div (-3) = -(|+18| \div |-3|) = -(18 \div 3) = -6.$
- $(-20) \div (+5) = -(|-20| \div |+5|) = -(20 \div 5) = -4.$

El resultado de dividir dos números enteros de distinto signo es negativo.

Para dividir números enteros en forma rápida, es útil recordar la regla de los signos que se muestra a continuación:

- $+ \div + = +$
- $- \div - = +$
- $+ \div - = -$
- $- \div + = -$

2 Divisores de un número entero

Un divisor de un número entero x es un número que divide en forma exacta a **x**.

Ejemplos resueltos:

- (-6) es un divisor de $(+42)$, porque: $(+42) \div (-6) = -7.$
- $(+5)$ es un divisor de (-120), porque: $(-120) \div (+5) = +24.$

Sugerencias didácticas

- **Inicio:** Oriente a sus estudiantes para que lean y resuelvan en el aula la actividad vinculada a la recuperación de experiencias previas propuestas en el apartado *Recuperación*, en la que determinarán el valor de **x** en cada una de las divisiones.
- **Desarrollo:** Pida a sus estudiantes que lean cuidadosamente el contenido de la doble página y que observen los procedimientos aplicados en los ejemplos resueltos. Formúleles preguntas vinculadas al contenido como, por ejemplo: *¿Cuál es el signo del resultado de dividir dos cantidades con igual signo? ¿Cuál es el signo del cociente de dos números enteros con signos diferentes?* Discuta con el grupo las informaciones del apartado *Más información*, relacionadas con el procedimiento para obtener uno de dos factores, conocido el producto.

3 Propiedades de la división de números enteros

La división de números enteros cumple:

- Propiedad de la no conmutatividad:

  La división de dos números enteros cualesquiera, **x** e **y**, no es conmutativa, esto es, si se intercambian las posiciones del dividendo y el divisor el cociente se altera.

  $$\mathbf{x} \div \mathbf{y} \neq \mathbf{y} \div \mathbf{x}.$$

- Propiedad de la no asociatividad:

  La divisiones sucesivas de tres números enteros cualesquiera, **x**, **y**, **z**, proporcionan cocientes que dependen de la forma en que se agrupen los números **x**, **y**, **z**.

  $$(\mathbf{x} \div \mathbf{y}) \div \mathbf{z} \neq \mathbf{x} \div (\mathbf{y} \div \mathbf{z}).$$

- Propiedad distributiva por la derecha con respecto a la adición:

  Si **x**, **y**, z son números enteros cualesquiera, el cociente de la división $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \div \mathbf{z}$ verifica la siguiente igualdad:

  $$(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \div \mathbf{z} = (\mathbf{x} \div \mathbf{z}) + (\mathbf{x} \div \mathbf{z})$$

- Propiedad de la unidad:

  La división de un número entero **x** por la unidad positiva (+ 1), es el propio número **x**: $\mathbf{x} \div (+1) = \mathbf{x}$.

- Imposibilidad de la división por 0:

  El cero no es divisor de ningún número entero **x**. Esto es, $\mathbf{x} \div 0$ no está definida.

MÁS INFORMACIÓN

Cómo obtener uno de dos factores, conocido el producto

Si **x**, **y**, **z** son números enteros y, **x** x **y** = **z**, cualquiera de los factores **x** o **y** es el resultado de dividir el producto **z** por el otro factor:

$$\mathbf{x} = \mathbf{z} \div \mathbf{y} \qquad \mathbf{y} = \mathbf{z} \div \mathbf{x}.$$

Ejemplos:

- Si **x** x (– 6) = + 48, entonces:

  x = (+ 48) ÷ (– 6) = – 8.

- Si (+ 9) x **x** = + 72, entonces:

  x = (+ 72) ÷ (+ 9) = + 8.

ACTIVIDADES

11 Completa los signos en las expresiones siguientes.

- $\overset{-}{\ldots}$ 8) ÷ (– 2) = + 4
- (+ 9) ÷ ($\overset{-}{\ldots}$ 3) = – 3
- (– 81) ÷ (+ 9) = $\overset{-}{\ldots}$ 9
- (+ 75) ÷ ($\overset{+}{\ldots}$ 3) = + 25
- (– 36) ÷ ($\overset{-}{\ldots}$ 9) = + 3
- ($\overset{+}{\ldots}$ 24) ÷ (– 4) = – 12
- (– 16) ÷ (– 4) = $\overset{+}{\ldots}$ 3
- (– 120) ÷ ($\overset{-}{\ldots}$ 30) = – 4

12 Efectúa las divisiones siguientes.

- (– 28) ÷ (– 7) *4*
- (+ 16) ÷ (– 2) *– 8*
- (– 32) ÷ (+ 8) *– 4*
- (+ 75) ÷ (+ 15) *5*
- (– 120) ÷ (+ 4) *– 30*
- (+ 150) ÷ (+ 6) *25*
- (+ 324) ÷ (– 9) *– 36*
- (– 196) ÷ (– 28) *7*

13 Escribe cuatro divisores positivos o negativos de cada uno de los enteros siguientes.

- + 12
- – 18
- – 24
- + 31
- + 60
- – 75

Respuestas libres.

14 Comprueba la desigualdad: [(– 16) ÷ (– 8)] ÷ (+ 2) ≠ (– 16) ÷ [(– 8)] ÷ (+ 2)]. *1 ≠ 4*

- **Desarrollo:** Muestre a sus estudiantes el proceso de solución de los ejemplos resueltos. Desarrolle en la pizarra algunos ejemplos adicionales y haga que desarrollen sus propios ejemplos en sus cuadernos. Pregunte a sus estudiantes: *¿Qué debemos tomar en cuenta para efectuar divisiones con números enteros? ¿Por qué la división no es conmutativa?* Motíveles para que lean y comenten las informaciones del apartado *Más información* (Cómo obtener uno de dos factores, conocido el producto). Desarrolle este y otros ejemplos en la pizarra y haga que los trabajen en sus cuadernos.
- **Cierre:** Motive a sus estudiantes a realizar los ejercicios del apartado *Actividades*. En la actividad 11, completarán los signos en las expresiones aritméticas dadas. En la actividad 12, efectuarán diversas divisiones de números enteros. En la actividad 13, escribirán cuatro divisores positivos o negativos de cada uno de los enteros dados. En la actividad 14, comprobarán las desigualdades indicadas.

Atención a la diversidad

Actividades de refuerzo: Escriba las siguientes operaciones con números enteros en la pizarra a fin de que las resuelvan en sus cuadernos.

- (20 x 10) ÷ (– 5 x 4).
  Resp.: – 10.
- (56 + 24) ÷ (– 4 + – 1.
  Resp.: – 16.
- (9 x –15) ÷ (– 5 x 3).
  Resp.: + 9.
- (– 20) x (– 3) ÷ (– 2) x (– 5).
  Resp.: + 10.
- (8) x (– 4) ÷ (4) x (– 2).
  Resp.: + 4.
- (– 16) x (2) ÷ (2) x (2).
  Resp.: – 8.
- (– 30) x (4) ÷ (– 8) x (– 5).
  Resp.: – 3.

Ficha 5.

Actividades de ampliación: Escriba en la pizarra las siguientes expresiones para que las completen:

- (– 45) ÷ ______ = + 5.
  Resp.: – 9.
- (+ 28) ÷ ______ = – 7.
  Resp.: – 4.
- (______) ÷ + 12 = – 5.
  Resp.: – 60.
- (______) ÷ – 4 = + 6.
  Resp.: – 24.
- (– 72) ÷ ______ = – 8.
  Resp.: + 9.
- (– 100) ÷ ______ = 10.
  Resp.: – 10.
- (______) ÷ – 25 = 8.
  Resp.: – 200.

Indicadores de logro

- **Calcula** potencias de números enteros.

Competencia comunicativa

Muestre a sus estudiantes en la pizarra la expresión 5^3. posteriormente, pregúnteles:

- ¿Qué nombre recibe esta expresión?
  Resp.: Potencia.
- ¿Qué nombre recibe el 5?
  Resp.: Base.
- ¿Y el 3?
  Resp.: Exponente.
- ¿Cómo se determina el valor de esta expresión?
  Resp.: 5 x 5 x 5= 125.

Aprender a aprender

Escriba en la pizarra expresiones como las siguientes:

- $(6^2 \times 6^3) \div 6^4 = 6^5 \div 6^4 = 6$
- $(8^4 \times 8^3) \div 8^6 = 8^7 \div 8^6 = 8$

Pregunte al grupo:

- ¿Cuáles procedimientos se siguieron para obtener el valor de las expresiones?
- ¿Cuál es el procedimiento para multiplicar potencias?
- ¿Cuál es el procedimiento para dividir potencias?
- ¿Estos pasos representan una regla general?
- ¿Recuerdan la regla?

Desarrolle estos conceptos con diversos ejercicios para desarrollar en el cuaderno y en la pizarra.

RECUPERACIÓN

*¿Cuál es el valor de **x** en cada una de las expresiones siguientes?*

- $2^x = 8$. — *x = 3*
- $x^4 = 16$. — *x = 2*
- $5^4 = x$. — *x = 625*
- $4^x = 256$. — *x = 4*
- $x^5 = 32$. — *x = 2*

1 Potencias de un número entero

El resultado de multiplicar **n** veces por sí mismo a un número entero **x** es una potencia de **x**: $\underbrace{x \times x \times x \times x \ldots \ldots \ldots \ldots \times x}_{n \text{ veces}}$.

Ejemplos resueltos:

- $(+18) \div (-3) = -(|+18| \div |-3|) = -(18 \div 3) = -6$.
- $(-20) \div (+5) = -(|-20| \div |+5|) = -(20 \div 5) = -4$.

El producto anterior se representa en forma abreviada: x^n. El número **x** es la base de la potencia y la cantidad **n** de veces que **x** se multiplica por sí mismo es su exponente.

Para hallar potencias de números enteros hay que tomar en cuenta el signo, positivo o negativo, de la base.

Ejemplos resueltos:

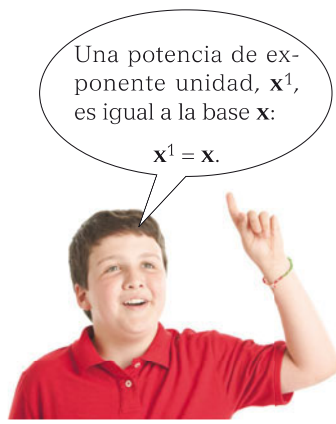
- $(+8)^3 = \underbrace{(+8) \times (+8) \times (+8)}_{3 \text{ veces}} = +512$.
- $(-5)^4 = \underbrace{(-5) \times (-5) \times (-5) \times (-5)}_{4 \text{ veces}} = +625$.

La potenciación de números enteros sigue la siguiente regla de los signos:

- Si **x** es positivo, la potencia x^n también es positiva.
- Si **x** es un número negativo, la potencia x^n es positiva si **n** es un número par y, negativa, si es un número impar.

Ejemplos resueltos:

- $(+2)^4 = (+2) \times (+2) \times (+2) \times (+2) = +16$.
- $(-4)^5 = (-4) \times (-4) \times (-4) \times (-4) \times (-4) = -1\,024$.



2 Producto de potencias de igual base

Observa el procedimiento para obtener el producto de dos potencias de igual base $(+5)^2$ y $(+5)^3$:

$(+5)^2 \times (+5)^3 = (+5) \times (+5) \times (+5) \times (+5) \times (+5) = (+5)^{2+3} = (+5)^5$.

El producto de potencias de igual base, x^m y x^n, es otra potencia de la misma base y de exponente igual a la suma de los exponentes de los factores, **m** + **n**: $x^m \times x^n = x^{m+n}$.

Sugerencias didácticas

- **Inicio:** Oriente a sus estudiantes para que lean y resuelvan la actividad vinculada a la recuperación de experiencias previas propuesta en el apartado *Recuperación*, en la que determinarán el valor de **x** en cada una de las potencias.
- **Desarrollo:** Pida a sus estudiantes que lean cuidadosamente el contenido de la doble página y que observen los procedimientos aplicados en los ejemplos resueltos. Formúleles preguntas vinculadas al contenido como, por ejemplo: *¿Qué nos indica el exponente en una potencia? ¿Cuál es el signo de la potencia cuando el exponente es positivo? ¿Cuál es el caso en que la potencia será negativa?* Discuta con el grupo la información que ofrece el niño de la página 18, relacionada con la potencia de exponente 1.

3 Cociente de potencias de igual base

Si $(+5)^2 \times (+5)^3 = (+5)^5$, entonces:

$$(+5)^2 = (+5)^5 \div (+5)^3 = (+5)^{5-3}.$$

$$(+5)^3 = (+5)^5 \div (+5)^2 = (+5)^{5-2}.$$

Las expresiones anteriores nos muestran que el cociente de potencias de igual base, x^m y x^n, es otra potencia de la misma base y de exponente igual a la diferencia del exponente del dividendo y el exponente del divisor, $m - n$:

$$x^m \div x^n = x^{m-n}.$$

EJEMPLOS RESUELTOS:

- $(+2)^7 \div (+2)^2 = (+2)^{7-2} = (+2)^5 = +32.$
- $(-6)^5 \div (-6)^3 = (-6)^{5-3} = (-6)^2 = +36.$
- $(-6)^9 \div (-6)^6 = (-6)^{9-6} = (-6)^3 = -216.$

4 Potencias de exponente 0

La expresión $x^m \div x^n = x^{m-n}$ es interesante porque permite definir la potencia de exponente 0.

Si $m = n$, entonces $x^m \div x^n = x^{m-m} = x^0$.

Como $x^m \div x^m = 1$, está claro que $x^0 = 1$.

RECUERDA

Cuadrados y cubos perfectos

Si x es un número entero, a las potencias x^2 y x^3 se les llama cuadrado perfecto y cubo perfecto, respectivamente.

- 9 es un cuadrado perfecto porque es el resultado de $(+3)^2$.
- -8 es un cubo perfecto porque es el resultado de $(-2)^3$.

INTELIGENCIA COLABORATIVA

Operaciones con potencias de igual base

Calculen el valor de las expresiones siguientes.

- $(+3)^2 \times (+3)^4 \times (+3)^1$
  $(+3)^7 = 2\,187$
- $[(+8)^5 \times (+8)^3] \div (+8)^6$
  $(+8)^2 = 64$
- $[(-5)^7 \times (-5)^2 \times (-5)^3] \div (-5)^9$
  $(-5)^3 = -125$
- $(-9)^7 \div [(-9)^2 \times (-9)^5]$
  $(-9)^0 = 1$

ACTIVIDADES

15 Escribe el signo de cada una de las potencias siguientes.

- $(-2)^5$ $-$
- $(+8)^{12}$ $+$
- $(-5)^{10}$ $+$
- $(-8)^{17}$ $-$
- $(+28)^{19}$ $+$
- $(-12)^{25}$ $-$
- $(-18)^{51}$ $-$

16 Determina, en tu cuaderno, las potencias siguientes.

- $(+8)^3$ *512*
- $(-5)^4$ *625*
- $(+7)^3$ *343*
- $(-2)^8$ *256*
- $(-15)^3$ *$-3\,375$*
- $(-6)^6$ *46 656*
- $(+120)^0$ *$+1$*

17 Determina, en tu cuaderno, las potencias siguientes.

- $(-3)^3 \times (-3)^2$ *-243*
- $(+5)^1 \times (+5)^4$ *3 125*
- $(+4)^4 \times (+4)^2$ *4 096*
- $(-2)^5 \times (-2)^3$ *256*
- $(+8)^0 \times (+8)^4$ *4 096*
- $(+5)^6 \div (+5)^4$ *25*
- $(-3)^5 \div (-3)^2$ *-27*
- $(-8)^7 \div (-8)^3$ *4 096*
- $(+15)^8 \div (+15)^6$ *225*
- $(-25)^{10} \div (-25)^9$ *-25*

18 Comprueba las igualdades siguientes.

- $3^2 + 3^2 + 3^2 + 3^2 = 4 \times 3^2$ *$36 = 36$*
- $(2 \times 5)^2 = 2^2 \times 5^2$ *$100 = 100$*
- $(6 / 3)^3 = 6^3/3^3$ *$8 = 8$*

Atención a la diversidad

Actividades de refuerzo: Proponga a sus estudiantes que resuelvan las siguientes operaciones en sus cuadernos y, luego, comparen los resultados en el aula.

- $(x)^5 = -32$ Resp.: $x = 2$
- $(-3)^x = -243$ Resp.: $x = 5$
- $(x)^2 = 144$ Resp.: $x = 12$
- $(x)^{-3} = -125$ Resp.: $x = 5$
- $(x)^{-4} = +81$ Resp.: $x = 3$
- $(7)^{-3} = x$ Resp.: $x = -343$
- $(6)^{-2} = x$ Resp.: $x = +36$
- $(x)^{-7} = -128$ Resp.: $x = 2$

Ficha 6.

Actividades de ampliación: Pregunte a sus estudiantes que investiguen y, después, discutan sus respuestas en el aula.

- ¿Por qué 2^{-3} es igual a 1/8?
- ¿Qué regla de la potenciación se aplica en este caso?

- **Desarrollo:** Muestre a sus estudiantes el proceso de solución de los ejemplos resueltos. Desarrolle en la pizarra algunos ejemplos adicionales y, luego, pregúnteles: *¿Qué regla debemos tomar en cuenta para calcular productos de potencias de igual base? ¿Y para calcular cocientes de potencias de igual base?* Motíveles para que lean y comenten en el grupo las informaciones del apartado *Recuerda* (Cuadrados y cubos perfectos). Desarrolle con el grupo los ejercicios propuestos en el apartado *Inteligencia colaborativa* relacionados con las operaciones con potencias.
- **Cierre:** Motive a sus estudiantes a realizar los ejercicios del apartado *Actividades*. En la actividad 15, escribirán el signo que corresponda a cada una de las potencias. En la actividad 16, determinarán, en sus cuadernos, las potencias indicadas. En la actividad 17, determinarán, en sus cuadernos, las operaciones con potencias dadas. En la actividad 18, comprobarán las igualdades indicadas.

Aprender a aprender

Pregunte a sus estudiantes:

- *¿Qué facilidad nos ofrece el uso de potencias en las operaciones aritméticas?*
- *¿Podrían diseñar un ejemplo?*

Indicadores de logro

- **Calcula** raíces cuadradas y cúbicas de números enteros.

Documento

Operaciones con números enteros

Ejercicios diversos que involucran operaciones con números enteros.

Otras sugerencias

Antes de dar inicio al desarrollo del tema de la clase, repase los conceptos de número cuadrado perfecto y de raíz cuadrada. Después, escriba las raíces cuadradas de: 3, 4, 8, 9, 15, 16 y 25. Luego, pregunte al grupo:

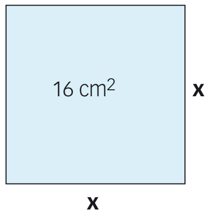
- ¿Cuáles de estas raíces dadas son exactas?
- ¿Por qué?
- ¿Cómo se obtiene un valor aproximado de las demás raíces?

Motive al grupo para que lean en el texto en qué consiste la raíz cuadrada de un entero positivo y por qué son dos las raíces, una positiva y otra negativa. Pregunte a sus estudiantes:

- ¿Por qué no se incluye la raíz cuadrada de números negativos?

RECUPERACIÓN

¿Cuánto mide el lado de un cuadrado de área 16 cm²?



Di qué hiciste para responder la pregunta.

RECUERDA

Elementos de una expresión radical

La expresión que representa una raíz consta de las siguientes partes:

Raíz

Índice → $\sqrt[3]{729} = 9$

Radicando

El índice 2 de las raíces cuadradas no se escribe.

La radicación y la potenciación son operaciones inversas una de la otra.

Si $\sqrt{9}$, entonces: $3^2 = 9$.

1 Raíces cuadrada y cúbica de un número

La raíz cuadrada de un número es la base que, al ser elevada al cuadrado, nos proporciona dicho número. Un cuadrado perfecto tiene dos raíces cuadradas que son números enteros opuestos.

Si representamos la raíz cuadrada de un número positivo **x** mediante la expresión $\sqrt{\mathbf{x}}$, entonces:

- $\sqrt{49} = +7; -7$, porque: $(+7)^2 = (-7)^2 = 49$.
- $\sqrt{81} = +9; -15$, porque: $(+9)^2 = (-9)^2 = 81$.

Un número negativo no tiene raíz cuadrada.

La raíz cúbica de un número es la base que, al ser elevada al cubo, nos proporciona dicho número. Un cubo perfecto tiene una raíz cúbica que puede ser positiva o negativa.

Si representamos la raíz cúbica de un número positivo **x** por $\sqrt[3]{\mathbf{x}}$, entonces:

- $\sqrt[3]{27} = +3$, porque: $(+3)^3 = +27 = 27$.
- $\sqrt[3]{(-125)} = -5$, porque: $(-5)^3 = -125$.

2 Raíces cuadradas exacta y entera

Un número cuadrado perfecto tiene dos raíces cuadradas exactas.

Ejemplos resueltos:

- $\sqrt{64} = +8; -8$, que son las raíces cuadradas exactas de 64, porque: $(+8)^2 = (-8)^2 = 64$.
- $\sqrt{196} = +14; -14$, que son las raíces cuadradas exactas de 196, porque: $(+14)^2 = (-14)^2 = 196$.

Un número que no es cuadrado perfecto tiene una raíz cuadrada entera, que asumiremos positiva.

Ejemplos resueltos:

- El número 26 está entre dos cuadrados perfectos consecutivos, 25 y 36, $\sqrt{26}$ está entre $\sqrt{25}$ y $\sqrt{36}$. La raíz cuadrada entera de 26 es $\sqrt{25} = 5$.
- El número 75 está entre dos cuadrados perfectos consecutivos, 64 y 81, $\sqrt{75}$ está entre $\sqrt{64}$ y $\sqrt{81}$. La raíz cuadrada entera de 75 es $\sqrt{64} = 8$.

Sugerencias didácticas

- **Inicio:** Oriente a sus estudiantes para que lean y resuelvan en el aula la actividad vinculada a la recuperación de experiencias previas propuesta en el apartado *Recuperación*, en la que determinarán cuál es la longitud de un lado de un cuadrado conocida su área.
- **Desarrollo:** Pida a sus estudiantes que lean cuidadosamente el contenido de la doble página y que observen los procedimientos aplicados en los ejemplos resueltos. Formúleles preguntas vinculadas al contenido como, por ejemplo: *¿Cómo se define la raíz cuadrada de un número? ¿Cuántas raíces tiene un cuadrado perfecto?* Discuta con el grupo la información del apartado *Recuerda* y haga que la reproduzcan en sus cuadernos.

3 Multiplicación y división de radicales de igual índice n

Si $\sqrt[n]{x}$ y $\sqrt[n]{y}$ son raíces de un mismo índice n, entonces:

$\sqrt[n]{x} \times \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{x \times y}$ $\quad \sqrt[n]{x} \div \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{x \div y} = \sqrt[n]{x/y}$.

Ejemplos resueltos:

- $\sqrt{9} \times \sqrt{16} = \sqrt{9 \times 16} = \sqrt{144} = 12$.
- $\sqrt[3]{8} \times \sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{8 \times 27} = \sqrt[3]{216} = 6$.

4 Operaciones combinadas

El valor de una expresión con operaciones combinadas se obtiene efectuando las operaciones en el siguiente orden jerárquico: primero, se efectúan las operaciones entre paréntesis o corchetes; luego, las potencias y raíces; más tarde, las multiplicaciones y divisiones y, finalmente, las adiciones y sustracciones.

Ejemplos resueltos:

- Calcular: $(-2) \times (9-4) - 2 \times 3^2 - 15 \div (-3) + \sqrt{9}$

$(-2) \times (9-4) - 2 \times 3^2 - 15 \div (-3) + \sqrt{9} =$

$(-2) \times 5 - 2 \times 3^2 - 15 \div (-3) + \sqrt{9} =$

$-10 - 2 \times 3^2 - 15 \div (-3) + \sqrt{9} =$

$-10 - 2 \times 9 - 15 \div (-3) + 3 = -10 - 18 + 5 + 3 = -20$.

MÁS INFORMACIÓN

Residuo de una raíz cuadrada

Si **N** es un número entero positivo y **x** su raíz cuadrada entera, a la diferencia $N - x^2$ se le llama residuo de $\sqrt{N}$.

Cuando el residuo de $\sqrt{N}$ es cero, la raíz cuadrada es exacta.

Ejemplos:

- La raíz cuadrada entera de 68 es 8 y su residuo es: $68 - 8^2 = 68 - 64 = 4$.
- La raíz cuadrada entera de 90 es 9 y su residuo es: $90 - 9^2 = 90 - 81 = 9$.

ACTIVIDADES

19 Determina las raíces cuadradas positivas exactas o enteras.

- $\sqrt{64}$ 8
- $\sqrt{121}$ 11
- $\sqrt{150}$ 12
- $\sqrt{256}$ 16
- $\sqrt{320}$ 17
- $\sqrt{529}$ 23
- $\sqrt{965}$ 31

20 Determina las raíces cúbicas.

- $\sqrt[3]{-27}$ – 3
- $\sqrt[3]{64}$ 4
- $\sqrt[3]{125}$ 4
- $\sqrt[3]{-216}$ 5
- $\sqrt[3]{343}$ – 6
- $\sqrt[3]{-512}$ 7
- $\sqrt[3]{1\,000}$ – 8

21 Calcula el valor de cada expresión.

- $\sqrt[3]{-27} \times 8 + (18-3)2 \div 3 - 4 \times [5 + (-15) \div 5] + 75$ 118
- $[5 \times (-3) + 10] + (-2) \times 52 - 180 \div (-12) + 15 \div \sqrt[3]{125} - 16$ – 53

Atención a la diversidad

Actividades de refuerzo: Proponga a sus estudiantes que resuelvan las siguientes operaciones en sus cuadernos y, luego, comparen los resultados en el aula.

- $\sqrt{9} \times \sqrt{25} =$ Resp.: 15
- $\sqrt{16} \times \sqrt{36} =$ Resp.: 24
- $\sqrt{9} \times \sqrt{81} =$ Resp.: 27
- $\sqrt{4} \times \sqrt{169} =$ Resp.: 26
- $\sqrt{100} \times \sqrt{25} =$ Resp.: 150
- $\sqrt{49} \times \sqrt{64} =$ Resp.: 56
- $\sqrt{25} \times \sqrt{81} =$ Resp.: 45

Ficha 7.

Actividades de ampliación: Escriba las raíces: $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{11}$,... Luego, pregunte al grupo:

- ¿Estas raíces cuadradas son exactas o enteras?
- ¿Puede asegurarse que las raíces cuadradas de números impares son inexactas?

- **Desarrollo:** Muestre a sus estudiantes el proceso de solución de los ejemplos resueltos. Pregunte a sus estudiantes: *¿Entre cuáles cuadrados perfectos se encuentra el número 30? ¿Cuál es la raíz cuadrada entera del número 30? ¿Cuáles son los pasos para efectuar operaciones combinadas?* Motíveles para que lean y comenten en el grupo las informaciones del apartado *Más información* (Residuo de una raíz cuadrada). Discuta las informaciones con el grupo, haga que desarrollen los ejemplos en sus cuadernos y motíveles para que construyan otros más.
- **Cierre:** Motive a sus estudiantes a realizar los ejercicios del apartado *Actividades*. En la actividad 19, determinarán las raíces cuadradas positivas exactas o enteras. En la actividad 20, determinarán, en sus cuadernos, las raíces cúbicas indicadas. En la actividad 21, determinarán, en sus cuadernos, el valor de cada expresión aritmética. Revise los resultados en el grupo y envíeles a la pizarra.

Aprender a aprender

Pregunte a sus estudiantes:

- *¿Comprendieron completamente el tema de la raíz cuadrada?*
- *¿Podrían explicar a alguno de sus compañeros los pasos para resolverlas?*

Competencias

- Comunicativa.
- Uso de algoritmos.
- Resolución de problemas.

Indicadores de logro

- **Representa** números enteros en la recta numérica.
- **Ordena** números enteros en la recta numérica.
- **Compara** números enteros usando la recta numérica y los signos de relación.
- **Efectúa** adiciones, sustracciones, multiplicaciones, divisiones, potencias y raíces cuadradas y cúbicas de números enteros.
- **Resuelve** problemas del contexto donde aplica operaciones de los números enteros.

ACTIVIDADES

22 Escribe el número entero correspondiente.

- La temperatura es de 10 °C bajo cero.
- La altura de la montaña es de 879 m.
- La profundidad del pozo es de 18 m.
- La inflación subió 3 puntos porcentuales.
- El avión descendió 200 m.
- Hubo un aumento de sueldo de RD$1 500.
- Luisa tiene una deuda de RD$ 2 500.
- La población disminuyó un 10 %.
- El comercio creció un 25 % este mes.
- El río está a 18 m bajo el nivel del mar.

23 Observa y, luego, completa la tabla.

Número	Opuesto
16	– 16
40	– 40
28	– 28
– 12	12
– 45	45

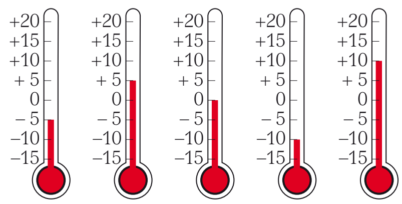
24 Representa los siguientes números enteros y sus opuestos sobre una recta numérica.

– 10, – 4, + 5, + 12, – 45, – 15, + 25, + 60

25 Escribe, en orden de menor a mayor, todos los números enteros comprendidos entre …

- … – 15 y – 2
- … – 10 y + 5

26 Organiza las temperaturas de los termómetros de mayor a menor.



+ 10 °C > + 5 °C > 0 °C > – 5 °C > – 10 °C

27 Representa las operaciones en la recta numérica y, luego, escribe el resultado.

- (+ 5) + (+ 4) 9
- (– 8) + (+ 12) 4
- (– 10) + (+ 3) – 7
- (– 3) + (– 9) – 12

28 Calcula.

- (+ 12) + (– 9) – (– 5) 8
- (– 7) – (+ 4) – (– 10) – 1
- (– 25) + (– 32) – (+ 15) – 72
- (+ 95) – (+ 40) + (– 9) 46

29 Obtén los productos y cocientes.

- (+ 4) x (+ 5) 20
- (– 8) x (+ 2) x (+ 6) – 96
- (+ 12) x (– 9) x (– 5) 540
- (– 5) x (– 6) x (– 8) – 240
- (+ 36) ÷ (– 12) – 3
- (– 120) ÷ (– 15) 8

30 Determina las potencias siguientes.

- $(+5)^3$ 125
- $(-3)^4$ 81
- $(+2)^8$ 256
- $(-4)^5$ – 1 024

31 Marca con ✓ las raíces que existen.

- $\sqrt[3]{27}$ ✓
- $\sqrt{-196}$
- $\sqrt[3]{-512}$ ✓
- $\sqrt{400}$ ✓

32 Obtén sin la calculadora, mediante exploración, las raíces siguientes.

- $\sqrt{121}$ 11
- $\sqrt{361}$ 19
- $\sqrt{676}$ 26
- $\sqrt{841}$ 29
- $\sqrt[3]{216}$ 6
- $\sqrt[3]{-125}$ – 5
- $\sqrt[3]{343}$ 7
- $\sqrt[3]{-729}$ – 9

33 Determina la raíz cuadrada entera y el residuo.

- $\sqrt{75}$ 8; 11
- $\sqrt{150}$ 12; 6
- $\sqrt{220}$ 14; 24
- $\sqrt{652}$ 25; 27

34 Obtén el valor de las expresiones aritméticas siguientes.

- $(-3)^2 \times [(+5)^3 + (-12) \div (+3) - \sqrt{36} \times \sqrt{81}\,]$ 603
- $(-3) \times (+2)^4 - (+24) \times (-3) + \sqrt[3]{-216} - \sqrt{144}$ 6

35 Comprueba que la expresión con radicales siguiente es verdadera.

- $3 \times \sqrt{25} + 5 \times \sqrt{25} + 2 \times \sqrt{25} = 10 \times \sqrt{25}$

50 = 50

Competencias fundamentales

Competencia comunicativa

Es importante que los estudiantes comprendan los procedimientos para efectuar operaciones con números enteros y, al mismo tiempo, puedan desarrollar las habilidades comunicativas que les permitan expresar y aplicar dichos procedimientos sin dificultad. Haga que lean cuidadosamente las instrucciones y, después, verifique las respuestas obtenidas.

Uso de Algoritmos

En la vida cotidiana, con frecuencia se utilizan algoritmos para resolver problemas que involucran las operaciones básicas. Para resolver algunas de las actividades propuestas deben seguir reglas establecidas para tales fines.

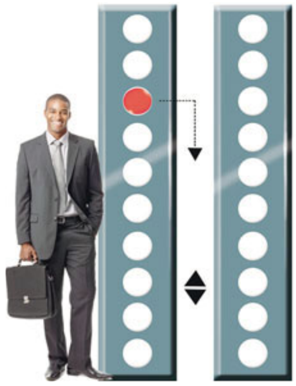
Sugerencias didácticas

- Las actividades propuestas en esta página están estrechamente vinculadas a los conceptos y procedimientos desarrollados a lo largo de la unidad.
- En el caso de los ejercicios que involucran raíces y potencias de números enteros, comentar a sus estudiantes que las propiedades de la potenciación también se cumplen con la radicación, siempre y cuando el radicando de las raíces sea positivo.
- Con relación a la actividad 35, comente al grupo que se trata de una suma de multiplicaciones con radicales semejantes, el procedimiento es sumar los coeficientes, dejar o repetir el misma radical y determinar la raíz y obtener el producto.

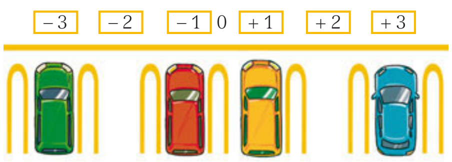
RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

36 Lee y, luego, haz lo que se te pide.

- Un visitante está en el piso 5 de un edificio de siete plantas. Determina en cuál de los niveles soterrados del edificio parqueó el visitante su vehículo, si para llegar hasta el mismo debe bajar 7 pisos.
  Parqueó en el nivel soterrado – 2.



- Escribe la solución del problema anterior como una diferencia de números enteros.
- Un carro está aparcado en el parqueo marcado con el número – 12. Su conductor, una vez terminada la diligencia que lo llevó al lugar, dejó libre el espacio que ocupaba. Más tarde regresa y aparca en el parqueo marcado con el número + 6. ¿A cuántos parqueos de distancia está la nueva posición de la posición original? *A 18 parqueos de distancia.*

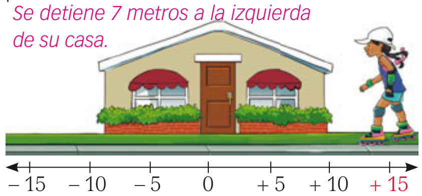


- Describe qué procedimiento utilizaste para responder de la manera en que lo hiciste.

37 Analiza y, luego, responde.

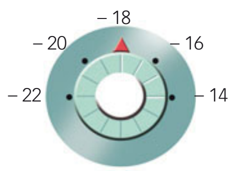
- Luis está parado a 3 metros a la derecha de un farol esperando el autobús. Si se mueve 12 metros hacia la izquierda, ¿en qué posición se colocará respecto al farol?
  A 9 metros a la izquierda del farol.

- Diana patina 15 metros hacia la derecha de su casa y se devuelve 25 metros hacia la izquierda, para después moverse 3 metros a la derecha y detenerse. ¿En qué posición con respecto a la puerta de su casa se detiene Diana?
  Se detiene 7 metros a la izquierda de su casa.



38 Responde las preguntas.

Las marcas del control de temperatura de un refrigerador se muestran en la figura. Funciona normalmente a –18 ºC.



- ¿Cuál es el cambio de la temperatura del refrigerador cuando se pasa de la posición 1 a la posición 4 del control? *6 ºC*
- ¿Y de la posición 5 a la posición 1? *– 18 ºC*

Competencias fundamentales

Resolución de problemas

Las habilidades y destrezas adquiridas por los estudiantes para resolver las operaciones con números enteros les permiten aplicar estas destrezas en la resolución de problemas cotidianos que involucran estas operaciones.

Los problemas desarrollados en esta página son un ejemplo de la utilidad de los números enteros y de sus aplicaciones en la vida cotidiana.

Criterios de evaluación

Competencia comunicativa:

- Adaptación de las representaciones gráficas, simbólicas y numéricas a la situación de comunicación.

Competencia de resolución de problemas:

- Claridad en la representación del problema, y de sus causas y sus elementos.
- Claridad en la comunicación de los resultados obtenidos.

Sugerencias didácticas

En el apartado *Resolución de problemas*, desarrollarán el concepto de *números enteros positivos y negativos* en sus aplicaciones en la vida cotidiana. Recuerde al grupo que las temperaturas por encima de cero, las distancias por encima del nivel del mar y los números a la derecha en la recta numérica son positivos. Por el contrario, las temperaturas bajo cero, las distancias por debajo del nivel del mar y los números a la izquierda del cero en la recta numérica son negativos.

Aprender a aprender

Motive a sus estudiantes para que inventen ejemplos de las aplicaciones cotidianas de las operaciones con números enteros. Pregunte al grupo:

- *¿Qué situaciones de la vida cotidiana no podrían medirse sin los números enteros?*

Discuta las diversas respuestas con el grupo.

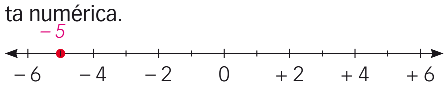
Indicadores de logro de la evaluación

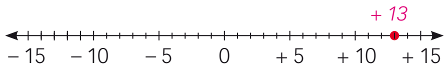
- **Identifica** números enteros en un conjunto de números dados. **Representa** números enteros en la recta numérica. **Ordena** números enteros en la recta numérica. **Compara** números enteros usando la recta numérica y los signos de relación. **Reconoce** y **escribe** las propiedades de los números enteros. **Determina** el valor absoluto de un número entero dado. **Efectúa** adiciones de números enteros. **Realiza** sustracciones de números enteros. **Efectúa** multiplicaciones de números enteros. **Realiza** divisiones de números enteros. **Calcula** potencias de números enteros. **Calcula** raíces cuadradas y cúbicas de números enteros. **Resuelve** problemas del contexto donde aplica operaciones de los números enteros. **Utiliza** recursos virtuales y electrónicos: computadora, softwares educativos, juegos interactivos y otros, en la búsqueda de información.

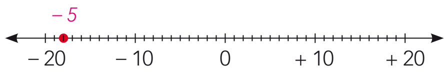
EVALUACIÓN

Modela y representa

39 Identifica el número representado en cada recta numérica.







Comunica

40 Escribe el signo < o > entre cada par de números enteros.

- $+5 \overset{<}{\ldots} +10$
- $-5 \overset{>}{\ldots} -9$
- $+5 \overset{>}{\ldots} -10$
- $0 \overset{>}{\ldots} -25$
- $-30 \overset{<}{\ldots} -20$
- $-16 \overset{<}{\ldots} +10$

Usa algoritmos

41 Obtén el valor de las siguientes expresiones.

- $5 \times |5-9| + 3 \times |3+5|$ *44*
- $6 \times |10+2| - 4 \times |8-14| + |6-15|$ *57*
- $|3-8| \times |5-9| - |6+5| \times |4-9|$ *– 35*
- $|8-(-5)-9| \times |(-15)+10-(-2)|$ *– 12*

42 Efectúa las operaciones siguientes.

- $10 + (-3) - (-12) + 18$ *37*
- $(-32) - [15 + (-8) - 12]$ *– 27*
- $(6 - 12 + 15) - (10 - (-15) - 20)$ *4*
- $36 - [(-6) + (-12) - 4 - (-6)]$ *52*

43 Efectúa las operaciones combinadas.

- $(-5) \times 8 \times (-2) \times (-4)$ *– 320*
- $3 \times [(-6) + 9 - (-3)]$ *18*
- $4 \times (-6) \times (-5) \div (-2)$ *– 60*
- $120 \div [(-3) \times 5 \times (-2)]$ *4*

44 Completa la tabla.

a	b	c	b + c	a x (b + c)
– 5	+ 2	– 4	*– 2*	*10*
+ 3	– 3	– 9	*– 12*	*– 36*
+ 2	+ 5	– 7	*– 2*	*– 4*
– 6	– 8	– 5	*– 13*	*78*

45 Calcula.

- $2^4 \times 2^3 \times 2$ *256*
- $(-3)^3 \times (-3)^2 \div (-3)^4$ *– 3*
- $(-5)^5 \times (-5)^3 \div (-5)^6$ *– 3*
- $[9^{10} \times 9^5 \times 9^3] \div 9^{15}$ *276*

46 Obtén las siguientes raíces cuadradas exactas o enteras. Escribe los residuos de las raíces enteras.

- $\sqrt{289}$ *17*
- $\sqrt{441}$ *21*
- $\sqrt{520}$ *22; 36*
- $\sqrt{680}$ *26; 4*
- $\sqrt{900}$ *30*
- $\sqrt{785}$ *28; 1*

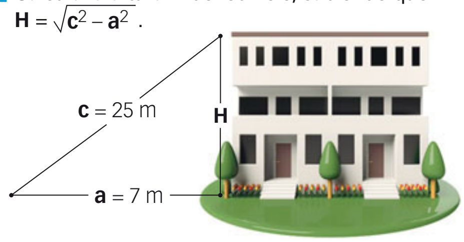
Conecta

47 Resuelve el problema.

Un biólogo marino se encuentra, inicialmente, a 12 metros por debajo de la superficie del océano. Desciende 8 metros y, de inmediato, asciende 6 metros, colocando allí una cámara para observar el comportamiento de los peces loro.

- ¿A cuántos metros por debajo de la superficie coloca el biólogo la cámara?
  A 14 metros de profundidad.

48 Calcula la altura **H** del edificio, sabiendo que: $\mathbf{H} = \sqrt{\mathbf{c}^2 - \mathbf{a}^2}$.



Sugerencias didácticas para la evaluación

- Es importante verificar, antes de dar inicio a las actividades de evaluación, que sus estudiantes dominan la regla de los signos y los procedimientos para comparar números enteros y para resolver las operaciones que los involucran.
- Si cuenta con tecnología como refuerzo, puede aplicar la prueba de la unidad que se encuentra en la plataforma didáctica Pleno.

Competencias específicas

- Modela y representa
- Comunica
- Usa algoritmos
- Conecta
- Resuelve problemas

49 **Estudio de caso**. Lean cuidadosamente y, luego, hagan lo que se les pide.

El frigorífico de una pescadería mantiene a los mariscos a una temperatura constante de – 10 ºC. Los conserva en buen estado hasta los 0 ºC. A temperaturas mayores que 0 ºC, los mariscos empiezan a descomponerse.

Imaginen que a las 8 de la mañana ocurre una interrupción del servicio de energía eléctrica y la temperatura del frigorífico comienza a aumentar a una velocidad de 2 ºC cada 15 minutos.

- Exploren procedimientos con los que puedan determinar a qué hora de la mañana, si el servicio de energía no es restablecido, los mariscos alcanzarán la temperatura en que empiecen a dañarse.
- Expongan el procedimiento descubierto en el aula y defiéndanlo de las posibles críticas que pudieran surgir.

A las 9:15 se alcanza la temperatura en que empieza a peligrar la provisión.

50 Responde las preguntas.

- ¿Cómo manejas el dinero que te dan tus padres para la merienda del colegio o tus gastos semanales?
- ¿Qué importancia tiene para ti administrar tus gastos?
- ¿Puedes poner ejemplos en los que se muestren actitudes responsables e irresponsables frente al gasto?

APRENDIZAJE AUTÓNOMO

51 Marca según tus logros. *Respuesta personal.*

	Iniciado	En proceso	Logrado
• Identifico, represento y ordeno números enteros.			
• Efectúo operaciones aritméticas con números enteros.			
• Determino valores absolutos de números enteros.			
• Resuelvo problemas en los que intervienen enteros.			

52 Reflexiona sobre tu aprendizaje. *Respuesta personal.*

- ¿Te sientes satisfecho con el aprendizaje logrado en esta unidad?
- ¿En cuáles contenidos de los estudiados te gustaría profundizar?

Sugerencias didácticas para la evaluación

- Como medida de control, formule al grupo preguntas sobre los conceptos aprendidos en la unidad, como por ejemplo:
  — *¿Qué números forman parte del conjunto de los enteros?*
  — *¿Cuál es el signo del resultado de la suma o resta con cantidades con signos iguales?*
  — *¿Y cuál es el resultado cuando las cantidades tienen signos distintos?*

Estudio de caso

- En la actividad 49, deberán leer cuidadosamente el problema propuesto y las instrucciones, después, hacer lo que se les indica. En este caso, conocida la temperatura en la que se conservan los mariscos, ante la ocurrencia de un apagón, descubrirán un procedimientos para determinar a qué temperatura los mariscos empezarán a dañarse. Expondrán en el aula el procedimiento descubierto y lo defenderán de las posibles críticas.

Actitudes y valores

Convivencia

En la sección destinada a *Actitudes y valores*, actividad 50, responderán cómo manejan el dinero que les dan sus padres para la merienda del colegio o los gastos semanales. Dirán qué importancia tiene para ellos administrar sus gastos. Expresarán si pueden poner ejemplos en los que se muestren actitudes responsables e irresponsables frente al gasto.

Aprendizaje autónomo

- En la actividad 51 evaluarán por ellos mismos si los conceptos y procedimientos que trabajaron en la unidad se encuentran en estado de iniciación, en proceso o logrados.En la actividad 52, reflexionarán sobre su aprendizajes.

Aprender a aprender

Haga que sus estudiantes apliquen los conceptos aprendidos en la unidad en situaciones de la cotidianidad, por ejemplo, preguntar:

- *¿Qué números se utilizan para indicar las temperaturas bajo cero?*
- *¿Podrían dar otros usos cotidianos de los números enteros?*

2 Los números racionales. Operaciones

COMPETENCIAS	CONTENIDOS

COMPETENCIAS

Específicas

- **Razona y argumenta**: **Identifica** los números racionales. **Crea** y **expresa** argumentos matemáticos sobre las propiedades de los números racionales.
- **Comunica**: **Escribe** y **modela** un número racional a través de diferentes expresiones.
- **Usa algoritmo**: **Sigue** las reglas que le permiten obtener un resultado al operar con números racionales.
- **Conecta**: **Aplica** las operaciones con números racionales para resolver problemas de situaciones del contexto, de otras ciencias y de la propia Matemática.
- **Resuelve problemas**: **Resuelve** problemas de situaciones cotidianas que involucren diferentes operaciones con números racionales.
- **Utiliza herramientas tecnológicas**: **Utiliza** soportes tecnológicos como la Internet, la calculadora científica y otros dispositivos.

Fundamentales

Resolución de problemas: **Plantea** y **resuelve** problemas sobre situaciones del entorno que involucran operaciones con números racionales.

Científica y tecnológica: **Reconoce** la importancia de la investigación científica, el cuidado y el rigor.

CONTENIDOS

Conceptos

- Los números racionales.
- Los racionales en la recta numérica.
- Relaciones de orden entre los racionales.
- Adición y sustracción de racionales.
- Multiplicación y división de racionales.
- Potenciación de racionales.
- Radicación de racionales.

Procedimientos

- Lectura, escritura y representación de los números racionales.
- Localización de los números racionales en la recta numérica.
- Comparación de los números racionales utilizando los símbolos $<$, $=$ y $>$.
- Obtención del resultado de las operaciones de adición, sustracción, multiplicación, división, potenciación y radicación utilizando números racionales.

Actitudes y valores

- Valoración del espíritu de investigación.
- Apreciación del cuidado y el rigor.

Tiempo estimado de trabajo: 2 semanas

INDICADORES DE LOGRO

- **Identifica** números racionales en un conjunto de números dados.
- **Representa** y **ordena** números racionales en la recta numérica.
- **Compara** los números racionales utilizando los símbolos <, = y >.
- **Obtiene** la fracción generatriz de un número decimal.
- **Efectúa** adiciones y sustracciones de números racionales.
- **Efectúa** multiplicaciones y divisiones de números racionales.
- **Calcula** correctamente potencias de números racionales.
- **Escribe** números en notación científica.
- **Calcula** raíces cuadradas y **efectúa** operaciones con radicales.
- **Resuelve** problemas del contexto donde aplica operaciones con los números racionales.
- **Utiliza** recursos virtuales y electrónicos: computadora, softwares educativos, juegos interactivos y otros, en la búsqueda de información.

Valor transversal: Ciencia y tecnología

Recursos digitales

Plataforma digital

CD

BIBLIOTECA DEL DOCENTE

- DOCUMENTOS PARA LA PLANIFICACIÓN
- GUÍA DE RECURSOS TIC

CUADERNO DE ACTIVIDADES

UNIDAD 2	Los números racionales. Operaciones.

RECURSOS DE REFUERZO Y AMPLIACIÓN

LibroMedia

DOCUMENTOS

PÁGINA 27	Operaciones variadas con números racionales

ACTIVIDADES INTERACTIVAS

PÁGINA 32	Generador de restas
PÁGINA 34	Generador de multiplicaciones

RECURSOS MULTIMEDIA

PÁGINA 36	Presentación: Racionales
PÁGINA 38	Presentación: Notación científica

CD DE RECURSOS DIGITALES: PLAN REGULAR

Pleno — PRUEBA DE EVALUACIÓN FORMATIVA DE LA UNIDAD

Estrategias pedagógicas

- Recuperación de experiencias previas.
- Trabajo en equipo.
- Aprendizaje basado en problemas (ABP).

Unidad 2

Competencias de la unidad

- **Lee** y **comenta** las informaciones expuestas en el apartado *Punto de partida*.
- **Responde** preguntas relacionadas con las informaciones expuestas en el apartado *Punto de partida*.
- **Recupera** experiencias vividas mediante la observación de las imágenes de la ilustración.
- **Responde** preguntas vinculadas a sus experiencias previas sobre los conceptos que desarrollarán en la unidad en el apartado *Recuperación de conocimientos*.
- **Responde** preguntas vinculadas a las aplicaciones cotidianas de los conceptos que desarrollarán en la unidad en el apartado *Observación*.

Apertura de la unidad

Dentro de los objetivos principales de la apertura de esta unidad se encuentran el plantear una situación de aprendizaje, una problemática o un texto que sirve para contextualizar el tema de la unidad. Todo esto con la finalidad de motivar y despertar la curiosidad de los estudiantes.

A partir de la situación o texto planteado y las imágenes de la ilustración se conecta al estudiante con el tema a tratar, a la vez que se vincula la realidad o cotidianidad con los temas que se van a desarrollar.

Todos los elementos que conforman la portada promueven la recuperación de experiencias o conocimientos previos y la motivación o el interés por los conocimientos que adquirirán en la unidad.

2 Los números racionales. Operaciones

Punto de partida

En una clase de Matemática los estudiantes están trabajando el tema de las mediciones. Norma pidió al profesor que midiera su estatura con una regla graduada en metros. El resultado de esa medición fue de 1 metro y algo más de 40 centímetros.

A Norma la medida no le pareció precisa y preguntó al profesor: *¿Qué debo entender por este "algo más de 40 centímetros"?* El profesor contestó: *Norma, esta expresión indica que la regla utilizada no permite una precisión por encima de las décimas de metro. Tu estatura es de 1 metro y entre 40 y 50 centímetros.*

Norma y sus compañeros comprendieron que los números enteros no siempre nos sirven para expresar los resultados de una medida.

- ¿Te has encontrado, al medir, con situaciones como la descrita arriba?
- ¿Cómo has reaccionado?
- ¿Cuándo el resultado de una medida merece tu confianza?

Conceptos y procedimientos

- Los números racionales.
- Los racionales en la recta numérica.
- Relaciones de orden entre los racionales.
- Adición y sustracción de racionales.
- Multiplicación y división de racionales.
- Potenciación de racionales.
- Notación científica.
- Radicación de racionales.

Actitudes y valores

- Valorar el espíritu de investigación.
- Apreciar el cuidado y el rigor.

RECUPERACIÓN DE CONOCIMIENTOS

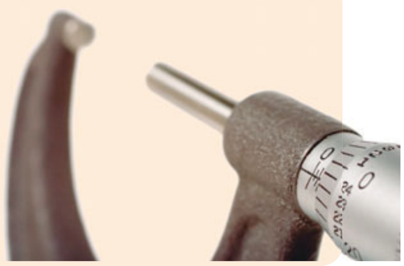
- ¿En cuales situaciones de la vida cotidiana has realizado operaciones de medida?
- ¿Qué magnitudes has medido en esas situaciones?
- ¿Con cuáles instrumentos de medición realizaste las medidas?
- ¿Qué unidades usaste para expresar tus mediciones?
- ¿Cómo se ponen de acuerdo dos personas que utilizan distintas unidades para medir una misma magnitud?

Trabajo colectivo de apertura

- **Punto de partida:** Guíe a sus estudiantes a leer y comentar en el grupo las informaciones expuestas en el apartado *Punto de partida* relacionadas con la importancia de la precisión en las medidas. Motíveles para que respondan las preguntas que aparecen al final del texto y para que justifiquen sus respuestas.
- **Recuperación de conocimientos:** Las preguntas de este apartado permiten hacer un diagnóstico de los conocimientos y las experiencias previas vinculados a situaciones de la vida cotidiana en las que ha realizado medidas.
- **Observación:** En este apartado se plantean preguntas relacionadas con la operación de medir y con un patrón como unidad de medida.

OBSERVACIÓN

- ¿En qué consiste la operación de medir una magnitud?
- ¿Qué entiendes por unidad o patrón de medida?
- ¿Qué importancia tiene definir o establecer con claridad un patrón de medida?
- **Menciona** tres patrones o unidades de medida y **di** qué magnitudes se miden con los mismos.
- ¿Por qué las mediciones son necesarias en cualquier investigación?



Actividad de motivación

Pida a sus estudiantes que lean en la sección: *Contenido*, los temas que trabajarán en la unidad y las actitudes y valores que estarán presentes en el desarrollo de la misma. Luego, para que interioricen la importancia de los números racionales en la vida cotidiana, formúleles preguntas como las siguientes:

- ¿Qué utilidad tienen las fracciones y los números decimales en la vida cotidiana?
- ¿Qué dificultades enfrentaríamos si no existieran estas formas numéricas?
- ¿Cómo se representan las partes de un entero en forma aritmética?

Documento

Fracciones

El recurso es un documento que contiene una agrupación de ejercicios de recuperación de experiencias previas que involucran operaciones con fracciones.

Esquema conceptual de la unidad

Los números racionales

forman el conjunto de los

Números enteros y las fracciones — *se sujetan a* — Relaciónes de orden

y con ellos se realizan operaciones de

- Adición y sustracción
- Multiplicación y división
- Potenciación
- Radicación

Actitudes y valores

Ciencia y tecnología

Aprovechar la situación planteada en el apartado *Punto de partida* y en las imágenes de la ilustración para conversar con sus estudiantes sobre la importancia de la exactitud en diversas situaciones de la vida diaria y del porqué, en estos casos, el uso de los números racionales es inminente.

Indicadores de logro

- **Identifica** números racionales en un conjunto de números dados.
- **Representa** y **ordena** números racionales en la recta numérica.
- **Compara** los números racionales utilizando los símbolos <, = y >.

Competencia comunicativa

Converse con el grupo acerca de que cualquier conjunto de números racionales puede ser organizado de menor a mayor, y viceversa.

Muéstreles, a manera de repaso, el procedimiento de la multiplicación en cruz para establecer relaciones de orden entre números racionales.

Otras sugerencias

Escriba en la pizarra expresiones numéricas similares a estas:

- 5/8.
- 27/9.
- 8/3.
- 12/4.

Después, motive a sus estudiantes para que escriban si representan enteros o fracciones y, luego, pregúnteles:

- *¿A qué grupo pertenecen los números enteros?*
- *¿Todos los números enteros son racionales?*
- *¿Cómo se definen los números racionales?*
- *¿Cómo se forma un número racional?*
- *¿Puede un número racional tener signo positivo o negativo?*

Discuta las diversas respuestas en el grupo y motive la participación de todos los estudiantes.

LOS NÚMEROS RACIONALES. ORDEN

RECUPERACIÓN

¿Cuáles de éstas fracciones son números enteros?

$\frac{5}{8}$ $\frac{7}{5}$ $\frac{12}{3}$

$\frac{15}{9}$ $\frac{16}{4}$ $\frac{24}{25}$

MÁS INFORMACIÓN

Clasificación de los números decimales

Un número decimal puede ser:

- Exacto, si tiene un número finito de cifras decimales.

Ejemplo:

$\frac{5}{8} = 0.625$. Tiene tres cifras decimales.

- Periódico puro, si tiene una o más cifras decimales que se repiten sin término. Estas cifras forman el período del decimal.

Ejemplo:

$\frac{12}{99} = 0.1212\ldots$.

Su periodo es de dos cifras que son las que se repiten.

- Periódico mixto, si tiene una parte decimal exacta y otra periódica. La parte exacta forma el anteperíodo del decimal.

Ejemplo:

$\frac{37}{30} = 1.2333\ldots$. Tiene una parte decimal exacta, 2, y una cifra periódica, 3. La cifra 2 es el anteperíodo.

1 Los números racionales

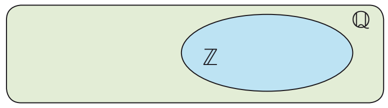
El resultado de dividir un número entero por otro entero, distinto de cero, es un número racional. Los números racionales pueden ser positivos o negativos.

EJEMPLOS RESUELTOS:

- $(-6) \div 8 = -\frac{6}{8}$
- $15 \div (-7) = -\frac{15}{7}$
- $25 \div 5 = 5$
- $(-14) \div (-7) = 2$
- $0 \div 9 = 0$
- $3 \div 10 = \frac{3}{10}$

Los números racionales pueden ser enteros o fracciones.

El conjunto de los números racionales se representa con la letra $\mathbb{Q}$. Este conjunto incluye al conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$: todo número entero es un número racional.



2 Fracciones y números decimales

Cualquier fracción es equivalente a un número entero o a un número decimal (positivo o negativo).

EJEMPLOS RESUELTOS:

- $(-6) \div 8 = -0.75$
- $3 \div 7 = 0.428571\ldots$
- $8 \div 9 = 0.8888\ldots$
- $33 \div (-90) = -0.3666\ldots$

Para obtener el número decimal equivalente a una fracción, se divide el numerador de la fracción por su denominador. A los residuos obtenidos se agrega un cero para continuar la división hasta obtener un residuo 0. De no conseguirse el residuo 0, las cifras decimales del cociente se prolongan indefinidamente.

EJEMPLO RESUELTO:

- $\frac{7}{5} = 7 \div 5$ ▸ 7 ⌊5 ▸ $7 \div 5 = 1.4$

  -5 1.4

  20

  -20

  0

28

Sugerencias didácticas

- **Inicio:** Oriente a sus estudiantes para que lean y respondan en el aula la pregunta vinculada a la recuperación de experiencias previas propuesta en el apartado *Recuperación*, relacionada con los números enteros. Motive al grupo a justificar sus respuestas.
- **Desarrollo:** Pida a sus estudiantes que lean cuidadosamente el contenido de la doble página y que observen las ilustraciones. Formúleles preguntas vinculadas al contenido como, por ejemplo: *¿Cómo se forman los números racionales? ¿Qué conjunto numérico pertenece a los números racionales?* Discuta con el grupo las informaciones del apartado *Más información*, que trata sobre la clasificación de los números decimales. Haga que reproduzcan los ejemplos en sus cuadernos y construyan otros más.

3 Representación de números racionales en la recta numérica

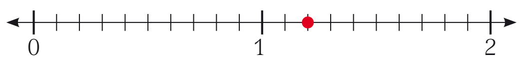
Los números racionales, como los naturales y los enteros, se representan mediante puntos sobre una recta numérica. A cada número racional **x** le corresponde un punto de la recta.

Para representar un número racional de denominador **n**, se dividen las unidades de la recta numérica en **n** partes iguales y se cuentan tantas de estas partes como indique el numerador del número racional.

EJEMPLO:

- Representar el número racional $\frac{12}{10} = 1.2$

  Se dividen las unidades de la recta en **n** = 10 partes iguales, se cuentan, desde el 0, 12 de estas partes y allí se marca un punto •, que representará al número racional $\frac{12}{10}$.



4 Relaciones de orden entre los números racionales

El conjunto de los números racionales está ordenado. Dados dos números racionales, **x** e **y**, siempre es posible determinar si: $x < y$, $x = y$ o $x > y$.

Sobre una recta numérica, el número ubicado a la derecha del otro es mayor que ese otro.

MÁS INFORMACIÓN

Valor absoluto de un número racional

Si **x** es un número racional, su valor absoluto |**x**| es un número positivo que representa su distancia al cero.

RECUERDA

Multiplicación en cruz

Para comparar dos números racionales, $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$, se emplea la multiplicación en cruz:

- Si $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, entonces: **a** x **d** < **b** x **c**.
- Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, entonces: **a** x **d** = **b** x **c**.
- Si $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$, entonces: **a** x **d** > **b** x **c**.

EJEMPLOS:

- Si $\frac{5}{9} > \frac{1}{2}$: 5 x 2 > 9 x 1.
- Si $\frac{3}{4} < \frac{4}{5}$: 3 x 5 < 4 x 4.

ACTIVIDADES

1 Escribe cada número racional en forma de fracción como un decimal. Luego, clasifícalos.

- $-\frac{3}{4}$ *– 0.75* *Exacto*
- $\frac{5}{16}$ *0.3125* *Exacto*
- $\frac{8}{3}$ *2.6666…* *Periódico puro*
- $-\frac{1}{12}$ *– 0.0833…* *Periódico mixto*
- $-\frac{16}{25}$ *0.64* *Exacto*
- $-\frac{15}{99}$ *0.1515 …* *Periódico puro*

2 Representa en tu cuaderno los números racionales siguientes.

- $\frac{5}{4}$
- $\frac{3}{8}$
- $-\frac{6}{10}$
- $\frac{25}{5}$
- – 6.80

3 Ordena de menor a mayor los siguientes números racionales positivos.

- $\frac{48}{24}$
- $\frac{13}{10}$
- 2.8
- $\frac{29}{50}$
- $\frac{7}{25}$
- $\frac{3}{5}$
- 1.08

$\frac{7}{25} < \frac{29}{50} < \frac{3}{5} < 1.08 < \frac{3}{10} < \frac{48}{24} < 2.8$

Atención a la diversidad

Actividades de refuerzo: Pida a sus estudiantes que escriban el signo <, = o > entre los racionales dados.

- 2/4 _______ 3/5. Resp. <
- 7/8 _______ 2/3. Resp. >
- 2/4 _______ 6/12. Resp. =
- 6/9 _______ 2/5. Resp. >
- 3/4 _______ 2/3. Resp. <
- 8/16 _______ 2/4. Resp. =
- 6/12 _______ 2/5. Resp. >
- 2/7 _______ 1/4. Resp. >

Ficha 8.

Actividades de ampliación: Pida a sus estudiantes que encierren las expresiones que representan al número racional 3/5.

- – 6/– 10
- 15/25
- 30/50
- 2/10
- – 18/– 30
- – 9/– 15
- 6/– 10
- 1/5
- 12/20
- – 3/15
- 6/30
- – 15/25

Resp.:
– 6/– 10 ; 15/25 ; 30/50 ;
– 18/– 30 ; – 9/– 15 ; 12/20

- **Desarrollo:** Pida a sus estudiantes que comenten las informaciones del apartado *Más información*, acerca del valor absoluto de un número racional y, luego, oriénteles para que construyan ejemplos y los desarrollen. Pregúnteles: *¿Puede representarse cualquier número racional en la recta numérica?* Discuta las diversas respuestas en el grupo justificando siempre sus respuestas. Pídales que lean y reproduzcan el contenido del apartado *Recuerda*, que trata sobre la comparación de los racionales mediante el método de multiplicar en cruz. Diseñe otros ejemplos similares, invíteles a la pizarra.
- **Cierre:** Motive a sus estudiantes a realizar los ejercicios del apartado *Actividades*. En la actividad 1, escribirán cada número racional dado en forma de fracción, como un número decimal, luego, los clasificarán. En la actividad 2, representarán en sus cuadernos los números racionales dados. En la actividad 3, ordenarán de menor a mayor los números racionales positivos indicados.

Indicadores de logro

- **Obtiene** la fracción generatriz de un número decimal.

Competencia comunicativa

Cuando queremos obtener la fracción generatriz de un número decimal, lo más importante es verificar el tipo de decimal que tenemos: exacto, puro o mixto y, luego, aplicar el procedimiento correspondiente para pasarlo a fracción.

Otras actividades

Pida a sus estudiantes que escriban la fracción generatriz de cada número decimal.

- 2.45 Resp.: 245/100.
- 0.0036 Resp.: 36/10 000.
- 53.4 Resp.: 534/10.
- 1.621 Resp.: 1 621/1 000.
- 0.092 Resp.: 92/1 000.
- 84.072 Resp.: 84 072/1 000.
- 52.31 Resp.: 5 231/100.
- 1325.4 Resp.: 13 254/10.
- 0.9 Resp.: 9/10.

RECUPERACIÓN

Escribe, sin efectuar la división, el número decimal equivalente a cada fracción.

$\frac{1}{4}$ $\frac{2}{5}$ $\frac{3}{6}$

$\frac{5}{10}$ $\frac{16}{10}$ $\frac{45}{100}$

Un número decimal periódico, puro o mixto, puede escribirse con una rayita sobre las cifras que forman el período.

$4.323232\ldots = 4.\overline{32}$

1 Fracción generatriz de un número decimal

Al dividir el numerador de una fracción por su denominador se obtiene un número decimal. La fracción de la que procede un número decimal es su fracción generatriz.

Así, la fracción generatriz de 0.75 es $\frac{3}{4}$ y la de 2.35 es $\frac{47}{20}$.

2 Generatriz de un decimal exacto

Para determinar la fracción generatriz de un número decimal exacto **primero**, se escribe el número sin punto decimal y **luego**, se construye una fracción de numerador igual al número obtenido en el paso anterior y de cuyo denominador sea la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales tenga el número decimal.

EJEMPLO RESUELTO:

- Obtener la fracción generatriz de 3.15

  Se escribe el número sin punto decimal: 315. Este número, 315, será el numerador de la fracción generatriz. El denominador de la fracción generatriz es 100, porque 3.15 tiene dos cifras decimales.

  La fracción generatriz buscada es: $\frac{315}{100}$.

3 Generatriz de un decimal periódico puro

Para obtener la fracción generatriz de un número decimal periódico puro, **primero**, se corre el punto decimal hacia la derecha, tantas cifras como indique el período, y se toma la parte entera del número resultante; **luego**, se resta de la parte entera obtenida en el paso anterior, la parte entera del número decimal original y, **finalmente**, se construye una fracción de numerador igual a la diferencia obtenida en el segundo paso y denominador formado por tantos nueves (9) como cifras periódicas tenga el decimal.

EJEMPLO RESUELTO:

- Obtener la fracción generatriz de 1.626262…

  1.626262 … ▶ 1.62.6262 …

  Al número 1.62 se resta 1: 162 – 1 = 161.

  Como hay dos cifras periódicas en el decimal original, la generatriz buscada es: $\frac{161}{99}$.

Sugerencias didácticas

- **Inicio:** Oriente a sus estudiantes para que lean y respondan en el aula la actividad vinculada a recuperación de experiencias previas propuesta en el apartado *Recuperación*, en la que obtendrán el decimal que corresponde a cada fracción. Motive al grupo a justificar sus respuestas.
- **Desarrollo:** Pida a sus estudiantes que lean cuidadosamente el contenido de la doble página y que observen las ilustraciones. Formúleles preguntas vinculadas al contenido, como por ejemplo: *¿Cómo se obtiene la generatriz de un decimal exacto? ¿Cómo se obtiene la generatriz de un decimal periódico puro?* Discuta con el grupo las informaciones que ofrece el joven de la página 30, sobre los decimales periódicos.

4 Generatriz de un decimal periódico mixto

Para obtener la fracción generatriz de un número decimal periódico mixto, **primero**, se forma un número entero con la parte entera del decimal, si la hubiere, el anteperíodo y las cifras del período; **luego**, se obtiene la diferencia del entero conseguida en el primer paso y el entero formado por la parte entera del número original y el anteperíodo; **después**, se halla la diferencia de la unidad, seguida de tantos ceros como cifras tengan el anteperíodo y el período juntos y la unidad seguida de tantos ceros como cifras haya en el anteperíodo y, **finalmente**, se forma la fracción generatriz cuyo numerador es la diferencia obtenida en el segundo paso y cuyo denominador es la diferencia obtenida en el tercer paso.

EJEMPLO RESUELTO:

- Obtener la fracción generatriz de 3.5262626 …

3.5262626 … ⟶ 3 526. 2626 …

Al número 3 526 se resta 35: 3 526 – 35 = 3 491.

Como el anteperíodo y el período tienen, juntos, tres cifras y el anteperíodo solo tiene una cifra la generatriz buscada es: $\frac{3\,491}{(1\,000-10)} = \frac{3\,491}{990}$.

5 Números irracionales

Un número irracional no es ni entero, ni decimal exacto o periódico, por tanto, no puede expresarse como un cociente de números enteros.

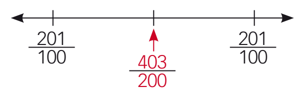
$\sqrt{2} = 1.414213562\ldots$ y $\pi = 3.141592654\ldots$ son irracionales.

MÁS INFORMACIÓN

Densidad del conjunto de los números racionales

El conjunto $\mathbb{Q}$ es denso, porque entre dos números racionales, no importa cuán cercanos estén uno del otro, hay siempre otro número racional.

El racional $\frac{403}{200}$ está entre los números racionales $\frac{201}{100}$ y $\frac{202}{200}$.



- Comprueba que $\frac{403}{200}$ está comprendido entre los números $\frac{201}{100}$ y $\frac{202}{200}$.

ACTIVIDADES

4 Identifica y, luego, encierra, si las hay, las cifras periódicas de cada número decimal.

- 1.2222 … • 0.050505 … • 8.327… • 4.3122122 … • 1.03111 … • 0.5082111 …

5 Obtén la fracción generatriz de los siguientes números decimales.

- 0.75 $\frac{3}{4}$ • 2.125 $\frac{17}{8}$ • 1.666 … $\frac{5}{3}$ • 1.7222… $\frac{31}{18}$ • 2.5050 … $\frac{248}{99}$ • 0.02525 … $\frac{5}{198}$
- 4.7025 $\frac{1\,881}{400}$ • 3.82525 $\frac{3\,787}{990}$ • 5. 106060 $\frac{337}{66}$ • 0.0011… $\frac{1}{900}$ • 2.7474 … $\frac{272}{99}$ • 0.02525 $\frac{101}{4\,000}$

6 Escribe …

- … 5 números racionales entre $\frac{31}{50}$ y $\frac{5}{8}$. *Respuestas libres.*
- … 8 números racionales entre 0.25 y 0.26.

Atención a la diversidad

Actividades de refuerzo: Pida al grupo que obtengan el decimal correspondiente a cada número racional y, luego, los clasifiquen en exacto, puro o mixto.

- 3/5 Resp.: 0.6 → Exacto.
- 13/99 Resp.: 0.1313 → Puro.
- 3/4 Resp.: 0.75 → Exacto.
- 74/60 Resp.: 1.2333 → Mixto.
- 15/99 Resp.: 0.1515 → Puro.
- 8/12 Resp.: 0.666 → Exacto.

Pida a sus estudiantes que determinen la fracción generatriz de los siguientes decimales.

- 1.46 Resp.: 145/99.
- 0.38 Resp.: 38/99.
- 3.6060 Resp.: 257/99.
- 2.349 Resp.: 2 326/990.
- 3.48 Resp.: 345/99.

Ficha 9.

- **Desarrollo:** Pida a sus estudiantes que comenten el contenido del apartado *Más información* acerca de la densidad del conjunto de los números racionales. Desarrolle este ejemplo y algunos ejemplos más en la pizarra y haga que desarrollen sus propios ejemplos en sus cuadernos. Pregunte a sus estudiantes: *¿Cómo se obtiene la generatriz de un decimal periódico mixto?* Discuta las diversas respuestas en el grupo justificando siempre sus respuestas.
- **Cierre:** Motive a sus estudiantes a realizar los ejercicios del apartado *Actividades*. En la actividad 4, identificarán y, luego, encerrarán, si las hay, las cifras periódicas de cada número decimal. En la actividad 5, obtendrán la fracción generatriz de los números decimales dados. En la actividad 6, escribirán los números racionales que se les indican entre los dados.

Aprender a aprender

Pregunte a sus estudiantes:

- *¿Tuvieron alguna dificultad al obtener la generatriz de los distintos decimales que vieron en esta oportunidad?*
- *¿Podrían describir el procedimiento para obtener la generatriz de un decimal periódico puro?*

Indicadores de logro

- **Efectúa** adiciones y sustracciones de números racionales.

Actividad interactiva

Generador de restas

Actividad interactiva en la que los estudiantes, pulsando los botones correspondientes, podrán crear y resolver sustracciones con las cifras enteras y decimales indicadas.

Otras sugerencias

A manera de repaso, pregunte a sus estudiantes:

- *¿Cuál es el procedimiento para sumar y restar fracciones con denominadores iguales?*
- *¿Qué ocurre cuando son diferentes los denominadores?*
- *¿Cuál es el procedimiento para resolver las operaciones en estos casos?*

Resuelva en la pizarra algunos ejemplos de suma y resta de números racionales en forma de fracción, haga que pasen a la pizarra y, después, motíveles a realizar los ejercicios en sus cuadernos.

RECUPERACIÓN

Efectúa las operaciones.

$\frac{4}{9} + \frac{12}{9} + \frac{2}{9}$

$\frac{8}{5} - \frac{15}{12}$

$\frac{3}{4} + \frac{5}{8} + \frac{2}{5}$

12.658 + 9.953

0.658 – 0.2635

RECUERDA

Reducción a un denominador común

El denominador común de dos o más fracciones es el mínimo común múltiplo de los denominadores.

Ejemplos:

- Reducir las fracciones $\frac{5}{8}$ y $\frac{3}{5}$ a un denominador común.

m.c.m. (8,5) = 40.

Entonces:

$40 \div 8 = 5$

$$\frac{5}{8} = \frac{5 \times 5}{8 \times 5} = \frac{25}{40}.$$

$40 \div 5 = 8$

$$\frac{3}{5} = \frac{3 \times 8}{5 \times 8} = \frac{24}{40}.$$

Las fracciones reducidas a un denominador común son $\frac{25}{40}$ y $\frac{24}{40}$.

1 Adición y sustracción de números racionales

■ Números racionales en forma de fracciones:

Para efectuar operaciones de adición o sustracción de números racionales, expresados en forma de fracciones con un denominador común, se realizan las operaciones con sus numeradores.

EJEMPLOS RESUELTOS:

- Efectuar: $\frac{5}{8} + \frac{9}{8}$.

Como indica el procedimiento, se suman los numeradores de las fracciones:

$$\frac{5}{8} + \frac{9}{8} = \frac{5+9}{8} = \frac{14}{8}.$$

La suma de las fracciones del ejemplo es: $\frac{14}{8} = \frac{7}{4}$.

- Efectuar: $\frac{7}{4} - \frac{3}{5}$.

En este caso, como los denominadores son distintos se busca un denominador común, que es el mínimo común múltiplo de los denominadores, 20:

$$\frac{7}{4} - \frac{3}{5} = \frac{35}{20} - \frac{12}{20} = \frac{35-12}{20} = \frac{23}{20}.$$

La diferencia de las fracciones es: $\frac{23}{20}$.

■ Números racionales en forma decimal.

Para efectuar operaciones de adición o sustracción de racionales en forma decimal **primero**, se colocan verticalmente los números de manera que sus puntos decimales queden alineados verticalmente y, **luego**, se realizan las operaciones de derecha a izquierda con las cifras correspondientes a cada orden de numeración.

EJEMPLO RESUELTO:

- Obtener la diferencia: 12.67 – 8.325:

$$12.67 - 8.325 \quad \begin{array}{r} 12.670 \\ -\ \ 8.325 \\ \hline 4.345 \end{array}$$

La diferencia buscada es: 4.345.

Sugerencias didácticas

- **Inicio:** Oriente a sus estudiantes para que resuelvan en sus cuadernos los ejercicios de recuperación de experiencias previas propuestos en el apartado *Recuperación*, relacionadas con sumas y restas de fracciones y números decimales.
- **Desarrollo:** Haga que lean cuidadosamente el contenido de la doble página y que observen las ilustraciones. Formúleles preguntas vinculadas al contenido como, por ejemplo: *¿Cuáles son los pasos para efectuar sumas y restas de números racionales en forma de fracciones con denominadores iguales?* Discuta con el grupo las informaciones del apartado *Recuerda*, relacionadas con la reducción de números racionales en forma de fracciones con denominadores distintos a un mismo denominador.

2 Suma algebraica de números racionales

Una suma algebraica es una expresión aritmética que reúne operaciones de adición y sustracción.

Las expresiones siguientes son sumas algebraicas:

- $9 + (-5) - 12 - (-8) + 14$
- $\frac{9}{4} - \frac{5}{3} - \left(-\frac{6}{15}\right) + \left(-\frac{7}{12}\right).$

Al eliminar los paréntesis, las expresiones que son:

- $9 - 5 - 12 + 8 + 14$
- $\frac{9}{4} - \frac{5}{3} + \frac{6}{15} - \frac{7}{12}.$

Eliminados los paréntesis, se realizan las operaciones tomando en cuenta la regla de los signos de la adición.

EJEMPLO RESUELTO:

- Efectuar: $\frac{15}{48} - \left(-\frac{7}{12}\right) + \left(-\frac{1}{24}\right) - \frac{5}{3}.$

$$\frac{15}{48} - \left(-\frac{7}{12}\right) + \left(-\frac{1}{24}\right) - \frac{5}{3} =$$

$$\frac{15}{48} + \frac{28}{48} - \frac{2}{48} - \frac{80}{48} = -\frac{39}{48}.$$

El resultado de las operaciones es: $-\frac{39}{48}.$

RECUERDA

Representantes de un número racional

Las fracciones equivalentes expresan un mismo número racional. Son representantes del número racional.

$\frac{5}{8}, \frac{10}{16}, \frac{20}{32}$ y $\frac{40}{64}$, son representantes del mismo número racional.

3 Propiedades de la adición y la sustracción de números racionales

- La adición y la sustracción de números racionales, **x** e **y**, cumplen con las mismas propiedades de la adición y la sustracción de los números enteros.

Propiedades de la adición:

- $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}.$
- $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z}).$
- $\mathbf{x} + 0 = 0 + \mathbf{x} = \mathbf{x}.$
- $\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = (-\mathbf{x}) + \mathbf{x} = 0.$

Propiedades de la sustracción:

- $\mathbf{x} - \mathbf{y} \neq \mathbf{y} - \mathbf{x}$
- $(\mathbf{x} - \mathbf{y}) - \mathbf{z} \neq \mathbf{x} - (\mathbf{y} - \mathbf{z})$
- $\mathbf{x} - 0 = \mathbf{x}.$

ACTIVIDADES

7 Efectúa las operaciones siguientes.

- $\frac{1}{6}\left(-\frac{3}{10}\right) - \left(-\frac{3}{10}\right)$ $\frac{67}{60}$
- $\left(-\frac{9}{8}\right) + \frac{5}{12} + \left(-\frac{4}{3}\right)$ $-\frac{49}{24}$
- $\frac{7}{18} - \left(-\frac{2}{5}\right) - \frac{4}{21} + \left(-\frac{2}{5}\right)$ $\frac{107}{630}$
- $-\frac{8}{9} - \left(-\frac{5}{21}\right) + \left(-\frac{4}{18}\right)$ $-\frac{110}{126}$
- $35.786 - (-22.09) - 9.325$ 48.551
- $\left(-\frac{5}{4}\right) + (-0.725) + \left(-\frac{1}{8}\right)$ -2.1

8 Comprueba que: $\left[\left(-\frac{2}{5}\right) + \left(-\frac{5}{4}\right)\right] + \frac{4}{9} = \left(-\frac{2}{5}\right) + \left[\left(-\frac{5}{4}\right) + \frac{4}{9}\right].$ $-\frac{217}{180} = -\frac{217}{180}$

Actividad grupal

Forme a sus estudiantes en grupos de 3 o 4 integrantes. Luego, escriba, a un lado de la pizarra, varias operaciones de suma y resta de números racionales en forma de fracciones con denominadores iguales y distintos y en forma decimal y, del otro lado, las respuestas que correspondan a estas operaciones. Motíveles para que resuelvan las operaciones en sus cuadernos. Después, con un orden previamente establecido, un representante de cada grupo pasará a la pizarra a relacionar la operación que le corresponda con su respuesta. Las operaciones podrían ser similares a las siguientes:

- 5/9 + 2/9
- 3/8 – 2/10
- 25.4 + 5.12
- 125.9 – 45.32

Ficha 10.

Competencia comunicativa

Recuerde a sus estudiantes que cuando resuelvan sumas y restas con números decimales, las cifras que falten se completan con ceros.

Por ejemplo:

- 128.45 + 12.3 = 128.45 + 012.30 = 140.75

Aprender a aprender

Pregunte al grupo:

- *¿Creen que son importantes los aspectos estudiados en esta doble página?*
- *¿Qué situaciones de la cotidianidad podrían resolverse con estos conocimientos?*

- **Desarrollo:** Muestre a sus estudiantes el proceso de solución de los ejemplos resueltos. Desarrolle en la pizarra algunos ejemplos adicionales y haga que desarrollen sus propios ejemplos en sus cuadernos. Pregúnteles: *¿Cuál es el procedimiento para efectuar adiciones y sustracciones de números racionales en forma de decimales? ¿Hay alguna diferencia entre las propiedades de las adiciones y sustracciones con los números racionales y los enteros?* Discuta las diversas respuestas en el grupo.
- **Cierre:** Motive a sus estudiantes a realizar los ejercicios del apartado *Actividades*. En la actividad 7, efectuarán operaciones de adiciones y sustracciones con números racionales en forma de fracciones y decimales. En la actividad 8, comprobarán la expresión aritmética formada por números racionales en forma de fracciones. Revise los resultados en el grupo, y envíeles a la pizarra.

Indicadores de logro

- **Efectúa** multiplicaciones y divisiones de números racionales.

Actividad interactiva

Generador de multiplicaciones

Actividad interactiva en la que los estudiantes, pulsando los botones correspondientes, podrán crear y resolver multiplicaciones con las cifras enteras y decimales indicadas.

Competencia comunicativa

Comente a sus estudiantes sobre la importancia de la regla de signos. Acláreles que el producto y el cociente de un par de números negativos es positivo y que el de un número impar es negativo. Por ejemplo:

- (– 5) x (– 8) = + 40.
- (– 2) x (– 3) x (– 6) = – 36
- (– 15) ÷ (– 5) = + 3
- (– 24) ÷ (+ 6) = – 4

Previsión de dificultades

A manera de repaso, pregunte a sus estudiantes: *¿Cuál es el procedimiento para multiplicar fracciones? ¿Y para dividir fracciones? ¿Cuál es el procedimiento para multiplicar números decimales? ¿Y para dividir números decimales?* Resuelva en la pizarra algunos ejemplos de multiplicaciones y divisiones de números racionales en forma de fracciones y decimales, explicándoles, paso a paso, los procedimientos, haga que pasen a la pizarra y, después, motíveles a realizar los ejercicios en sus cuadernos.

MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN DE NÚMEROS RACIONALES

RECUPERACIÓN

Efectúa.

4.56 x 3	12.5 x 3.42	0.3 x 5.4
13.68	42.75	1.62
5 ÷ 4	3.2 ÷ 16	0.2 ÷ 0.5
1.25	0.2	0.4

RECUERDA

Multiplicación de decimales por potencias de 10

Multiplicar un número decimal por una potencia de 10 equivale a correr el punto decimal tantos lugares a la derecha como ceros tenga la potencia de 10.

Ejemplos:

4.23 x 10 = 42.3.

4.23 x 1 000 = 4230.

MÁS INFORMACIÓN

Propiedades de la multiplicación de racionales

Si **x**, **y** e **z** son números racionales, su división cumple las siguientes propiedades:

- **x** x **y** = **y** x **x** (Conmutativa).
- (**x** x **y**) x **z** = **x** x (**y** x **z**) (Asociativa).
- **x** x (**y** + **z**) = (**x** x **y**) + (**x** x **z**) (Distributiva con respecto a la adición).

1 Multiplicación de números racionales

El resultado de multiplicar dos o más números racionales es otro número racional. En la multiplicación de racionales se utiliza la misma regla de los signos de la multiplicación de enteros.

Números racionales en forma de fracciones

El producto de dos o más racionales en forma de fracción, es otra fracción de numerador igual al producto de los numeradores y denominador igual al producto de los denominadores.

EJEMPLO RESUELTO:

- Obtener: $\frac{5}{2} \times \left(-\frac{4}{3}\right) \times \left(-\frac{15}{8}\right)$

$$\frac{5}{2} \times \left(-\frac{4}{3}\right) \times \left(-\frac{15}{8}\right) = \frac{5 \times (-4) \times (-15)}{2 \times 3 \times 8}$$
$$= \frac{300}{48} = \frac{25}{4}$$

El producto obtenido y simplificado es $\frac{25}{4}$. Este producto es positivo porque + x – x – = +.

Números racionales en forma de decimales

Para obtener el producto de dos o más números racionales en forma decimal, se multiplican los factores como si fueran números naturales, se cuentan las cifras decimales de los factores y al producto obtenido se coloca un punto decimal tantos lugares a la izquierda de la última cifra de la derecha como sea la suma de las cifras decimales de los factores.

EJEMPLO RESUELTO:

- Obtener la diferencia: 52.75 x (– 4.29).

52.75 x (– 4.29)

52.75	◄···· 2 decimales.
x 4.29	◄···· 2 decimales.
47475	
10550	
21100	
226.2975	◄···· 2 + 2 = 4 decimales.

El resultado de la multiplicación 52.75 x (– 4.29) es: – 226.2975.

Sugerencias didácticas

- **Inicio:** Oriente a sus estudiantes para que lean y resuelvan en el aula la actividad vinculadas a la recuperación de experiencias previas propuesta en el apartado *Recuperación*, en la que resolverán, en sus cuadernos, multiplicaciones con números decimales.
- **Desarrollo:** Pídales que lean el contenido de la doble página y que observen los procedimientos aplicados en los ejemplos resueltos. Formúleles preguntas vinculadas al contenido como, por ejemplo: *¿Cuál es el producto o resultado de multiplicar números racionales en forma de fracciones?* Discuta con el grupo las informaciones de los apartados *Recuerda* y *Más información*, relacionados con la multiplicación de decimales por potencias de 10 y las propiedades de la multiplicación de racionales, respectivamente.

2 División de números racionales

El resultado de dividir dos números racionales es otro número racional siempre que el divisor no sea cero. En la división de racionales se utiliza la misma regla de los signos de la división de enteros.

■ Números racionales en forma de fracciones

El cociente de dos racionales en forma de fracción, es el resultado de multiplicar la fracción del dividendo por la recíproca de la fracción del divisor.

EJEMPLO RESUELTO:

- Obtener: $\left(-\frac{12}{5}\right) \div \left(-\frac{8}{10}\right)$

$$\left(-\frac{12}{5}\right) \div \left(-\frac{8}{10}\right) = \left(-\frac{12}{5}\right) \times \left(-\frac{10}{8}\right) = \frac{(-12) \times (-10)}{5 \times 8} = 3.$$

El producto obtenido y simplificado es 3. Este cociente es positivo porque $- \div - = +$.

■ Números racionales en forma de decimales

Para dividir dos racionales en forma de decimal, primero se multiplican el dividendo y el divisor por una potencia de 10 que transforme al divisor en un número entero y, luego, se efectúa la operación.

EJEMPLO RESUELTO:

- Obtener: 133.28 ÷ 23.8.

133.28 ÷ 23.8 ▶

$$\begin{array}{r|l} 1332.8 & 238 \\ \cline{2-2} -1190 & 5.6 \\ \hline 1428 & \\ -1428 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

El cociente buscado es 5.6.

RECUERDA

División de decimales por potencias de 10

Dividir un número decimal por una potencia de 10, equivale a correr el punto decimal tantos lugares a la izquierda como ceros tenga la potencia de 10.

Ejemplos:

- 25.8 ÷ 10 = 2.58
  Un lugar.
- 25.8 ÷ 100 = 0.258
  Dos lugares.

MÁS INFORMACIÓN

Propiedades de la división de racionales

Si **x**, **y** y **z** son números racionales, su división cumple las siguientes propiedades:

- $x \div y = y \div x$ (No conmutativa).
- $(x \div y) \div z = x \div (y \div z)$ (No asociativa).
- $(x + y) \div z = (x \div z) + (y \div z)$ (Distributiva por la derecha con respecto a la adición).
- La operación $x \div 0$ no está definida.

ACTIVIDADES

9 Efectúa las multiplicaciones y divisiones siguientes.

- $\left(-\frac{3}{5}\right) \times \left(-\frac{3}{5}\right)$ *$\frac{3}{8}$*
- $\left(-\frac{6}{7}\right) \times \frac{3}{5} \times \left(-\frac{3}{5}\right)$ *$\frac{15}{12}$*
- (– 0.086) x (– 37.15) x (– 14) *44.7286*
- $\left(-\frac{8}{6}\right) \div \frac{16}{24}$ *2*
- $12 \div \left(-\frac{24}{5}\right)$ *$-\frac{5}{2}$*
- 3.3626 ÷ 4.3 *0.782*

- **Desarrollo:** Muestre a sus estudiantes el proceso de solución de los ejemplos resueltos. Desarrolle en la pizarra algunos ejemplos adicionales y haga que desarrollen sus propios ejemplos en sus cuadernos. Pregunte a sus estudiantes: *¿A qué equivale multiplicar un número decimal por una potencia de 10? ¿Cuáles son las propiedades de la multiplicación de números racionales?* Motíveles para que lean y comenten en el grupo las informaciones de los apartados *Recuerda* (División de decimales por potencias de 10) y *Más información* (Propiedades de la división de racionales). Muéstreles ejemplos de estas operaciones en la pizarra.
- **Cierre:** Motive a sus estudiantes a realizar los ejercicios propuestos en el apartado *Actividades*. En la actividad 9, efectuarán multiplicaciones y divisiones con números racionales. Revise los resultados en el grupo y envíeles a la pizarra.

Atención a la diversidad

Actividades de refuerzo: Escriba en la pizarra las siguientes expresiones para que las resuelvan en sus cuadernos.

- 0.906 x 1/10. Resp.: 0.0906.
- 12.32 x 1/00. Resp.: 1 232.
- 75.15 ÷ 1/ 1000. Resp.: 75 150.
- 0.0056 ÷ 1/1 000. Resp.: 5.6.

Ficha 11.

Actividades de ampliación: Motive al grupo a resolver problemas de la cotidianidad que involucren las operaciones estudiadas en esta ocasión. Por ejemplo:

- Miguelina es laboratorista y tiene que repartir 7 1/2 dl de un reactivo en recipientes de 3/4 dl de capacidad. *¿Cuántos recipientes utilizará Miguelina?*

  Resp.: Usará 10 recipientes.
- Juan ha comparado 6 transistores a un costo de 456.90 pesos. *¿Cuánto cuesta cada transistor?*

  Resp.: Cuesta 76.15 pesos.
- Gloria paga 374.76 pesos por media docena de vasos. *¿Cuánto cuesta cada vaso?*

  Resp.: Cuesta 62.46 pesos.

Aprender a aprender

Pregunte a sus estudiantes:

- *¿Tuvieron alguna dificultad al resolver las actividades expuestas en esta oportunidad?*
- *¿Cómo la superaron?*

Indicadores de logro

- **Calcula** correctamente potencias de números racionales.

Presentación

Racionales

Este recurso es una presentación que desarrolla de manera amplia, clara y con ejemplos vinculados a la cotidianidad, el concepto de números racionales y sus operaciones.

Previsión de dificultades

Escriba las siguientes expresiones en la pizarra:

- $(6/8)^2 = 36/64$
- $(2/3)^3 = 8/27$

Luego, pregunte a sus estudiantes:

- ¿Qué significado tienen estas expresiones?
- ¿Cómo obtuvieron los resultados?
- ¿Pueden generalizar este resultado y enunciar una regla?

Es importante destacar las propiedades de la potenciación y, después, motivarles para que las comprueben. Recuerde al grupo que nunca deben olvidar respetar el orden jerárquico de las operaciones aritméticas combinadas.

Diseñe ejercicios relacionados con potencias y operaciones combinadas que involucren potencias para que los desarrollen en sus cuadernos.

POTENCIACIÓN DE NÚMEROS RACIONALES

RECUPERACIÓN

Escribe los productos siguientes en forma de potencia.

$(-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3)$ $\quad (-3)^4$

$4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4$ $\quad (4)^8$

$\left(\frac{3}{2}\right) \times \left(\frac{3}{2}\right) \times \left(\frac{3}{2}\right)$ $\quad \left(\frac{3}{2}\right)^3$

$\left(-\frac{12}{5}\right) \times \left(-\frac{12}{5}\right)$ $\quad \left(-\frac{12}{5}\right)^2$

1 Potencias de exponentes entero positivo o cero

El resultado de elevar un número racional $\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}$ a un exponente **n** es otro número racional $\frac{\mathbf{a^n}}{\mathbf{b^n}}$.

EJEMPLO RESUELTO:

- Obtener: $\left(-\frac{3}{5}\right)^3$

$$\left(-\frac{3}{5}\right)^3 = \left(-\frac{3}{5}\right) \times \left(-\frac{3}{5}\right) \times \left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{(-3) \times (-3) \times (-3)}{5 \times 5 \times 5} = \frac{(-3)^3}{5^3} = -\frac{27}{125}$$

Si $\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}$ es un número racional, entonces: $\left(\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}\right)^0 = \frac{\mathbf{a}^0}{\mathbf{b}^0} = \frac{1}{1} = 1.$

Lo anterior muestra que cualquier número racional $\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}$ elevado a un exponente cero es igual a la unidad.

En resumen, si $\mathbf{x} = \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}$ es un número racional:

$$\left(\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}\right)^{\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{a^n}}{\mathbf{b^n}} \qquad \left(\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}\right)^0 = 1$$

La potenciación de números racionales obedece a la misma regla de los signos de los números enteros.

2 Multiplicación de potencias de igual base

Al multiplicar dos potencias distintas de igual base racional, $\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}$, se obtiene otra potencia cuyo exponente es la suma de los exponentes de los factores.

De acuerdo a la afirmación anterior, el producto $\left(\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}\right)^{\mathbf{m}} \times \left(\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}\right)^{\mathbf{n}}$ es equivalente a la potencia $\left(\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}\right)^{\mathbf{m+n}}$.

EJEMPLOS RESUELTOS:

- Determinar: $\left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^3$.

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \underbrace{\left(\frac{2}{3}\right) \times \left(\frac{2}{3}\right)}_{2 \text{ veces.}} \times \underbrace{\left(\frac{2}{3}\right) \times \left(\frac{2}{3}\right) \times \left(\frac{2}{3}\right)}_{3 \text{ veces.}} =$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{2+3} = \left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{2^5}{3^5} = \frac{32}{243}.$$

- Calcular: $\left(-\frac{1}{5}\right)^4 \times \left(-\frac{1}{5}\right)^2$.

$$\left(-\frac{1}{5}\right)^4 \times \left(-\frac{1}{5}\right)^2 = \left(-\frac{1}{5}\right)^{4+2} = \left(-\frac{1}{5}\right)^6 = \frac{1}{15\,625}.$$

Sugerencias didácticas

- **Inicio:** Oriente a sus estudiantes para que lean y resuelvan en el aula la actividad vinculada a la recuperación de experiencias previas propuesta en el apartado *Recuperación*, en la que determinarán productos en forma de potencias. Motive al grupo a justificar sus respuestas.
- **Desarrollo:** Pida a sus estudiantes que lean cuidadosamente el contenido de la doble página y que observen los procedimientos aplicados en los ejemplos resueltos. Formúleles preguntas como, por ejemplo: *¿Cuál es el resultado de elevar un número racional a un exponente* **n***? ¿Cuál es el resultado de elevar cualquier número racional a cero? ¿Cuál es el procedimiento para multiplicar potencias de igual base?*

3 División de potencias de igual base

Al dividir dos potencias distintas de igual base racional $\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}$, se obtiene otra potencia cuyo exponente es el exponente del dividendo menos el exponente del divisor.

La afirmación anterior muestra que $\left(\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}\right)^{\mathbf{m}} \div \left(\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}\right)^{\mathbf{n}}$ es equivalente a la potencia $\left(\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}\right)^{\mathbf{m-n}}$.

EJEMPLO RESUELTO:

- Determinar: $\left(-\frac{2}{9}\right)^6 \div \left(-\frac{2}{9}\right)^2$.

$$\left(-\frac{2}{9}\right)^6 \div \left(-\frac{2}{9}\right)^2 = \left(-\frac{2}{9}\right)^{6-2} = \left(-\frac{2}{9}\right)^4 = \frac{(-2)^4}{9^4} = \frac{16}{6\,561}.$$

4 Potencias de exponentes negativos

Si $\mathbf{x} = \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}$, entonces: $\frac{\mathbf{x}^0}{\mathbf{x}^{\mathbf{n}}} = \mathbf{x}^{0-\mathbf{n}} = \mathbf{x}^{-\mathbf{n}}$. Puesto que $\mathbf{x}^0 = 1$, entonces:

$$\frac{\mathbf{x}^0}{\mathbf{x}^{\mathbf{n}}} = \frac{1}{\mathbf{x}^{\mathbf{n}}} = \mathbf{x}^{-\mathbf{n}}.$$

La expresión anterior nos permite interpretar el significado de un exponente negativo: $\mathbf{x}^{-\mathbf{n}}$ es la recíproca de la potencia $\mathbf{x}^{\mathbf{n}}$.

EJEMPLO RESUELTO:

- Determinar: $\left(-\frac{5}{6}\right)^{-2}$

$$\left(-\frac{5}{6}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(-\frac{5}{6}\right)^2} = \frac{1}{\left(\frac{25}{36}\right)} = \frac{36}{25}$$

MÁS INFORMACIÓN

Producto y cociente de potencias de igual exponente

El producto de dos potencias de igual exponente, **n**, es igual al producto de las bases elevado al exponente **n**:

$$\left(\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}\right)^{\mathbf{n}} \times \left(\frac{\mathbf{c}}{\mathbf{d}}\right)^{\mathbf{n}} = \left(\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} \times \frac{\mathbf{c}}{\mathbf{d}}\right)^{\mathbf{n}}$$

El cociente de dos potencias de igual exponente, **n**, es igual al cociente de las bases elevado al exponente **n**:

$$\left(\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}\right)^{\mathbf{n}} \div \left(\frac{\mathbf{c}}{\mathbf{d}}\right)^{\mathbf{n}} = \left(\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} \div \frac{\mathbf{c}}{\mathbf{d}}\right)^{\mathbf{n}}$$

Ejemplos resueltos:

- Calcular: $\left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2$.

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \left(\frac{1}{2} \times \frac{2}{3}\right)^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \left(\frac{1}{9}\right).$$

- Calcular: $\left(\frac{2}{5}\right)^3 \div \left(\frac{1}{5}\right)^3$.

$$\left(\frac{2}{5}\right)^3 \div \left(\frac{1}{5}\right)^3 = \left(\frac{2}{5} \div \frac{1}{5}\right)^3 = 2^3 = 8.$$

ACTIVIDADES

10 Calcula las potencias siguientes.

- $\left(-\frac{1}{6}\right)^3$ – $\frac{1}{216}$
- $\left(\frac{3}{2}\right)^5$ – $\frac{243}{32}$
- $\left(-\frac{3}{4}\right)^{-3}$ – $\frac{64}{27}$
- $\left(-\frac{2}{5}\right)^{-4}$ – $\frac{625}{16}$
- $\left(\frac{3}{10}\right)^{-2}$ $\frac{100}{9}$

11 Efectúa las operaciones siguientes.

- $\left(-\frac{3}{7}\right)^2$ – $\frac{243}{16\,807}$
- $\left(\frac{5}{8}\right)^8 \times \left(\frac{5}{8}\right)^{-5}$ $\frac{125}{512}$
- $(27)^{-4} \times (27)^4$ 1
- $\left(\frac{2}{5} \times \frac{25}{2}\right)^{-2}$ $\frac{8}{15}$
- $\left(\frac{3}{10}\right)^{-2}$ $\frac{1}{25}$

12 Comprueba, dando valores a **x**, que: $(\mathbf{x}^2)^3 = (\mathbf{x}^3)^2$.

Atención a la diversidad

Actividades de refuerzo: Escriba las siguientes operaciones con potencias en la pizarra a fin de que las resuelvan en sus cuadernos.

- $(4/5)^3 \times (4/5)$ Resp.: 256/625.
- $(-1/2)^3 \times (-1/2)^2$ Resp.: –1/32.
- $(3/6)^2 \times (3/6)$ Resp.: 27/216.
- $(3/8)^8 \div (3/8)^6$ Resp.: 9/64.
- $(-2/4)^5 \div (-2/4)^2$ Resp.: –1/8.
- $(2/3)^9 \div (2/3)^5$ Resp.: 16/81.

Ficha 12.

Actividades de ampliación: Haga que se fijen en el ejemplo resuelto y, luego, resuelvan las operaciones.

Ejemplo: $4^3/7^3 = (4/7)^3 = 64/343$.

- $2^5/3^5 =$ Resp.: 32/243.
- $(-9)^3/5^3 =$ Resp.: – 243/125.
- $8^3/(-2)^3 =$ Resp.: – 512/8.
- $(-15)^2/2^2 =$ Resp.: 225/2.
- $(-4)^3/6^3 =$ Resp.: – 8/27.
- $9^3/10^3 =$ Resp.: 729/1 000.

- **Desarrollo:** Muestre a sus estudiantes el proceso de solución de los ejemplos resueltos. Desarrolle en la pizarra algunos ejemplos adicionales y haga que desarrollen sus propios ejemplos en sus cuadernos. Pregúnteles: *¿Qué debemos tomar en cuenta para calcular potencias de bases negativas? ¿Cómo será el resultado si el exponente es par? ¿Y si es impar?* Continúe con las preguntas y discuta las diversas respuestas en el grupo. Motíveles para que lean y comenten en el grupo las informaciones del apartado *Más información* (Producto y cociente de potencias de igual exponente). Desarrolle estos y otros ejemplos en la pizarra.
- **Cierre:** Motive a sus estudiantes a realizar los ejercicios del apartado *Actividades*. En la actividad 10, calcularán las potencias indicadas. En la actividad 11, efectuarán operaciones con potencias. En la actividad 12, comprobarán, dando valores distintos a **x**, la expresión aritmética dada. Revise los resultados en el grupo y envíeles a la pizarra.

Aprender a aprender

Pregunte al grupo:

- *¿Creen que podrían explicar a un compañero de clase los pasos para resolver operaciones con potencias?*
- *¿Cuál es el primer paso para resolver operaciones con potencias?*

Indicadores de logro

- **Escribe** números en notación científica.

Presentación

Notación científica

Este recurso es una presentación que desarrolla el concepto de notación científica: potencias de base 10, múltiplos, submúltiplos, etc., con ejemplos y actividades vinculadas a la vida diaria.

Más información

Converse con sus estudiantes acerca de la importancia del lenguaje y la notación matemática para expresar magnitudes. Expréseles que la notación científica facilita la lectura y la escritura de cantidades muy grandes o muy pequeñas, lo que ahorra esfuerzo y tiempo al utilizar dichos números.

Articulación de áreas Ciencias Naturales

Representar en notación científica:

- 2 000 000 de glóbulos rojos = 2 x 10^6.
- Las moléculas de ADN para la construcción de un ser humano es 2 000 000 00 = 2 x 10^9.
- La longitud de los seres vivos más pequeños descubiertos en 1998, los nanobios, nombrados así para diferenciarlos de los microbios, es 0.000 000 02 = 2 x 10^{-8}.

RECUPERACIÓN

Calcula mentalmente.

53 x 100 *5 300*	*28 x 10 000* *280 000*
2.5 x 1 000 *2 500*	*0.07 x 100 000* *7 000*
36 ÷ 10 *3.6*	*253 ÷ 10 000* *0.0253*
0.5 ÷ 1 000 *0.0005*	*76.4 ÷ 100 000* *0.000764*

1 Potencias de 10 de exponentes enteros

Una potencia de 10 de exponente entero es el resultado de multiplicar 10 o 1/10 varias veces por sí mismo.

En el caso de multiplicar 10 varias veces por sí mismo, se tendrá una potencia de 10 con exponente positivo.

EJEMPLOS RESUELTOS:

- $\underbrace{10 \times 10 \times 10 \times 10}_{4 \text{ veces.}} = 10^4 = 10\,000.$
- $\underbrace{10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10}_{7 \text{ veces.}} = 10^7 = 10\,000\,000.$

La multiplicación de 1/10 varias veces por sí mismo proporcionará una potencia de 10 con exponente negativo.

EJEMPLOS RESUELTOS:

- $\underbrace{\left(\frac{1}{10}\right) \times \left(\frac{1}{10}\right) \times \left(\frac{1}{10}\right)}_{3 \text{ veces.}} = \frac{1}{10^3} = 10^{-3} = 0.001$
- $\underbrace{\left(\frac{1}{10}\right) \times \left(\frac{1}{10}\right) \times \left(\frac{1}{10}\right) \times \left(\frac{1}{10}\right)}_{4 \text{ veces.}} = \frac{1}{10^4} = 10^{-4} = 0.0001$

2 Notación científica

En ocasiones, es preciso escribir o realizar operaciones con números muy grandes o muy pequeños. Manejar estos números puede ser difícil. La notación científica se creó para facilitar el trabajo con estos números.

> Una cantidad expresada en notación científica es el producto de un número entre 1 y 10, y una potencia de diez.

Fíjate cómo se escriben, en notación científica, los números siguientes:

- 456 000 000 = 4.56 x 10^8
- 50 000 000 000 000 = 5 x 10^{13}
- 0.00006895 = 6.895 x 10^{-5}
- 0.0000000000000001932 = 1.932 x 10^{-16}

Observa que en todos los casos el número que antecede a la potencia de 10, y que lo multiplica, está entre 1 y 10.

Sugerencias didácticas

- **Inicio:** Oriente a sus estudiantes para que resuelvan en el aula la actividad vinculada a la recuperación de experiencias previas propuestas en el apartado *Recuperación*, en la que efectuarán, mentalmente, multiplicaciones de diversas cantidades por la unidad acompañada de ceros. Motive al grupo a justificar sus respuestas.
- **Desarrollo:** Pida a sus estudiantes que lean cuidadosamente el contenido de la doble página y que observen los procedimientos aplicados en los ejemplos resueltos. Formúleles preguntas vinculadas al contenido como, por ejemplo: *¿Cuál es el producto de una potencia de 10 de exponente cero? ¿Cuál es el resultado de multiplicar 1/10 varias veces? ¿Qué motivó la creación de la notación científica?*

3 Procedimientos para escribir un número en notación científica

Para escribir un número en notación científica, se corre su punto decimal a la izquierda o a la derecha, tantos lugares como sea necesario para conseguir un número entre 1 y 10.

Si el punto decimal se corre hacia la izquierda, se escribirá un exponente positivo para la potencia de 10; en cambio, si se corre hacia la derecha el exponente será negativo.

EJEMPLOS RESUELTOS:

- Escribir el número 32 500 en notación científica.

  El número 32 500 es un entero, su punto decimal está a la derecha de la cifra del orden de las unidades: 32 500.0.

  El punto decimal de 32 500.0, se corre cuatro lugares hacia la izquierda: 32 500.0 = 3.2500.0 x 10^4 = 3.25 x 104.

  4 lugares.

- Expresar el número 0.0000075 en notación científica.

  El punto decimal de 0.0000075, se corre seis lugares hacia la derecha: 0.000007.5 = 7.5 x 10^{-6}.

  6 lugares.

- Escribir el número 6 258.427 en notación científica.

  El punto decimal de 6 258.427, se corre tres lugares hacia la izquierda: 6.258.427= 6.258427 x 10^3.

  3 lugares.

INTELIGENCIA COLABORATIVA

De la notación científica a la notación normal

Descubran el número que corresponde a cada expresión en notación científica. Luego, expongan en el grupo cómo lo hicieron.

- 4.25 x 10^3
- 2.71 x 10^{-4}
- 9.58 x 10^0
- 7.9278 x 10^8
- 4.98 x 10^{-12}

ACTIVIDADES

13 Encierra los números escritos en notación científica. Justifica tus respuestas.

- 45.86
- 4.86 x 10^4
- 0.86 x 10^{-5}
- 42.06 x 10^8
- 9.04 x 10^{15}
- 1.00 x 10^9

14 Escribe en notación científica los números siguientes.

- 560 000 *5.6 x 10^5*
- 0.00671 *6.71 x 10^{-3}*
- 1 242.98 *1.24298 x 10^3*
- 0.00039 *3.9 x 10^{-4}*
- 402 365.87 *4.0236587 x 10^5*
- 0.000000001285 *1.285 x 10^{-9}*

15 Escriban las siguientes cantidades en notación científica.

- Radio de la Tierra: 637 000 km. *6.37 x 10^5*
- Distancia Tierra-Luna: 384 000 000 m. *3.84 x 10^8*
- Traslación de Marte: 59 400 000 s. *5.94 x 10^7*
- Masa de una partícula de polvo: 0.00001 kg. *10^{-5}*
- Masa de un glóbulo rojo: 0.0000000001 g. *10^{-10}*
- Velocidad de la luz: 299 792 458 m/s. *2.99792458 x 10^8*

Atención a la diversidad

Actividades de refuerzo: Proponga a sus estudiantes que expresen en notación científica los siguientes datos.

- La circunferencia del planeta Tierra tiene una longitud aproximada de 40 000 000 m. Resp.: 4 x 10^7.
- El cerebro humano tiene un número estimado de neuronas de 10 000 000 000. Resp.: 1 x 10^{11}.
- Se han encontrado bacterias vivas a la altura de 41 000 metros. Resp.: 41 x 10^3.

Ficha 13.

Actividades de ampliación: Proponga a sus estudiantes que expresen el número correspondiente a las cantidades expresadas en notación científica.

- Para el año 2030 se proyecta una población mundial de 11 x 10^9. Resp.: 11 000 000 000.
- La luz recorre un metro de distancia en 3 x 10^{-8} segundos. Resp.: 0.000 000 08.

- **Desarrollo:** Muestre a sus estudiantes el proceso de solución de los ejemplos resueltos. Pregúnteles: *¿Cómo sabemos si el exponente será positivo o negativo al escribir una cantidad en notación científica? ¿Cómo será el exponente, si el punto decimal se corre hacia la izquierda? ¿Y si se corre hacia la derecha?* Motíveles para que lean y comenten en el grupo las informaciones del apartado *Inteligencia colaborativa* (De la notación científica a la notación normal). Haga que resuelvan los ejercicios propuestos.
- **Cierre:** Motive a sus estudiantes a realizar los ejercicios del apartado *Actividades*. En la actividad 13, encerrarán los números escritos en notación científica. Luego, justificarán sus respuestas. En la actividad 14, escribirán en notación científica los números indicados. En la actividad 15, escribirán las cifras de las informaciones suministradas en notación científica. Revise los resultados en el grupo y envíeles a la pizarra.

Aprender a aprender

Pregunte a sus estudiantes:

- *¿Qué facilidad ofrece escribir cantidades en notación científica?*
- *¿Qué ayuda ofrece la notación científica a la ciencia?*

Indicadores de logro

- **Calcula** raíces cuadradas y efectúa operaciones con radicales.
- **Resuelve** problemas del contexto donde aplica operaciones con los números racionales.

Previsión de dificultades

Antes de dar inicio al desarrollo del tema de la clase, repase los conceptos de número cuadrado perfecto y de raíz cuadrada. Después, escriba las raíces siguientes en la pizarra:

- $\sqrt[2]{144} = 12$ porque $12 \times 12 = 144$.
- $\sqrt[2]{49} = 7$ porque $7 \times 7 = 49$.
- $\sqrt[3]{64} = 4$ porque $4 \times 4 \times 4 = 64$.
- $\sqrt[3]{27} = 3$ porque $3 \times 3 \times 3 = 27$.
- $\sqrt[4]{16} = 2$ porque $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$.
- $\sqrt[5]{243} = 3$ porque $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 243$.

Diseñe ejercicios similares a estos para que los resuelvan en sus cuadernos. Luego, envíeles a la pizarra. Motive al grupo para que construya sus propios ejemplos.

RECUPERACIÓN

¿Cómo compruebas que 14 es la raíz cuadrada exacta de 196?

RECUERDA

Cálculo de una raíz

- Obtener $\sqrt{529}$.

1. Se separan las cifras de 529, de derecha a izquierda y de dos en dos, pudiendo quedar una sola cifra a la izquierda: $\sqrt{5'29}$.
2. Se busca un número que elevado al cuadrado sea igual o menor que 5. Este número es el 2, que será la primera cifra de la raíz. Se resta 2^2 de 5: $5 - 2^2 = 1$. Se bajan las siguientes dos cifras, 29:

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{5'29} & 2 \\ -4 & \\ \hline 129 & \end{array}$$

3. Debajo del 2 se escribe su doble, 4 y se busca, por tanteo, un número **N** tal que 4**N** x **N** sea igual o menor que 129. Este número es el 3, la segunda cifra de la raíz. Se resta 43 x 3 de 129:

$$\begin{array}{r|r} \sqrt{5'29} & 23 \\ -4 & 2 \times 2 = 43 \\ \hline 129 & \times\ 3 \\ -129 & \overline{129} \\ \hline 0 & \end{array}$$

Así, $\sqrt{529} = 23$.

1 Raíz cuadrada de un racional en forma fraccionaria

Una fracción cuadrada perfecta está formada por un numerador y un denominador que son números cuadrados perfectos.

La raíz cuadrada de una fracción cuadrada perfecta es la fracción cuyos numerador y denominador son las raíces cuadradas del numerador y el denominador de la fracción original.

EJEMPLOS RESUELTOS:

- $\sqrt{\frac{4}{36}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{36}} = \frac{2}{6}$.
- $\sqrt{\frac{121}{9}} = \frac{\sqrt{121}}{\sqrt{9}} = \frac{11}{3}$.
- $\sqrt{\frac{81}{49}} = \frac{\sqrt{84}}{\sqrt{49}} = \frac{9}{7}$.
- $\sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{25}} = \frac{3}{5}$.

Si el numerador o el denominador de una fracción no es un cuadrado perfecto, las raíces de uno u otro se dejan indicadas.

En la raíz $\sqrt{\frac{25}{6}}$ solo el numerador es un cuadrado perfecto, por lo que la raíz: $\sqrt{\frac{25}{6}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{6}} = \frac{5}{\sqrt{6}}$.

En la raíz $\sqrt{\frac{15}{36}}$ solo el denominador es un cuadrado perfecto, por lo que: $\sqrt{\frac{15}{36}} = \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{36}} = \frac{\sqrt{15}}{6}$.

2 Raíz cuadrada de un racional en forma decimal

La raíz cuadrada de un racional en forma decimal se obtiene como la de un entero. Al llegar al punto decimal, se coloca un punto decimal a la raíz que ya ha sido encontrada.

EJEMPLO RESUELTO:

- Obtener $\sqrt{46.24}$.

$$\begin{array}{r|r} \sqrt{46'.24} & 6.8 \\ -36 & 2 \times 6 = 128 \\ \hline 10\ 24 & \times\quad 8 \\ -10\ 24 & \overline{1\ 024} \\ \hline 0 & \end{array}$$

Así, $\sqrt{46.24} = 6.8$.

En el caso en que el residuo no sea cero, se agregan dos ceros y se continúa el proceso agregándose otras cifras decimales a la raíz.

Sugerencias didácticas

- **Inicio:** Oriente a sus estudiantes para que lean y respondan en el aula la pregunta vinculada a la recuperación de experiencias previas propuesta en el apartado *Recuperación*, relacionada con el concepto que desarrolla esta doble página.
- **Desarrollo:** Haga que lean cuidadosamente el contenido de la doble página y que observen los procedimientos aplicados en los ejemplos resueltos. Preguntarles: *¿Cómo se obtiene la raíz cuadrada de una fracción cuadrada perfecta? ¿Recuerdan qué es un cuadrado perfecto? ¿Qué debe hacerse si el numerador o el denominador de una fracción no es un cuadrado perfecto?* Haga que lean los pasos para calcular una raíz cuadrada, en el apartado *Recuerda*. Explíqueles este y otros ejemplos en la pizarra.

3 Operaciones con expresiones radicales

Una expresión radical como $3\sqrt{5}$ es una forma abreviada de escribir la multiplicación $3 \times \sqrt{5}$. Regularmente se presentan cuando el radicando no es un cuadrado perfecto.

Se llaman radicales semejantes a las expresiones con iguales índice y radicando.

Las expresiones $4\sqrt{3}$, $5\sqrt{3}$ y $-8\sqrt{3}$ son radicales semejantes. En todas está presente la raíz cuadrada de 3, que no es un cuadrado perfecto.

Con los radicales semejantes se pueden efectuar operaciones de adición y sustracción. Estas operaciones se realizan solamente con los números que preceden a los radicales.

EJEMPLOS RESUELTOS:

- $5\sqrt{7} + 4\sqrt{7} = (5 + 4)\sqrt{7} = 9\sqrt{7}$.
- $8\sqrt[3]{11} + (-4)\sqrt[3]{11} - 2\sqrt[3]{11} = [8 + (-4) - 2]\sqrt[3]{11} = 2\sqrt[3]{11}$.
- $\frac{2\sqrt{2}}{5} - \frac{3\sqrt{2}}{20} = \left(\frac{2}{5} - \frac{3}{20}\right)\sqrt{2} = \frac{5\sqrt{2}}{20} = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

Para multiplicar o dividir expresiones radicales se utilizan las propiedades: $\sqrt{\mathbf{x}} \times \sqrt{\mathbf{y}} = \sqrt{\mathbf{x} \times \mathbf{y}}$; $\sqrt{\mathbf{x}} \div \sqrt{\mathbf{y}} = \sqrt{\mathbf{x} \div \mathbf{y}}$.

EJEMPLOS RESUELTOS:

- $3\sqrt{7} \times (-5\sqrt{7}) = [3 \times (-5)]\sqrt{7 \times 7} = -15\sqrt{49} = -15 \times 7 = -105$.
- $\sqrt{5} \times 4\sqrt{3}) = (1 \times 4)\sqrt{5 \times 3} = 4\sqrt{15}$.
- $(-24\sqrt[3]{16}) \div (-6\sqrt[3]{2}) = [(-24) \div (-6)]\sqrt[3]{\frac{16}{2}} = 4\sqrt[3]{8} = 8$.

Para multiplicar o dividir expresiones radicales, estas no tienen que ser semejantes.

MÁS INFORMACIÓN

Escritura de una raíz en términos de otra

La raíz cuadrada de un número racional que no es cuadrado perfecto puede escribirse en términos de la raíz de uno de sus divisores, que no sea cuadrado perfecto.

Ejemplos:

- $\sqrt{75} = \sqrt{25 \times 3} = \sqrt{25} \times \sqrt{3} = 5\sqrt{3}$.

  Así, $\sqrt{75}$ queda expresada en términos de $\sqrt{3}$.
- $\sqrt{120} = \sqrt{4 \times 30} = \sqrt{4} \times \sqrt{30} = 2\sqrt{30}$.

  $\sqrt{120}$ queda expresada en términos de $\sqrt{30}$.
- $3\sqrt{8} = 3\sqrt{4 \times 2} = 3\sqrt{4} \times \sqrt{2} = 6\sqrt{2}$.

  $3\sqrt{8}$ queda expresada en términos de $\sqrt{2}$.

ACTIVIDADES

16 Obtén, si existe, la raíz cuadrada de cada fracción o decimal.

- $\frac{4}{81}$ $\frac{2}{9}$
- $\frac{121}{169}$ $\frac{11}{13}$
- $\frac{3}{49}$ $\frac{\sqrt{3}}{7}$
- $\frac{4}{225}$ *No.*
- $\frac{25}{3}$ $\frac{5}{\sqrt{3}}$
- $\frac{32}{18}$ $\frac{4}{3}$
- 1.96 *No.*
- 7.84 *2.8*
- 151.29 *12.3*
- 2.81 *1.676*
- 0.5625 *0.75*
- 519.84 *22.8*

17 Calcula.

- $10\sqrt{2} - 3\sqrt{2}$ $7\sqrt{2}$
- $\sqrt{5} + 8\sqrt{5} - 4\sqrt{5}$ $5\sqrt{5}$
- $\sqrt{3} - 9\sqrt{3} + (-4\sqrt{3})$ $-12\sqrt{3}$
- $\sqrt{18} + 5\sqrt{2} - (-8\sqrt{2})$ $16\sqrt{2}$
- $2\sqrt{6} \times (-5\sqrt{4})$ $-20\sqrt{6}$
- $2\sqrt[3]{5} \times 3\sqrt[3]{25}$ 30
- $8\sqrt{12} \div 5\sqrt{3}$ $\frac{16}{5}$
- $15\sqrt[3]{75} \div 5\sqrt[3]{25}$ $3\sqrt[3]{3}$

- **Desarrollo:** Muestre a sus estudiantes el proceso de solución de los ejemplos resueltos. Desarrolle en la pizarra algunos ejemplos adicionales y haga que desarrollen sus propios ejemplos en sus cuadernos. Preguntarles: *¿Cómo se calcula la raíz cuadrada de un número racional en forma decimal? ¿Cómo se denominan las expresiones con iguales índice y radicando?* Haga que resuelvan diversos ejercicios con expresiones radicales, observando que sigan correctamente los procedimientos. Motíveles para que lean y comenten en el grupo las informaciones del apartado *Más información* (Escritura de una raíz en términos de otra). Desarrolle estos y otros ejemplos más en la pizarra.
- **Cierre:** Motive a sus estudiantes a realizar los ejercicios del apartado *Actividades*. En la actividad 16, obtendrán, si existen, la raíz cuadrada de cada fracción o decimal. En la actividad 17, calcularán diversas operaciones con expresiones radicales. Revise los resultados en el grupo.

Atención a la diversidad

Actividades de refuerzo: Proponga a sus estudiantes que resuelvan las siguientes operaciones en sus cuadernos y, luego, comparen los resultados en el aula.

- $\sqrt{9/25}$ Resp.: 3/5
- $\sqrt{16/36}$ Resp.: 4/6
- $\sqrt{25/81}$ Resp.: 5/9
- $\sqrt{36/169}$ Resp.: 6/13
- $\sqrt{100/25}$ Resp.: 2
- $\sqrt{49/64}$ Resp.: 7/8

Ficha 14.

Actividades de ampliación: Forme a sus estudiantes en grupos, luego, motíveles para que resuelvan las siguientes raíces cuadradas, siguiendo los pasos que figuran en el apartado *Recuerda*.

- $\sqrt{4\,096}$ Resp.: 64.
- $\sqrt{1\,225}$ Resp.: 35.
- $\sqrt{1\,024}$ Resp.: 32.
- $\sqrt{5\,625}$ Resp.: 75.
- $\sqrt{1\,849}$ Resp.: 43.
- $\sqrt{3\,600}$ Resp.: 60.
- $\sqrt{1\,521}$ Resp.: 39.

Aprender a aprender

Pregunte al grupo:

- *¿Cuáles pasos deben seguir para obtener la raíz cuadrada de cantidades grandes?*

Competencias

- Comunicativa
- Uso de algoritmo y operaciones
- Científica y tecnológica

Indicadores de logro

- **Identifica** números racionales en un conjunto de números dados.
- **Representa** y **ordena** números racionales en la recta numérica.
- **Compara** los números racionales utilizando los símbolos <, = y >. **Obtiene** la fracción generatriz de un número decimal.
- **Efectúa** adiciones, sustracciones, multiplicaciones, divisiones, potencias de números racionales.
- **Escribe** números en notación científica. **Calcula** raíces cuadradas y **efectúa** operaciones con radicales.
- **Resuelve** problemas del contexto donde aplica operaciones con los números racionales.

Competencias fundamentales

Competencia comunicativa

Es preciso que los estudiantes adquieran las habilidades necesarias para resolver las operaciones con números racionales y, al mismo tiempo, puedan desarrollar las competencias comunicativas que les permitan expresar y aplicar dichos procedimientos sin dificultad alguna.

Uso de algoritmos

Las reglas y procedimientos en la resolución de operaciones aritméticas son vitales para la persecución de resultados correctos. Por ejemplo, en las operaciones con paréntesis, el primer paso es eliminarlos efectuando las operaciones que encierran.

ACTIVIDADES

18 Escribe en tu cuaderno, tres fracciones equivalentes de cada número racional.

- $\frac{4}{(-5)}$
- $\frac{(-9)}{(-3)}$
- $\frac{7}{15}$
- -3
- $\frac{10}{(-9)}$
- $\frac{12}{17}$

Respuestas libres

19 Escribe cada fracción en forma decimal.

- $\frac{5}{4}$ *1.25*
- $\frac{3}{8}$ *0.375*
- $\frac{17}{45}$ *1.25*
- $\frac{49}{32}$ *1.53125*
- $\frac{27}{16}$ *1.6875*
- $\frac{172}{990}$ *0.17373*

20 Ordena los números racionales siguientes como se te indica.

- De menor a mayor:

$\frac{11}{4}$ $\quad -2.5 \quad$ $\frac{78}{25}$ $\quad 2.8 \quad$ $-\frac{78}{25}$

$-\frac{83}{10} < -2.5 < \frac{11}{4} < 2.8 < \frac{78}{25}$

- De mayor a menor:

$2.77\ldots \quad -\frac{5}{9} \quad \frac{15}{3} \quad -4.73 \quad \frac{99}{20}$

$\frac{15}{3} > \frac{99}{20} > 2.77 > -\frac{5}{9} > -4.73$

21 Representa gráficamente.

- -6
- $\frac{3}{4}$
- 5
- -2.5
- $\frac{7}{2}$
- $-\frac{42}{8}$
- 0.45
- $-\frac{5}{8}$
- -5.6

22 Clasifica los decimales equivalentes a las fracciones siguientes.

- $\frac{9}{5}$ *Exacta*
- $\frac{6}{32}$ *Exacta*
- $\frac{67}{33}$ *Per. pura*
- $\frac{32}{99}$ *Per. pura*
- $\frac{65}{900}$ *Per. mixta*
- $\frac{17}{30}$ *Per. mixta*
- $\frac{3}{16}$ *Exacta*
- $\frac{12}{45}$ *Per. mixta*
- $\frac{379}{500}$ *Exacta*

23 Obtén la fracción generatriz de cada uno de los números decimales siguientes.

- 0.24 *$\frac{6}{25}$*
- 1.0101… *$\frac{100}{99}$*
- 0.3232… *$\frac{32}{99}$*
- 3.25 *$\frac{13}{4}$*
- 5.244… *$\frac{236}{45}$*
- 0.123123… *$\frac{41}{333}$*
- 4.85 *$\frac{97}{20}$*
- 0.6711… *$\frac{151}{225}$*
- 8.2055… *$\frac{1\,477}{180}$*

24 Construye …

- … un número racional comprendido entre 0.05 y 0.06. *0.055*
- … tres números racionales comprendidos entre $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{2}$. *$\frac{3}{6}$ $\frac{5}{12}$ $\frac{11}{24}$*

25 Explica por qué son equivalentes las afirmaciones siguientes.

- *Entre dos números racionales cualesquiera, siempre hay otro racional.*
- *Entre dos números racionales cualesquiera, hay infinitos números racionales.*

26 Efectúa las operaciones siguientes.

- $\left(-\frac{2}{9}\right) + \left(-\frac{5}{6}\right) - \frac{8}{3} + \frac{5}{12}$ *$-\frac{119}{36}$*
- $\left(-\frac{3}{5}\right) \times \left(-\frac{5}{6}\right) \times \frac{2}{7}$ *$\frac{1}{7}$*
- $\frac{8}{9} \times \left[\left(-\frac{5}{6}\right) + \frac{3}{5} + \frac{149}{60}\right]$ *2*
- $\left(\frac{3}{8}\right) \div (0.25 + 3.40 - 1.5)$ *$\frac{15}{86}$*

27 Calcula las potencias siguientes.

- $\left(-\frac{2}{5}\right)^2$ *$\frac{4}{25}$*
- $\left(\frac{7}{8}\right)^3$ *$\frac{343}{512}$*
- $\left(\frac{4}{9}\right)^0$ *1*
- $\left(-\frac{3}{4}\right)^3$ *$-\frac{27}{64}$*
- $\left(\frac{2}{5}\right)^{-1}$ *$\frac{5}{2}$*
- $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$ *$\frac{27}{8}$*

28 Determina.

- $\left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^4$ *$\frac{64}{729}$*
- $\left(\frac{4}{9}\right)^6 \div \left(\frac{4}{9}\right)^{-2}$ *$\frac{16}{49}$*
- $\left(-\frac{2}{5}\right)^3 \times \left(-\frac{2}{5}\right)^0$ *$-\frac{8}{125}$*
- $\left(\frac{6}{11}\right)^{12} \div \left(\frac{6}{11}\right)^{10}$ *$\frac{36}{121}$*

29 Obtén las raíces siguientes.

- $\sqrt[3]{-\frac{27}{8}}$ *$-\frac{3}{2}$*
- $\sqrt{\frac{36}{196}}$ *$\frac{6}{14}$*
- $\sqrt[3]{\frac{125}{64}}$ *$\frac{5}{4}$*

30 Calcula.

- $\sqrt{5} - 9\sqrt{5} + 12\sqrt{5}$ *$4\sqrt{5}$*
- $\sqrt[3]{24} + 9\sqrt[3]{3} + 6\sqrt[3]{81}$ *$29\sqrt[3]{3}$*
- $(3\sqrt{6} \times 5\sqrt{2} \times \sqrt{3}) \div (-9)$ *-10*

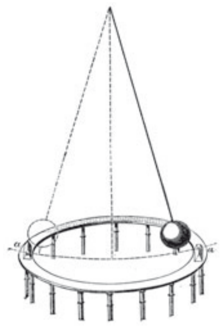
Sugerencias didácticas

- Las actividades propuestas en esta página están estrechamente vinculadas a los conceptos y procedimientos desarrollados a lo largo de la unidad. Haga que lean cuidadosamente las instrucciones y, después, verifique las respuestas obtenidas.
- Es importante observar de cerca que los estudiantes siguen las instrucciones y los procedimientos para efectuar operaciones con potencias y radicales. Recuerde al grupo cómo se obtienen las raíces de fracciones y qué deben hacer cuando una de las partes de la fracción no es un cuadrado perfecto.

COMPETENCIA CIENTÍFICA Y TECNOLÓGICA

31 Lee y, luego, haz lo que se te pide.

El tiempo que tarda la pesa de un péndulo en salir de uno de sus extremos y regresar a el, se llama período. El período depende del largo del hilo o la barra metálica que sostiene la pesa.



Si un péndulo tiene un largo **L**, en metros, su período **T**, en segundos, se calcula con la expresión:

$$\mathbf{T} = 2\sqrt{\mathbf{L}}$$

- Completa la tabla.

Largo (en metros)	Período (en seg)
$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{4}$	1
1	2
4	4
9	6

- Resuelve el problema.

Un anticuario está reparando un antiguo reloj de pared que tiene una varilla de 0.36 m de largo.

- Emplea la expresión $\mathbf{T} = 2\sqrt{\mathbf{L}}$ para obtener el período del péndulo del reloj. *1.2 s*
- Si quisiera que el período del péndulo fuera el doble, ¿cuál debería ser el largo de su varilla? *1.44 m*
- Si buscara reducir el período a la mitad, ¿qué largo daría a la varilla? *0.09 m*

- Explica en el grupo qué hiciste para responder en cada caso.

32 Fíjate en la tabla y, luego, calcula.

La unidad de energía gastada por un aparato es el kilovatio-hora (kWh). La energía se calcula multiplicando la potencia por el tiempo en funcionamiento.

Electrodoméstico	Potencia (en kW)
Televisión	0.12
Nevera	0.19
Computadora	0.30
Licuadora	0.45
Lavadora	1.20

- La televisión de un hogar se mantiene encendida un promedio de 480 horas al mes. ¿Cuántos kilovatios-hora gasta mensualmente la televisión? *57.6 kWh*
- ¿Cuál es el consumo de energía mensual de una nevera? Se asume que la nevera se mantiene encendida todo el tiempo. *136.8 kWh*
- ¿Cuántas horas de uso en un mes tuvo una licuadora si consumió en ese período unos 1.8 kWh? *4 horas*
- ¿Qué beneficios tiene el análisis del consumo de energía en los hogares?

Sugerencias didácticas

- Proponga a sus estudiantes que lean detenidamente las actividades planteadas y que externen sus opiniones acerca de los pasos que deben dar para cada resolución.
- Los problemas propuestos en este apartado son aplicaciones cotidianas de las operaciones con números racionales. Acompañe a sus estudiantes en la realización de estas actividades y ofrézcales las orientaciones necesarias.

Competencias fundamentales

Competencia científica y tecnológica

- El conocimiento científico en la actualidad es una necesidad y un derecho de todo ente social. Las habilidades y destrezas técnicas son necesarias para la solución de problemas que forman parte del diario vivir. En este aspecto radica la importancia de que los estudiantes adquieran las destrezas necesarias para conocer las propiedades y los procedimientos para resolver operaciones con los números racionales.

Criterios de evaluación

Competencia comunicativa:

- Adaptación a las representaciones gráficas, simbólicas y numéricas a la situación de comunicación.

Uso de algoritmos:

- Seguimiento de las reglas, instrucciones y procedimientos.

Competencia científica y tecnológica:

- Aplicación apropiada de los procedimientos, técnicas, modelos y teorías científicas.

Aprender a aprender

Motive a sus estudiantes para que inventen ejemplos de las aplicaciones cotidianas de las operaciones con números racionales. Por ejemplo, pregunte al grupo:

- *¿Cómo medirían la longitud de la arista de un cuerpo con forma cúbica que tiene un volumen de 729 metros cúbicos?*

Discuta las diversas respuestas con el grupo.

Indicadores de logro de la evaluación

- **Identifica** números racionales en un conjunto de números dados. **Representa** y **ordena** números racionales en la recta numérica.
- **Compara** los números racionales utilizando los símbolos <, = y >.
- **Obtiene** la fracción generatriz de un número decimal. **Efectúa** adiciones y sustracciones de números racionales.
- **Efectúa** multiplicaciones y divisiones de números racionales. **Calcula** correctamente potencias de números racionales.
- **Escribe** números en notación científica. **Calcula** raíces cuadradas y **efectúa** operaciones con radicales.
- **Resuelve** problemas del contexto donde aplica operaciones con los números racionales.
- **Utiliza** recursos virtuales y electrónicos: computadora, softwares educativos, juegos interactivos y otros, en la búsqueda de información.

Competencias específicas

- Comunica.
- Modela.
- Usa algoritmos.
- Razona y argumenta.
- Conecta.

Aprender a aprender

Haga que sus estudiantes apliquen los conceptos aprendidos en la unidad en situaciones de la cotidianidad, por ejemplo, preguntar:

- *¿Cuáles números se utilizan para calcular la potencia de la corriente? ¿Podrían, por ejemplo, dar otros usos cotidianos de los números racionales?*

EVALUACIÓN

Comunica

33 Escribe el signo < , = o > entre cada par de números.

- -5 <u><</u> -4.95
- $\frac{3}{10}$ <u>=</u> $\frac{15}{50}$
- $\frac{4}{5}$ <u>></u> $\frac{39}{50}$
- $\frac{16}{45}$ <u>=</u> $0.355\ldots$

34 Enuncia las siguientes propiedades de la potenciación y la radicación.

- $(\mathbf{x} \times \mathbf{y})^{\mathbf{n}} = \mathbf{x}^{\mathbf{n}} \times \mathbf{y}^{\mathbf{n}}$
- $\sqrt[n]{\mathbf{x} \times \mathbf{y}} = \sqrt[n]{\mathbf{x}} \times \sqrt[n]{\mathbf{y}}$
- $\left(\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{y}}\right)^{\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{x}^{\mathbf{n}}}{\mathbf{y}^{\mathbf{n}}}$
- $\sqrt[n]{\mathbf{x} \times \mathbf{y}} = \frac{\sqrt[n]{\mathbf{x}}}{\sqrt[n]{\mathbf{y}}}$

Modela y representa

35 Representa en una recta numérica cada uno de los números racionales siguientes.

- $\frac{5}{4}$
- $\frac{3}{10}$
- -3.8
- $\frac{7}{8}$
- $-\frac{12}{3}$
- $\frac{6}{5}$

36 Escribe los siguientes números decimales en forma de fracción.

- 0.345 $\frac{69}{200}$
- $1.2323\ldots$ $\frac{122}{99}$
- $0.12323\ldots$ $\frac{61}{495}$
- 1.082 $\frac{541}{500}$
- $0.099\ldots$ $\frac{1}{10}$
- $5.1033\ldots$ $\frac{1\,531}{300}$

Usa algoritmos

37 Efectúa las operaciones.

- $\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{3}\right) + \left(-\frac{3}{4}\right) - \frac{6}{5}$ $-\frac{67}{60}$
- $(-6) \times \left(-\frac{5}{12}\right) \times \left(\frac{4}{15}\right)$ $\frac{2}{3}$
- $\left(-\frac{8}{5}\right) \div \left(\frac{3}{16}\right)$ $-\frac{128}{15}$

38 Obtén las potencias siguientes.

- $\left(\frac{4}{15}\right)^2$ $\frac{16}{225}$
- $\left(-\frac{5}{4}\right)^3$ $\frac{125}{64}$
- $\left(\frac{1}{6}\right)^{-3}$ 216
- $\left(-\frac{3}{5}\right)^{-4}$ $\frac{625}{81}$

39 Construye cinco números racionales comprendidos entre … *Respuestas libres*

- … -0.5 y -0.51
- … 0 y $\frac{1}{100}$

40 Efectúa.

- $\left(\frac{4}{7}\right)^8 \times \left(\frac{4}{7}\right)^2 \times \left(\frac{4}{7}\right)^{-8}$ $\frac{16}{49}$
- $\left(-\frac{3}{4}\right)^4 \times \left(-\frac{3}{4}\right)^2 \times \left(-\frac{3}{4}\right)^{-7}$ $-\frac{4}{3}$
- $\left(\frac{6}{5}\right)^{12} \times \left(\frac{6}{5}\right)^{-7} \div \left(\frac{6}{5}\right)^4$ $\frac{6}{5}$

41 Obtén el resultado en cada caso.

- $-5\sqrt{3} + 2\sqrt{12} - \sqrt{3} + \sqrt{27}$ $\sqrt{3}$
- $(2\sqrt{11}) \times (-3\sqrt{11})$ -66
- $(-8\sqrt{7}) \div (-2\sqrt{28})$ 2

Razona y argumenta

42 Explica por qué no existe un número **x** que haga verdadera a la igualdad $\mathbf{x}^2 = -16$.

Ningún número elevado al cuadrado proporciona un número negativo.

Conecta

43 Resuelve el problema.

La potencia, **P**, de un aparato eléctrico depende del cuadrado de la corriente eléctrica, **i**, que pasa a través suyo. La potencia de una plancha eléctrica, en vatios, se calcula con $\mathbf{P} = 20 \times \mathbf{i}^2$. La corriente se mide en amperios. ¿Qué corriente circula por la plancha si su potencia se estima en unos 1 200 vatios?

7.7 amperios.

44 Escribe en notación científica los valores de las siguientes magnitudes físicas.

- Peso de un elefante adulto: 6 500 kg. *6.5×10^3 kg*
- Velocidad del sonido en el aire: 34 400 cm/s. *3.44×10^4 cm/s*
- Espesor de un cabello : 0.00007 m. *7×10^{-5} m*
- Longitud de una bacteria: 0.0000002 mm *2×10^{-7} mm*
- Peso de un colibrí : 0.00725 kg. *7.25×10^{-3} kg*

Sugerencias didácticas para la evaluación

- Es importante verificar, antes de dar inicio a las actividades de evaluación, que sus estudiantes identifican los números racionales y los procedimientos para resolver las operaciones que los involucran. Observe que efectúen de forma correcta las operaciones con paréntesis, potencias y radicales. Aclare al grupo que, si las operaciones con paréntesis no se resuelven con el orden correcto, los resultados serán incorrectos.
- Si cuenta con tecnología como refuerzo, puede aplicar la prueba de la unidad que se encuentra en la plataforma didáctica Pleno.

45 **Estudio de caso**. Lean y, luego, hagan lo que se les pide.

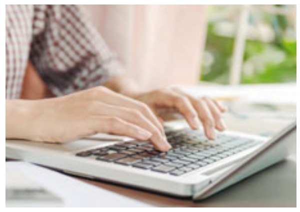
En todo proceso de medida son inevitables los errores. Esos errores tienen distinta procedencia: la limitada precisión, defectos e imperfecciones del mismo; factores ambientales, accidentes o poca destreza de quienes miden. Para obtener la medida de una magnitud deben realizarse varias pruebas, con el fin de tener una idea de su valor más probable. Este valor más probable es la media aritmética de los resultados obtenidos en cada prueba.

- Hagan cinco mediciones, con una regla graduada en centímetros, de la longitud de un mismo objeto y anoten los resultados obtenidos. ¿Fueron iguales esos resultados?
- Sumen todos los resultados y dividan la suma obtenida por 5. Este cálculo proporciona el valor más probable de la longitud del objeto.
- Calculen el error absoluto, **E**, de las medidas obtenidas en cada prueba:

E = Valor obtenido – valor más probable.

46 Piensa y, luego, responde.

- ¿Qué importancia concedes a la ciencia y la tecnología?
- ¿Aceptas sus innovaciones de inmediato o piensas en sus posibles consecuencias para la vida humana?
- ¿Por qué es recomendable que los avances científicos y tecnológicos se evalúen antes de ser aceptados?



APRENDIZAJE AUTÓNOMO

47 Marca según tus logros.

	Iniciado	En proceso	Logrado
Identifico, represento y ordeno números racionales.			
Obtengo la fracción generatriz de un decimal.			
Efectúo correctamente operaciones con racionales.			
Escribo números en notación científica.			
Resuelvo problemas con números racionales.			

48 Reflexiona sobre tu aprendizaje.

- ¿Consideras que te será útil en la vida cotidiana lo aprendido en esta unidad? ¿Por qué?
- ¿En cuáles situaciones de tu vida diaria utilizarías números racionales?

Sugerencias didácticas para la evaluación

- Pregunte a sus estudiantes:
  — *¿Cuáles números forman parte del conjunto de los números racionales?*
  — *¿Es posible representar cualquier número racional sobre la recta numérica?*
  — *¿Cuál es el signo del resultado de multiplicar o dividir dos cantidades con signos iguales?*

Estudio de caso

- En la actividad 45, deberán leer cuidadosamente el problema propuesto y las instrucciones, después, hacer lo que se les indica. En este caso, realizarán cinco mediciones con una regla graduada en centímetros, luego, sumarán los resultados para obtener el promedio de la medidas y, por último, determinarán el error absoluto como se les indica. Motivarles para que comenten los resultados en el grupo.

Actitudes y valores

Ciencia y tecnología

En la sección destinada a *Actitudes y valores*, actividad 46, responderán qué importancia conceden a la ciencia y la tecnología. Dirán si aceptan las innovaciones de inmediato o piensan en sus posibles consecuencias para la vida humana. Expresarán por qué es recomendable que los avances científicos y tecnológicos se evalúen antes de ser aceptados.

Aprendizaje autónomo

- En este apartado *Aprendizaje autónomo*, actividad 47, evaluarán por ellos mismos si los conceptos y procedimientos que trabajaron en la unidad se encuentran en estado de iniciación, en proceso o logrados. En la actividad 48, reflexionarán sobre su proceso de aprendizaje.

Aprender a aprender

Pregunte a sus estudiantes:

- *¿Les parecieron fáciles los conceptos y procedimientos desarrollados en esta unidad o tuvieron alguna dificultad? ¿Pudieron superar dicha dificultad? ¿Cuáles pasos dieron para superar el problema?*

3 Variación proporcional

COMPETENCIAS

Específicas

- **Razona y argumenta**: **Identifica** los números racionales. **Crea** y **expresa** argumentos matemáticos sobre las propiedades de los números racionales.
- **Comunica**: **Escribe** y **modela** un número racional a través de diferentes expresiones.
- **Usa algoritmos**: **Sigue** las reglas que le permiten obtener un resultado al operar con números racionales.
- **Conecta**: **Aplica** las operaciones con números racionales para resolver problemas de situaciones del contexto, de otras ciencias y de la propia Matemática.
- **Resuelve problemas**: **Resuelve** problemas de situaciones cotidianas que involucren diferentes operaciones con números racionales.
- **Utiliza herramientas tecnológicas**: **Utiliza** soportes tecnológicos como la Internet, la calculadora científica y otros dispositivos.

Fundamentales

Resolución de problemas: **Plantea** y **resuelve** problemas sobre situaciones del entorno que involucran operaciones con números racionales.

Científica y tecnológica: **Manifiesta** interés por la investigación científica y por la búsqueda de la verdad.

CONTENIDOS

Conceptos

- Razones y proporciones.
- Magnitudes directamente proporcionales.
- Magnitudes inversamente proporcionales.
- Regla de tres.
- Porcentajes.
- Interés simple.

Procedimientos

- Uso de proporciones para resolver problemas de variación proporcional.
- Diferenciación entre las relaciones proporcionales directas e inversas.
- Resolución de problemas que involucran cálculo de porcentajes usando proporciones.
- Cálculo de porcentajes, monto de interés simple, mensual y anual.

Actitudes y valores

- Muestra interés por la investigación científica.
- Aprecia la búsqueda de la verdad.

Tiempo estimado de trabajo: 2 semanas

INDICADORES DE LOGRO

- **Identifica** y **representa** proporciones.
- **Calcula** los términos de una proporción.
- **Reconoce** y **representa** gráficamente una proporcionalidad directa.
- **Reconoce** y **representa** gráficamente una proporcionalidad inversa.
- **Resuelve** problemas utilizando la regla de tres.
- **Calcula** correctamente porcentajes de cantidades.
- **Calcula** el interés simple, mensual y anual y, el monto de una deuda al final de un período.
- **Resuelve** problemas de contextos diversos que impliquen el cálculo de porcentaje, interés simple y monto en diversas situaciones de la vida cotidiana.
- **Utiliza** recursos virtuales y electrónicos: computadora, softwares educativos, juegos interactivos y otros, en la búsqueda de información.

Valor transversal: Ciencia y tecnología

Recursos digitales

Plataforma digital

CD

BIBLIOTECA DEL DOCENTE

- DOCUMENTOS PARA LA PLANIFICACIÓN
- GUÍA DE RECURSOS TIC

CUADERNO DE ACTIVIDADES

UNIDAD 3	Variación proporcional

RECURSOS DE REFUERZO Y AMPLIACIÓN

LibroMedia

ACTIVIDADES INTERACTIVAS

PÁGINA 47	Proporciones con animales
PÁGINA 50	Proporcionalidad directa
PÁGINA 54	El cuarto térmico, proporcionalidad directa
PÁGINA 56	Problemas

RECURSOS MULTIMEDIA

PÁGINA 48	Animación: Proporcionalidad

CD DE RECURSOS DIGITALES: PLAN REGULAR

Pleno — PRUEBA DE EVALUACIÓN FORMATIVA DE LA UNIDAD

Estrategias pedagógicas

- Recuperación de experiencias previas.
- Trabajo en equipo.
- Aprendizaje basado en problemas (ABP).

Unidad 3

Competencias de la unidad

- **Lee** y **comenta** las informaciones expuestas en el apartado *Punto de partida*.
- **Responde** preguntas relacionadas con las informaciones expuestas en el apartado *Punto de partida*.
- **Recupera** experiencias vividas mediante la observación de las imágenes de la ilustración.
- **Responde** preguntas vinculadas a sus experiencias previas sobre los conceptos que desarrollarán en la unidad en el apartado *Recuperación de conocimientos*.
- **Responde** preguntas vinculadas a las aplicaciones cotidianas de los conceptos que desarrollarán en la unidad en el apartado *Observación*.

Apertura de la unidad

Dentro de los objetivos principales de la apertura de esta unidad se encuentran el plantear una situación de aprendizaje, una problemática o un texto que sirve para contextualizar el tema de la unidad. Todo esto con la finalidad de motivar y despertar la curiosidad de los estudiantes.

A partir de la situación o texto planteado y las imágenes de la ilustración se conecta al estudiante con el tema a tratar, a la vez que se vincula la realidad o cotidianidad con los temas que se van a desarrollar.

Todos los elementos que conforman la portada promueven la recuperación de experiencias o conocimientos previos y la motivación o el interés por los conocimientos que adquirirán en la unidad.

3 Variación proporcional

Punto de partida

Sandra estaba en el jardín de su casa y observó en un arbusto un insecto muy colorido y a su lado un paquetito de pequeños huevos blancos. Contó hasta 15 de esos pequeños huevos. Reparó que, en algunas otras ramitas, más insectos de la misma clase habían puesto el mismo número de huevecillos. Contó 8 insectos.

Se preguntó: *¿Estos insectos le harán algún daño a la planta?¿Cuántos huevecillos habrá en total? Tal vez,* pensó, *estos insectos traigan beneficios a la planta*. Había leído que algunos insectos sirven para controlar o eliminar las plagas.

- ¿Has escuchado hablar del control biológico de plagas?
- ¿Qué ventajas tiene para la salud del medio ambiente?

Conceptos y procedimientos

- Razones y proporciones.
- Magnitudes directamente proporcionales.
- Magnitudes inversamente proporcionales.
- Regla de tres.
- Porcentajes.
- Interés simple.

Actitudes y valores

- Muestra interés por la investigación.
- Aprecia la búsqueda de la verdad.

RECUPERACIÓN DE CONOCIMIENTOS

- Responde.
  - ¿Cómo varía el número de huevecillos conforme aumenta el número de insectos?
  - ¿Cómo escribirías mediante una razón la afirmación: *hay 8 huevecillos por cada insecto*?
- **Completa** la tabla.

Número de insectos	1	2	3	4	5	6	7	8
Número de huevos	8	16	24	32	40	48	56	64

46

Trabajo colectivo de apertura

- **Punto de partida:** Guíe a sus estudiantes a leer y comentar en el grupo las informaciones expuestas en el apartado *Punto de partida*, relacionadas con la relación de insectos y el número de huevos. Haga que respondan las preguntas que aparecen al final del texto.
- **Recuperación de conocimientos:** Las preguntas de este apartado permiten hacer un diagnóstico de los conocimientos y las experiencias previas.
- **Observación:** En este apartado se plantean preguntas relacionadas con los insectos que aparecen en la ilustración.

OBSERVACIÓN

- ¿Conoces algunos de los insectos mostrados en las ilustraciones de estas páginas?
- ¿Qué importancia tienen los insectos para la sostenibilidad de la vida en nuestro planeta?
- ¿En cuáles lugares los has visto?
- ¿Cuántas especies distintas de insectos existen? Investígalo.

Esquema conceptual de la unidad

Variación proporcional

Dos cantidades pueden formar

Razones — *con las cuales se forman*

Proporciones

con aplicaciones en

- Cálculo de porcentajes
- Obtención de intereses y montos

Actividad de motivación

Pida a sus estudiantes que lean en la sección: *Conceptos y procedimientos*, los temas que trabajarán en la unidad y las actitudes y valores que estarán presentes en el desarrollo de la misma. Luego, para que interioricen la importancia de las razones y las proporciones en la vida cotidiana, plantearles la siguiente situación:

- Cuando decimos que en un almuerzo para 20 personas se preparan 10 libras de arroz:
  - *¿Cuál es la razón del número de personas y la cantidad de arroz?*
  - *¿Qué cantidad de arroz se requeriría si se redujera a 5 el número de personas?*

Actividad interactiva

Proporciones con animales

El recurso es una actividad interactiva en la que calcularán razones diversas, partiendo de las informaciones registradas en una tabla.

Actitudes y valores

Ciencia y tecnología

Aproveche la situación planteada en el apartado *Punto de partida* y en las imágenes de la ilustración para conversar con sus estudiantes sobre la importancia de velar por mantener el equilibrio en la naturaleza. El conjunto de seres vivos presentes en la naturaleza es necesario para la continuidad de la vida en el planeta.

Indicadores de logro

- **Identifica** y **representa** diversas proporciones.
- **Calcula** los términos de una proporción.

Animación

Proporcionalidad

Animación interactiva con audio que desarrolla en varias etapas el concepto de proporcionalidad en situaciones de la vida cotidiana, además, consta de diversos ejercicios interactivos de proporcionalidad directa.

Previsión de dificultades

Es posible que los estudiantes no logren asociar expresiones cotidianas con razones. Muéstreles algunos ejemplos y motive al grupo a escribir las razones presentes en las siguientes expresiones:

- Por cada tres libras de harina se agregan 6 huevos.

  Resp.: 3/6.

- Por cada 12 cortinas se utilizaron 48 yardas de tela.

  Resp.: 12/48.

- Cada 4 horas un automóvil recorre 320 kilómetros.

  Resp.: 320/4.

- En una granja, 5 vacas producen 100 galones de leche por día.

  Resp.: 5/100.

RECUPERACIÓN

- *Escribe las afirmaciones siguientes en forma de razón.*
  - *En el gimnasio hay 5 mujeres por cada 4 hombres.*
  - *Por cada 10 kilovatios-hora de energía se pierden 2.*
  - *Por cada 2 libras de azúcar, 3 libras de harina.*

1 Proporciones

La razón de dos cantidades, **x** e **y**, es el cociente entre ellas. Este cociente se presenta en forma indicada, $\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{y}}$. La razón anterior también se representa mediante la expresión: **x** : **y**.

Una proporción es la igualdad de dos razones. Si **x**, **y**, **z** y **w** son cuatro cantidades, una proporción entre ellas se escribiría: $\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{y}} = \frac{\mathbf{z}}{\mathbf{w}}$. Otra forma de representar a la proporción anterior es: **x** : **y** : : **z** : **w**.

Fíjate en los siguientes ejemplos de proporciones.

EJEMPLOS:

- $\frac{4}{2} = \frac{12}{6}$. Ambas razones son iguales a 2.
- $\frac{5}{8} = \frac{20}{32}$. Ambas razones son iguales a 0.625.
- $\frac{1}{3} = \frac{8}{24}$. Ambas razones son iguales a 0.33...

2 Medios y extremos de una proporción

A las cantidades **x** y **w** en la proporción $\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{y}} = \frac{\mathbf{z}}{\mathbf{w}}$ se les llama extremos. A las cantidades **y** y **z** se les llama medios.

Así, en la proporción $\frac{5}{8} = \frac{20}{32}$, 5 y 32 son los extremos; 8 y 20 son los medios.

En toda proporción, el producto de los extremos es igual al producto de los medios: **x** x **w** = **y** x **z**.

EJEMPLOS RESUELTOS:

- En la proporción $\frac{5}{8} = \frac{20}{32}$:

  5 x 32 = 8 x 20 ▶ 160 = 160.

- En la proporción $\frac{3}{7} = \frac{12}{28}$:

  3 x 28 = 7 x 12 ▶ 84 = 84.

Esta propiedad de las proporciones permite saber si una igualdad de razones es o no una proporción. Equivale a la multiplicación en cruz utilizada para establecer la igualdad o equivalencia de dos números racionales en forma de fracción.

Sugerencias didácticas

- **Inicio:** Oriente a sus estudiantes para que lean y respondan en el aula la pregunta vinculada a la recuperación de experiencias previas propuesta en el apartado *Recuperación*, en la que escribirán las razones de las expresiones dadas.
- **Desarrollo:** Pida a sus estudiantes que lean cuidadosamente el contenido de la doble página y que observen las ilustraciones. Formúleles preguntas vinculadas al contenido, como por ejemplo: *¿Qué es la razón de dos cantidades? ¿Qué es una proporción? ¿Cuáles son las partes de una proporción?*

3 Proporciones equivalentes

Si en la proporción $\frac{x}{y} = \frac{z}{w}$ se intercambian las posiciones de los extremos, **x** y **w**; de los medios, **y** y **z**, o de los extremos y los medios entre sí, se obtienen:

$\frac{w}{y} = \frac{z}{x}$ $\qquad \frac{x}{z} = \frac{y}{w}$ $\qquad \frac{y}{x} = \frac{w}{y}$

Estas proporciones son equivalentes a la original.

EJEMPLOS:

- $\frac{6}{3} = \frac{24}{12}$, es equivalente a: $\frac{12}{3} = \frac{24}{6}$.
- $\frac{4}{5} = \frac{36}{45}$, es equivalente a: $\frac{4}{36} = \frac{5}{45}$.
- $\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$, es equivalente a: $\frac{4}{3} = \frac{8}{6}$.

4 Cuarta proporcional

Una cualquiera de las cuatro cantidades o términos de una proporción es una cuarta proporcional.

Un extremo desconocido se calcula dividiendo el producto de los medios por el extremo conocido.

Un medio desconocido se obtiene dividiendo el producto de los extremos por el medio conocido.

EJEMPLOS RESUELTOS:

- Si $\frac{x}{9} = \frac{20}{36}$, entonces: $x = \frac{(9 \times 20)}{36} = 5$.
- Si $\frac{4}{9} = \frac{x}{49}$, entonces: $x = \frac{(4 \times 49)}{9} = 28$.

MÁS INFORMACIÓN

Media proporcional

Cuando dos extremos o dos medios de una proporción son iguales, a dichos extremos o medios se les llama media proporcional.

Ejemplos:

- En la proporción $\frac{6}{9} = \frac{4}{6}$, el 6 es la media proporcional.
- En la proporción $\frac{2}{12} = \frac{12}{72}$, el 12 es la media proporcional.

Una proporción como la de los ejemplos, con dos extremos o dos medios iguales, es una proporción continua.

En una proporción continua, una media proporcional desconocida es igual a la raíz cuadrada del producto de los extremos o los medios conocidos.

ACTIVIDADES

1. Construye una proporción a partir de las razones siguientes.
   - $\frac{9}{5}$ • $\frac{12}{7}$ *Respuestas libres.* • $\frac{18}{15}$ • $\frac{1}{21}$ • $\frac{6}{35}$ • $\frac{21}{6}$
2. Escribe una proporción equivalente a cada una de las proporciones dadas.
   - $\frac{2}{3} = \frac{12}{18}$ *Respuestas libres.* • $\frac{7}{4} = \frac{35}{20}$ • $\frac{9}{4} = \frac{72}{32}$ • $\frac{6}{17} = \frac{48}{136}$
3. Calcula el término desconocido de cada proporción.
   - $\frac{x}{7} = \frac{27}{63}$ $x = 3$ • $\frac{9}{5} = \frac{x}{60}$ $x = 108$ • $\frac{x}{3} = \frac{27}{x}$ $x = 9$ • $\frac{2}{15} = \frac{8}{x}$ $x = 60$ • $\frac{11}{x} = \frac{4}{44}$ $x = 22$

- **Desarrollo:** Explique a sus estudiantes los ejemplos resueltos y haga que los desarrollen en sus cuadernos. Motíveles para que resuelvan otros ejercicios. Pregúnteles: *¿Cuáles son los pasos para obtener la cuarta proporcional?* Pídales que lean y reproduzcan el contenido del apartado *Más información*, que trata sobre el concepto de media proporcional. Diseñe otros ejemplos similares, invíteles a la pizarra.
- **Cierre:** Motive a sus estudiantes a realizar los ejercicios del apartado *Actividades*. En la actividad 1, construirán una proporción a partir de las razones dadas. En la actividad 2, escribirán una proporción equivalente a cada una de las proporciones dadas. En la actividad 3, calcularán el término desconocido de cada proporción.

Atención a la diversidad

Actividades de refuerzo: Pida a sus estudiantes que determinen el término desconocido en cada proporción.

- 2/4 = 8/**x**. Resp.: **x** = 16.
- **x**/8 = 21/24. Resp.: **x** = 7.
- 6/**x** = 2/4. Resp.: **x** = 12.
- 6/9 = **x**/45. Resp.: **x** = 30.
- **x**/4 = 18/24. Resp.: **x** = 3.
- 8/**x** = 2/4. Resp.: **x** = 16.
- 20/40 = 2/**x**. Resp.: **x** = 4.
- 2/7 = **x**/35. Resp.: **x** = 10.

Ficha 15.

Actividades de ampliación: Pida a sus estudiantes que encierren las igualdades que no son proporcionales.

- 15/25 = 6/5. Resp.: No es p.
- 40/60 = 20/30.
- 12/20 = 8/10. Resp.: No es p.
- 18/36 = 10/12. Resp.: No es p.
- 3/5 = 9/15.

Aprender a aprender

Pregunte al grupo:

- *¿Qué conocimientos previos acerca de las proporciones habían trabajado en el curso anterior?*
- *¿Podrían dar algún ejemplo de aplicación a las proporciones?*

Indicadores de logro

- **Reconoce** y **representa** gráficamente una proporcionalidad directa.

Actividad interactiva

Proporcionalidad directa

Actividad interactiva en la que completarán tablas de proporcionalidad directa a partir de datos suministrados a través de los problemas que se les plantean.

Más información

Explique a sus estudiantes que si dos cantidades o magnitudes son directamente proporcionales, el comportamiento de ambas siempre será el mismo: si una aumenta, la otra aumenta; y si una disminuye, la otra también. Por ejemplo:

- Un vehículo, a una velocidad constante, recorre en dos horas 50 kilómetros, en cuatro horas recorre 100 kilómetros, en 10 horas recorre 250 kilómetros, etc.
- En una granja, 10 gallinas consumen 20 libras de alimento. *¿Cuántas libras consumirán 5 gallinas?*

  Resp.: 10 libras.

Pregunte al grupo:

- *¿Qué ocurrió con las cantidades en el primer caso?*

  Resp.: Aumentaron.
- ¿Qué ocurrió con las cantidades en el segundo caso?

  Resp.: Disminuyeron.

RECUPERACIÓN

- *Completa* la tabla.

x 4

3	12
5	20
7	28
9	36
15	60

1 Proporcionalidad directa

Un entomólogo comprobó en una investigación que la población de un insecto que ataca a los cultivos de habichuela se duplica cada semana.

Con los datos reunidos durante su investigación construyó la siguiente tabla de variación:

Tiempo (en semanas)	1	2	3	4	5	6
Población del insecto	250	500	750	1 000	1 250	1 500

La tabla muestra que cada semana el número de insectos aumenta en 250 individuos.

Si representamos al tiempo con la letra **X** y a la población de insectos con la letra **Y**, entonces: $\mathbf{Y} = 250 \times \mathbf{X}$.

Las magnitudes tiempo, **X**, y población, **Y**, se llaman variables. El número $\frac{\mathbf{X}}{\mathbf{Y}} = 250$ es la constante de proporcionalidad directa:

$$\frac{\mathbf{X}}{\mathbf{Y}} = \frac{250}{1} = \frac{500}{2} = \frac{750}{3} = \ldots \ldots = \ldots \ldots \ldots = 250.$$

Si dos magnitudes variables, **X** e **Y**, están relacionadas mediante una expresión del tipo **Y** = constante x **X**, dichas magnitudes son directamente proporcionales.

2 Propiedades de la proporcionalidad directa

1. En una proporcionalidad directa, al multiplicar (o dividir) a la variable **X** por un número **n**, la variable **Y** queda multiplicada (o dividida) por el mismo número **n**:

   $\mathbf{Y'} = \text{constante} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{X}) = \mathbf{n} \times (\text{constante} \times \mathbf{X}) = \mathbf{n} \times \mathbf{Y}$.

   Si se multiplica $\mathbf{X} = 2$ por $\mathbf{n} = 3$, en $\mathbf{Y} = 250 \times \mathbf{X}$:

   $\mathbf{Y} = 250 \times (3 \times \mathbf{X}) = 250 \times (3 \times 2) = 3 \times 500 = 1\,500.$

2. La suma de dos valores distintos de la variable **Y**, $\mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_2$ es directamente proporcional a la suma de los correspondientes valores de la variable **X**, $\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2$:

   $$\mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_2 = \text{constante} \times (\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2).$$

   En la tabla, si se suman $\mathbf{Y}_1 = 500$ e $\mathbf{Y}_2 = 750$:

   $\mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_2 = 500 + 750 = 250 \times 2 + 250 \times 3 = 250 \times (2 + 3).$

RECUERDA

Tablas de variación proporcional

Una tabla de variación proporcional muestra en una columna o fila los valores de una magnitud **X** y en otra columna o fila los correspondientes valores de otra magnitud **Y**, ambas relacionadas mediante una variación proporcional.

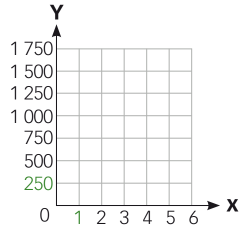
Sugerencias didácticas

- **Inicio:** Oriente a sus estudiantes para que lean y respondan en el aula la actividad vinculada a recuperación de experiencias previas propuesta en el apartado *Recuperación*, en la que completarán una tabla de proporcionalidad directa.
- **Desarrollo:** Pida a sus estudiantes que lean cuidadosamente el contenido de la doble página y que pongan atención a los ejemplos. Formúleles preguntas vinculadas al contenido como por ejemplo: *¿Cuál es el comportamiento de dos variables directamente proporcionales?* Discuta con el grupo las informaciones del apartado *Recuerda,* sobre los elementos de una tabla de variación proporcional.

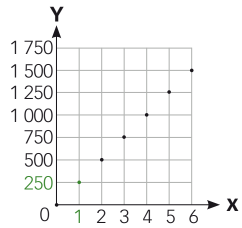
3 Representación gráfica de una proporcionalidad directa

Si se representan los valores de la variable **X** de la tabla anterior sobre una recta horizontal y los de la variable **Y** sobre una recta vertical, la proporcionalidad directa entre las variables **Y** = 250 x **X** puede representarse gráficamente.

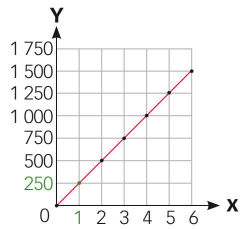
Primero, se construye una cuadrícula con los valores de **X** e **Y** de la tabla de variación proporcional.



Luego, se marcan puntos (**X**, **Y**) que corresponden a los valores de cada una de las columnas de la tabla:



Finalmente, se unen los puntos (**X**, **Y**) y el resultado obtenido es una línea recta, que es la representación gráfica de la proporcionalidad directa.



Plaga. La expansión de una plaga sigue pautas matemáticas.

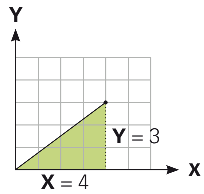
MÁS INFORMACIÓN

Obtención de la constante de proporcionalidad en una gráfica

En una gráfica, la constante de proporcionalidad es el cociente de la altura **Y** del triángulo y su base **X**.

Ejemplo:

La constante de proporcionalidad en la gráfica siguiente es $\frac{3}{4}$.



ACTIVIDADES

4 Identifica las tablas que representan proporcionalidades directas.

2	3	5	9
6	8	15	27

No.

1	5	8	15
2.5	12.5	20	37.5

Sí.

0	4	7	9
0	20	35	45

Sí.

1.5	2.4	5.6	8
9	14.4	33.6	46

No.

5 Representa gráficamente las siguientes relaciones de proporcionalidad directa.

- **Y** = 3 x **X**
- **Y** = 0.5 x **X**
- **Y** = $\frac{3}{4}$ x **X**
- **Y** = 400 x **X**

6 Explica, en tu cuaderno, por qué la distancia recorrida por un vehículo con rapidez constante es directamente proporcional al tiempo transcurrido.

Atención a la diversidad

Actividades de refuerzo: Pida al grupo que completen las siguientes tablas de proporcionalidad directa.

Cantidad	2	4	6	8	10
Libras	12	24	36	48	60

Horas	5	10	15	20
Kilómetros	60	120	180	240

Botellas	2	7	8	10
Litros	5	17.5	20	25

Cajas	4	6	10	15
Vasos	100	150	250	375

Ficha 16.

Actividades de ampliación: Pida a sus estudiantes que construyan en sus cuadernos las gráficas de las tablas que completaron en las actividades de refuerzo.

- **Desarrollo:** Pida a sus estudiantes que comenten el contenido del apartado *Más información*, que trata sobre la obtención de la constante de proporcionalidad en una gráfica. Desarrolle este y algunos ejemplos más en la pizarra. Pregúnteles: *¿Cómo se construye una gráfica de proporcionalidad directa?* Discuta las diversas respuestas en el grupo.
- **Cierre:** Motive a sus estudiantes a realizar los ejercicios del apartado *Actividades*. En la actividad 4, identificarán las tablas que representan proporcionalidades directas. En la actividad 5, representarán gráficamente las relaciones de proporcionalidad directa indicadas. En la actividad 6, explicarán por qué la distancia recorrida por un vehículo con rapidez constante es directamente proporcional al tiempo transcurrido.

Aprender a aprender

Pregunte a sus estudiantes:

- *¿Podrían dar un ejemplo de la vida diaria de aplicación de las magnitudes directamente proporcionales?*
- *¿Qué deben tomar en cuenta para elaborar el ejemplo?*

Indicadores de logro

- **Reconoce** y **representa** gráficamente una proporcionalidad inversa.

RECUPERACIÓN

- *Resuelve el problema siguiente y, luego, describe qué hiciste para resolverlo.*

  Si un grupo de 5 albañiles construye una pared en 4 días, ¿en cuántos días la hubieran construido 10 albañiles?

1 Proporcionalidad inversa

Conforme se comprime un gas en un recipiente herméticamente cerrado, aumenta la presión en las paredes del recipiente.

En un experimento de laboratorio, un grupo de estudiantes midió el volumen, en centímetros cúbicos; y la presión, en atmósferas, de un gas confinado en un tubo de vidrio y construyó la tabla siguiente:

Volumen (en cm^3)	15	7.5	5	3	2
Presión (en atm)	1	2	3	5	7.5

En la tabla se observa que una disminución del volumen del gas tiene como efecto un aumento en su presión. El aumento de una de las variables medidas en el experimento está relacionado con la disminución de la otra.

Si el volumen se representa con la letra **X** y la presión con la letra **Y**, de la observación atenta de la tabla se infiere que: $\mathbf{X} \times \mathbf{Y} = 15$.

En este caso, el producto de los valores de una columna de la tabla no varía, es 15. El número 15 es la constante de proporcionalidad:

$$\mathbf{X} \times \mathbf{Y} = 15 \times 1 = 7.5 \times 2 = 5 \times 3 = \ldots\ \ldots\ \ldots = 15.$$

Dos magnitudes variables, **X** e **Y**, relacionadas mediante una expresión del tipo $\mathbf{Y} = \frac{\text{constante}}{\mathbf{X}}$, son inversamente proporcionales.

2 Propiedades de la proporcionalidad inversa

1. En una proporcionalidad inversa, al multiplicar (o dividir) a la variable **X** por un número **n**, la variable **Y** queda dividida (o multiplicada) por el mismo número **n**:

$$\mathbf{Y'} = \frac{\text{constante}}{(\mathbf{n} \times \mathbf{X})} = \frac{(\text{constante} \times \mathbf{X})}{\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{Y}}{\mathbf{n}}.$$

Si se multiplica $\mathbf{X} = 2$ por $\mathbf{n} = 5$, en $\mathbf{Y} = \frac{15}{\mathbf{X}}$:

$$\mathbf{Y'} = \frac{15}{(5 \times \mathbf{X})} = \frac{(15 \div 2)}{5} = \frac{7.5}{5} = 1.5.$$

2. La suma de dos valores distintos de la variable **Y**, $\mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_2$, es inversamente proporcional a la suma de los correspondientes valores de la variable **X**, $\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2$:

$$\mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_2 \neq \frac{\text{constante}}{(\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2)}.$$

Más información

Explique a sus estudiantes que si dos cantidades o magnitudes son inversamente proporcionales, el comportamiento de una magnitud es contrario al de la otra; si una aumenta, la otra disminuye. Por ejemplo:

- Fíjate en la tabla que muestra el número de modistas utilizadas para diseñar 60 vestidos.

Modistas	1	2	3	4
Vestidos	60	30	20	15

Pregunte al grupo:

- *¿Qué ocurre cuando una de las variables aumenta? Resp.: La otra disminuye.*
- *¿Qué opción es la más recomendable si se quieren diseñar los vestidos en el menor tiempo posible? Resp.: Utilizar 4 modistas.*
- *¿Cómo se distribuirían los vestidos si se escogen 5 modistas? Resp.: Cada modista diseñaría 12 vestidos.*

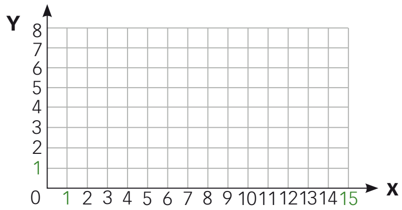
Sugerencias didácticas

- **Inicio:** Oriente a sus estudiantes para que resuelvan en sus cuadernos el problema de recuperación de experiencias previas propuesto en el apartado *Recuperación*, relacionado con el concepto de proporcionalidad inversa.
- **Desarrollo:** Haga que lean cuidadosamente el contenido de la doble página y que observen el desarrollo de los ejemplos. Formúleles preguntas vinculadas al contenido, como por ejemplo: *¿Qué ocurre con el producto de los valores en una tabla de proporcionalidad inversa?* Comente con el grupo las propiedades de la proporcionalidad inversa.

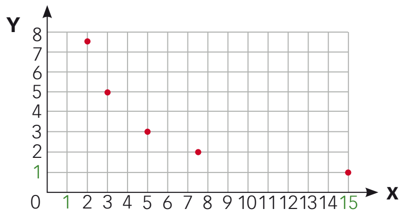
3 Representación gráfica de una proporcionalidad inversa

Como se hizo con la proporcionalidad directa, si se representan los valores de la variable **X** de la tabla anterior sobre una recta horizontal y los de la variable **Y** sobre una recta vertical, la proporcionalidad inversa entre las variables, $\mathbf{Y} = \frac{15}{\mathbf{X}}$, puede ser representada gráficamente.

Primero, se construye una cuadrícula con los valores de **X** e **Y** de la tabla de variación proporcional:

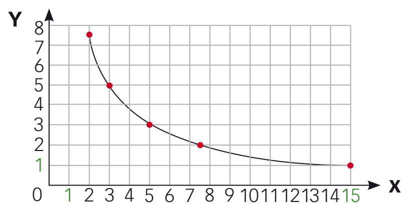


Luego, se marcan puntos (**X**, **Y**) que corresponden a los valores de cada una de las columnas de la tabla:



Finalmente, se unen los puntos (**X**, **Y**) y el resultado obtenido es una línea curva, que es la representación gráfica de la proporcionalidad directa. Esta línea curva se llama hipérbola.

Compresión de un gas. Al reducir el volumen de un gas encerrado, crece su presión.



ACTIVIDADES

7 Identifica las tablas que representan proporcionalidades directas.

1	2	4	5
5	8	1.25	1

Sí.

1	2	3	4
6	3	2	1.5

Sí.

2	3	5	6
9	20	3.5	3

No.

0.25	0.50	1	5
3	1.50	0.75	0.15

Sí.

8 Represента gráficamente las siguientes relaciones de proporcionalidad inversa.

- $\mathbf{Y} = \frac{1}{\mathbf{X}}$
- $\mathbf{Y} = \frac{4}{\mathbf{X}}$
- $\mathbf{Y} = \frac{0.5}{\mathbf{X}}$
- $\mathbf{Y} = \frac{20}{\mathbf{X}}$

9 Explica, en tu cuaderno, por qué la velocidad de un vehículo que recorre una distancia fija es inversamente proporcional al tiempo transcurrido.

Atención a la diversidad

Actividades de refuerzo: Forme a sus estudiantes en grupos de 3 o 4 integrantes. Luego, pídales que completen tablas de proporcionalidad inversa como las siguientes:

Frutas	12	15	20	30
Personas	5	4	3	2

Libros	100	200	400	800
Cajas	8	4	2	1

Sacos	1 500	3 000	4 500
Depósitos	6	3	2

Cajas	4 000	2 000	1 000
Camiones	1	2	4

Ficha 17.

Actividades de ampliación: Proponga al grupo que construyan en sus cuadernos las gráficas correspondientes a las tablas de proporcionalidad inversa que completaron en las actividades de refuerzo. Después, envíeles a la pizarra a fin de verificar que trabajaron en forma correcta.

- **Desarrollo:** Muestre a sus estudiantes los pasos para construir gráficas de variables inversamente proporcionales. Haga que desarrollen algunos ejemplos en sus cuadernos. Pregúnteles: *¿Cuáles son los pasos para graficar variables inversamente proporcionales?* Discuta las diversas respuestas en el grupo.
- **Cierre:** Motive a sus estudiantes a realizar los ejercicios del apartado *Actividades*. En la actividad 7, identificarán las tablas que representan proporcionalidades inversas. En la actividad 8, representarán gráficamente relaciones de proporcionalidad inversas. En la actividad 9, explicarán por qué la velocidad de un vehículo que recorre una distancia fija es inversamente proporcional al tiempo transcurrido.

Aprender a aprender

Pregunte a sus estudiantes:

- *¿Pueden expresar la diferencia entre las gráficas de variables directamente proporcionales y las de variables inversamente proporcionales?*

Indicadores de logro

- **Resuelve** problemas utilizando la regla de tres.

RECUPERACIÓN

- *Analiza y, luego, responde la siguiente pregunta.*

  ¿Cómo distingues las dos clases de proporcionalidad entre dos variables?

En la proporcionalidad directa, si una variable crece, la otra crece; si disminuye, la otra también.

En la proporcionalidad inversa, si una variable crece, la otra disminuye y viceversa.

1 Regla de tres

Hay numerosos problemas en los que están presentes magnitudes proporcionales de las cuales se conocen tres y se desconoce una.

Estos problemas se resuelven mediante la llamada regla de tres, que consiste en determinar el cuarto término de una proporción si se conocen tres de ellos. Antes de aplicar la regla se identifica si se está en presencia de una proporcionalidad directa o inversa.

2 Problemas de proporcionalidad directa

Observa en los ejemplos siguientes cómo se aplica la regla de tres en los problemas que involucran una proporcionalidad directa.

EJEMPLOS:

- Al colgar un objeto de 15 libras de peso en un dinamómetro, su resorte se estiró 3 centímetros. ¿Cuánto se estiraría el resorte si se colocara un objeto de 25 libras?

  Para resolver el problema construimos la siguiente tabla, en la que se muestran las tres magnitudes conocidas junto a la magnitud desconocida representada por la letra **x**.

Peso (en lb)	**Estiramiento** (en cm)
15 ↑	↑ 3
25	**x**

  A partir de la tabla se construye la siguiente proporción, tomando en cuenta el sentido de las flechitas rojas de cada columna: $\frac{25}{15} = \frac{\mathbf{x}}{3}$.

  El resorte se estiraría: $\mathbf{x} = \frac{25 \times 3}{15} = 5$ cm.

- Un vehículo recorre 80 kilómetros en 45 minutos. Si mantiene la misma velocidad, ¿en qué tiempo recorrerá 120 kilómetros?

Tiempo (en min)	**Distancia** (en km)
45 ↓	↓ 80
x	120

  La proporción correspondiente es: $\frac{\mathbf{x}}{45} = \frac{120}{80}$.

  El tiempo buscado es: $\mathbf{x} = 67.5$ minutos.

Actividad interactiva

El cuarto término, proporcionalidad directa

Actividad interactiva en la que los estudiantes completarán una tabla y una gráfica con datos directamente proporcionales.

Previsión de dificultades

Es posible que los estudiantes al inicio tengan problemas con identificar el tipo de proporcionalidad. Recomiéndeles que analicen si una variable aumenta al aumentar la otra, o si disminuye con el aumento de la otra. En en primer caso tendremos una proporcionalidad directa y, en el segundo, una inversa.

Sugerencias didácticas

- **Inicio:** Oriente a sus estudiantes para que lean y resuelvan en el aula la actividad vinculada a la recuperación de experiencias previas propuesta en el apartado *Recuperación*, en la que responderán una pregunta vinculada a las proporcionalidades directa e inversa.
- **Desarrollo:** Pídales que lean el contenido de la doble página y que observen los procedimientos aplicados en los ejemplos resueltos. Formúleles preguntas vinculadas al contenido, como por ejemplo: *¿Qué debe tomarse en cuenta para resolver un problema con la regla de tres?* Discuta con el grupo las diversas respuestas.

3 Problemas de proporcionalidad inversa

Fíjate cómo se utiliza la regla de tres para resolver problemas de proporcionalidad inversa en los ejemplos siguientes.

EJEMPLOS:

- En una finca modelo hay 250 bueyes que consumen una provisión de forraje en 20 días. ¿En qué tiempo consumirán la misma provisión 400 bueyes?

  Para resolver el problema construimos la siguiente tabla. Observa que las flechitas rojas tienen sentidos contrarios porque la proporcionalidad es inversa.

Número de bueyes	**Tiempo** (en días)
250 ↑	↓ 20
400	**x**

  A partir de la tabla se construye la siguiente proporción, tomando en cuenta el sentido de las flechitas rojas de cada columna:

  $$\frac{400}{250} = \frac{20}{\mathbf{x}}.$$

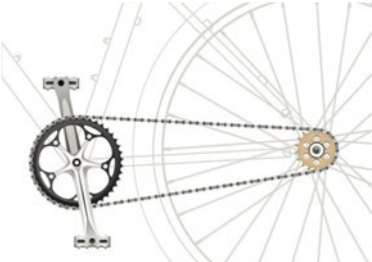
  El tiempo buscado es: $\mathbf{x} = \frac{250 \times 20}{400} = 12.5$ días.

- La mayor de las ruedas dentadas del engranaje de una bicicleta tiene un radio de 10 cm y la menor un radio de 6 cm. La mayor da menos vueltas por unidad de tiempo que la menor. ¿Cuántas vueltas da la rueda mayor cuando la menor da 250 vueltas?

Radio (en cm)	**Número de vueltas**
10 ↓	↑ **x**
6	250

  La proporción correspondiente es: $\frac{6}{10} = \frac{\mathbf{x}}{250}$.

  El número de vueltas de la rueda mayor es: $\mathbf{x} = 150$.



ACTIVIDADES

10 Resuelve los siguientes problemas.

- Un carro que se mueve con velocidad constante recorre 120 km en una hora y 15 minutos. ¿En qué tiempo recorrerá el carro una distancia de 160 km? *En una hora y 40 minutos.*
- Una cisterna se llena en 3 horas y media utilizando 2 mangueras de agua funcionando juntas y con el mismo caudal. ¿Con cuántas mangueras se llenará la cisterna en 1 hora? *Con 7 mangueras.*

- **Desarrollo:** Muestre a sus estudiantes el proceso de solución de los problemas con variables directas e inversamente proporcionales. Es importante, antes de resolver el problema, verificar si las variables son directas o inversamente proporcionales, de esto depende la correcta solución del mismo. Haga que desarrollen los ejemplos en sus cuadernos y diseñe otros más para la pizarra.
- **Cierre:** Motive a sus estudiantes a realizar los ejercicios propuestos en el apartado *Actividades*. En la actividad 10, en el primer caso, determinarán en qué tiempo recorrerá un carro una distancia de 160 km; en el segundo caso, calcularán con cuántas mangueras de agua se llenará una cisterna en una hora. Revise los resultados en el grupo.

Atención a la diversidad

Actividades de refuerzo: Haga que resuelvan los siguientes problemas:

- Una panadería produce en 7 días un estimado de 14 000 panes. *¿Cuántos panes producirá en 30 días?* Resp.: 60 000 panes.
- Para construir una plaza 18 hombres tardaron 90 días. *¿Cuántos hombres se requerirían para construir la misma plaza en 30 días?* Resp.: 54 hombres.
- Una fotocopiadora reproduce 1 500 copias en 2 horas. *¿Cuántas copias reproducirá la máquina en 5 horas?* Resp.: 3 750 copias.

Ficha 18.

Actividades de ampliación: Motive al grupo para que completen los datos de un problema y, luego, lo resuelvan. Por ejemplo:

- Un maquinaria pega 3 450 etiquetas en 3 horas.

  Respuestas posibles:

  — *¿Cuántas etiquetas pegaría en 12 horas?*

  Resp.: 13 800 etiquetas.

  — *¿En cuántas horas pegaría 6 600 etiquetas?*

  Resp.: 5.7 horas.

Aprender a aprender

Pregunte a sus estudiantes:

- ¿Pudieron identificar, sin dificultad, un problema de proporcionalidad directa o inversa?
- ¿En qué se diferencian un problema de otro?

Indicadores de logro

- **Calcula** correctamente porcentajes de cantidades.

Actividad interactiva

Problemas

Este recurso es una actividad interactiva en la que resolverán problemas que involucran cálculo de porcentajes partiendo de las situaciones planteadas.

Previsión de dificultades

Antes de desarrollar el tema, a manera de repaso, escriba algunos porcentajes en la pizarra con la finalidad de que los escriban en forma de fracción y en forma decimal. Por ejemplo:

- 25% = 25/100 = 0.25
- 6% = 6/100 = 0.06
- 18% = 18/100 = 0.18

Aclarar a los estudiantes que cuando se obtiene un determinado por ciento de una cantidad, por ejemplo, 25% de 200, obtenemos el mismo resultado si multiplicamos 200 por 25 y lo dividimos entre 100, que multiplicar 200 por 0.25.

- 25% de 200.
- 200 x 25/100 = 50.
- 200 x 0.25 = 50.

RECUPERACIÓN

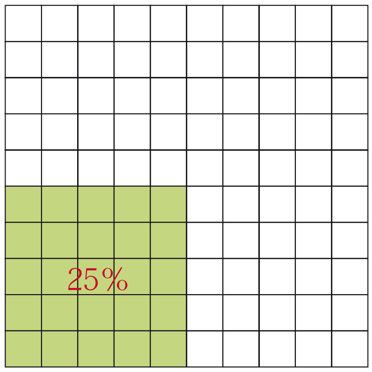
- *Completa la razón de la derecha.*

$\frac{30}{100} = \frac{3}{10}$

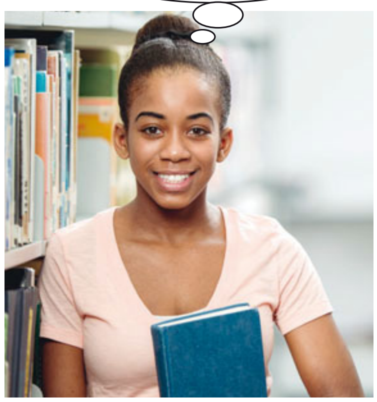
$\frac{60}{100} = \frac{3}{5}$

$\frac{5}{100} = \frac{1}{20}$

$\frac{24}{100} = \frac{6}{25}$



Si una totalidad se representa como 100, 25 partes de esa totalidad representan su 25%.



1 Concepto de porcentaje

Un porcentaje o tanto por ciento de una cantidad es una parte de dicha cantidad, representada como una fracción de denominador 100. El símbolo utilizado para designar un porcentaje es: %.

EJEMPLOS:

- El 25% es equivalente a $\frac{25}{100}$ partes de una totalidad. Como al simplificar $\frac{25}{100}$ nos queda $\frac{1}{4}$, el 25% de una totalidad es una cuarta parte de dicha totalidad.
- El 40% es equivalente a las $\frac{40}{100}$ partes de una totalidad. Como $\frac{40}{100} = \frac{2}{5}$, el 25% de una totalidad son dos quintas partes de la misma.

2 Cálculo de porcentajes

Para calcular el porcentaje de una cantidad, se multiplica la fracción de denominador 100 que representa dicho porcentaje por la cantidad.

EJEMPLOS:

- Obtener el 15% de 420.

  Para determinar qué número **x** es el 15% de 420 se efectúa la multiplicación siguiente:

  $\mathbf{x} = \frac{15}{100} \text{ x } 420 = \frac{(15 \text{ x } 420)}{100} = \frac{6\,300}{100} = 63.$

- Determinar el 32% de 625.

  $\mathbf{x} = \frac{32}{100} \text{ x } 625 = \frac{(32 \text{ x } 625)}{100} = \frac{20\,000}{100} = 200.$

Como un porcentaje equivale a una fracción de denominador 100, dicho porcentaje puede ser escrito en forma decimal.

EJEMPLOS:

- 25% $= \frac{25}{100} = 0.25$
- 175% $= \frac{175}{100} = 1.75$
- 54.8% = 0.548
- 0.35% = 0.0035

Para calcular porcentajes se puede utilizar la forma decimal. Así, el 45% de 480 se obtiene multiplicando 0.45 por 480: 45% de 480 = 0.45 x 480 = 216.

Sugerencias didácticas

- **Inicio:** Oriente a sus estudiantes para que lean y resuelvan en el aula la actividad vinculada a la recuperación de experiencias previas propuesta en el apartado *Recuperación*, en la que formarán proporciones con las razones dadas.
- **Desarrollo:** Haga que lean cuidadosamente el contenido de la doble página y que observen los procedimientos aplicados en los ejemplos resueltos. Formúleles preguntas como por ejemplo: *¿Qué es el por ciento de una cantidad? ¿Cómo se obtiene el porcentaje de una cantidad?* Haga que reproduzcan los ejemplos resueltos.

3 Cálculo de una totalidad a partir del porcentaje y la parte correspondiente

Conocidos el porcentaje y la parte del todo que este representa, es posible determinar cuál es dicha totalidad. Este es el problema inverso al cálculo de un porcentaje.

Para determinar de qué totalidad una cantidad es un porcentaje conocido, se multiplica la cantidad por 100 y el producto obtenido se divide por el porcentaje.

EJEMPLOS:

- ¿De qué cantidad **x**, 75 es el 40%?

$$\mathbf{x} = \frac{75 \times 100}{40} = \frac{7\,500}{40} = 187.5.$$

El 40% de **x** = 187.5 es 75.

Si una magnitud **M** experimenta un aumento porcentual de un **x**%, el nuevo valor **M′** de dicha magnitud es el resultado de multiplicar **M** por $\left(\frac{1+\mathbf{x}}{100}\right)$: $\mathbf{M'} = \mathbf{M} \times \left(\frac{1+\mathbf{x}}{100}\right)$.

Si la magnitud **M** sufre una disminución porcentual de un **x**%, su nuevo valor **M′** se obtiene con: $\mathbf{M'} = \mathbf{M} \times \left(\frac{1-\mathbf{x}}{100}\right)$.

EJEMPLOS:

- Ángel pesaba antes de irse de vacaciones 92 libras. Durante las vacaciones, su peso subió un 4%. ¿Cuál es el nuevo peso de Ángel?

Nuevo peso = $92 \times \left(\frac{1+4}{100}\right) = 92 \times 1.04 = 95.68$ libras.

RECUERDA

Porcentajes mayores que el 100%

Un porcentaje mayor que el 100% indica una cantidad mayor que la totalidad de referencia.

Ejemplos resueltos:

- El 150% de 80 es 120.
- El 200% de 150 es 300.
- El 350% de 540 es 1 890.

ACTIVIDADES

11 Representa gráficamente los siguientes porcentajes.

- 20%
- 35%
- 62%
- 85%
- 120%

12 Calcula.

- El 75% de 120. *90*
- El 62% de 500. *310*
- El 0.18% de 625. *1.125*
- El 95% de 73.4. *69.73*
- De qué número es 32 el 30%. *106.666…*
- De qué número es 150 el 4%. *3 750*
- De qué número es 4.75 el 25%. *19*
- De qué número es 8 el 0.20%. *4 000*

13 Resuelve los problemas. Comprueba tus resultados.

- El peso de un objeto en el Polo Norte es 0.53% mayor que en el ecuador. ¿Cuánto pesa en el Polo Norte un objeto de 50 libras en el ecuador? *50.265 lb.*
- Un resorte de 25 cm comprime su longitud en un 35%. ¿Cuál es la nueva longitud del resorte después de comprimirlo? *16.25 cm.*

- **Desarrollo:** Muestre a sus estudiantes el proceso de solución de los ejemplos resueltos. Pregúnteles: *¿Cómo se calculan los aumentos porcentuales? ¿Y la disminución porcentual?* Continúe con las preguntas y, luego, motíveles para que lean y comenten en el grupo las informaciones del apartado *Recuerda* (Porcentajes mayores que el 100 %). Desarrolle estos y otros ejemplos en la pizarra.
- **Cierre:** Motive a sus estudiantes a realizar los ejercicios del apartado *Actividades*. En la actividad 11, representarán gráficamente los porcentajes indicados. En la actividad 12, calcularán los porcentajes dados. En la actividad 13, resolverán problemas que involucran cálculo de porcentajes.

Atención a la diversidad

Actividades de refuerzo: Escriba las siguientes operaciones con porcentajes para que las calculen en sus cuadernos.

- 34% de 75. Resp.: 25.5.
- 40% de 150. Resp.: 60.
- 95% de 1 200. Resp.: 540.
- 50% de 600. Resp.: 300.
- 30% de 180. Resp.: 54.
- 45% de 200. Resp.: 90.

Ficha 19.

Actividades de ampliación: Haga que calculen en sus cuadernos.

- *¿De qué cantidad x, es 80 el 40%?* Resp.: 80 x 100/40 = 200.
- *¿De qué cantidad x, es 32 el 20%?* Resp.: 32 x 100/20 = 160.
- *¿De qué cantidad x, es 75 el 60%?* Resp.: 75 x 100/60 = 125.
- *¿De qué cantidad x, es 40 el 8%?* Resp.: 40 x 100/8 = 500.
- *¿De qué cantidad x, es 140 el 16%?* Resp.: 140 x 100/16 = 875.

Aprender a aprender

Pregunte al grupo:

- *¿Qué aplicaciones cotidianas podría tener el cálculo del tanto por ciento?*
- *¿Qué aplicaciones tiene el cálculo de porcentajes en las ventas?*

Indicadores de logro

- **Calcula** el interés simple, mensual y anual y el monto de una deuda al final de un período.

RECUPERACIÓN

- ***Responde*** *las preguntas.*
- *¿Has escuchado hablar de préstamos a un tanto por ciento de interés?*
- *¿Qué significado tiene para ti la palabra interés en el ámbito bancario?*

1 Concepto de interés simple

Una cuenta de ahorros genera intereses, que son una cierta cantidad de dinero que paga el banco al ahorrante por su depósito. El banco usa el depósito del ahorrante para desempeñarse en sus múltiples operaciones y paga intereses por ese uso. Ocurre lo inverso cuando el banco presta dinero: cobra intereses al cliente por el uso de un dinero que no es suyo.

El interés simple se genera sobre depósitos o préstamos de dinero fijos. Esta clase de interés depende del capital (dinero depositado o tomado de un banco en calidad de préstamo), **C**; del porcentaje o tasa de interés, **r** %, y del tiempo, **t**, expresado en años.

Para calcular el interés simple **I** generado por el depósito de un ahorrante o un préstamo a un cliente, en un año, se utiliza la siguiente expresión: $\mathbf{I} = \mathbf{C} \times \mathbf{r}\ \% \times \mathbf{t}$.

Los intereses generados o por pagar en fracciones de año se calculan con:

$$\mathbf{I} = \frac{(\mathbf{C} \times \mathbf{r}\ \% \times \mathbf{t})}{365} \text{ (cálculo por días).}$$

$$\mathbf{I} = \frac{(\mathbf{C} \times \mathbf{r}\ \% \times \mathbf{t})}{12} \text{ (cálculo por meses).}$$

EJEMPLOS:

- Daniel abrió una cuenta de ahorros con un depósito o capital inicial de RD$ 2 500.00. Si el banco paga a sus ahorrantes a una tasa de interés anual de un 6.2 %, ¿a cuánto asciende el interés generado por el capital depositado al cabo de 5 años?

  Aquí: **C** = RD$ 2 500.00; **r** % = 6.2 % = 0.062; **t** = 5 años.

  Entonces, el interés generado al cabo de 5 años es:

  I = RD$ 2 500 x 0.062 x 5 años = RD$ 775.

- Sandra tomó prestados a un banco RD$ 15 000.00. El banco presta dinero a una tasa de interés simple anual de 16 %. ¿Cuánto pagará Sandra de interés al banco al cabo de 6 meses?

  C = RD$ 15 000.00; **r** % = 0.16; **t** = 6 meses = 0.5 año.

  En 6 meses, Sandra pagará al banco:

  I = RD$ 15 000 x 0.16 x 0.5 año = RD$ 1 200.

Más información

Para que sus estudiantes tengan una idea más clara sobre el concepto de interés, aclare al grupo que el precio que se paga por el uso del dinero se denomina *interés,* y este se presenta de dos formas: préstamo o depósito a un interés determinado.

Los elementos que componen los préstamos o los depósitos son:

- El capital, que es la cantidad de dinero prestado o depositado.
- La tasa, que es el tanto por ciento a cobrar o pagar por el dinero prestado o depositado.
- El interés que es la cantidad de dinero ganado por el dinero prestado o cobrado por el dinero depositado.
- El tiempo, que es el período durante el cual el dinero se encuentra prestado o depositado.

El interés simple se calcula en base a un capital fijo, es decir, se mantiene invariable durante el tiempo establecido.

En los casos en que el tiempo del uso del dinero sea en un período menor que el año, dígase meses o días, se dividen los meses entre 12 y los días entre 365 para efectuar el cálculo correspondiente

Sugerencias didácticas

- **Inicio:** Oriente a sus estudiantes para que respondan en el aula las preguntas vinculadas a la recuperación de experiencias previas propuestas en el apartado *Recuperación*. Motive al grupo a justificar sus respuestas.
- **Desarrollo:** Pida a sus estudiantes que lean cuidadosamente el contenido de la doble página y que observen las fórmulas relacionadas con el interés simple y los procedimientos aplicados en los ejemplos resueltos. Formúleles preguntas vinculadas al contenido como, por ejemplo: *¿Cuáles son las informaciones requeridas para calcular el interés generado por un depósito de ahorro o por un préstamo?* Discuta las respuestas con el grupo.

2 Monto simple

Al cabo de un determinado tiempo, llamado período de capitalización, los bancos suman el interés generado al capital inicial depositado por el ahorrante.

El monto simple es la suma del capital inicial y los intereses producidos en un período de tiempo determinado.

El monto simple **M** se calcula con: $\mathbf{M} = \mathbf{C} \times (1 + \mathbf{r}\ \% \times \mathbf{t})$.

EJEMPLOS:

- Calcular el monto de un depósito de RD$ 25 000.00 a una tasa de interés anual de un 6% al cabo de 2 años.

  $\mathbf{C}$ = RD$ 25 000.00; $\mathbf{r}\ \% = 0.06$; $\mathbf{t} = 2$ años.

  $\mathbf{M}$ = RD$ 25 000.00 x (1 + 0.06 x 2 años) = RD$ 28 000.00

  Al cabo de 2 años, el ahorrante tendrá RD$ 28 000.00.

3 Valor presente a interés simple

Si un ahorrante busca tener un monto, **M**, al cabo de un tiempo, **t**, y a una tasa de interés de un **r** %, el capital, **C**, que debe depositar para lograr ese monto se llama valor presente.

El valor presente se calcula con: $\mathbf{C} = \dfrac{\mathbf{M}}{(1 + \mathbf{r}\ \% \times \mathbf{t})}$.

EJEMPLOS:

- ¿Qué capital debe depositarse en una cuenta de ahorros para tener un monto de RD$ 38 150.00, al cabo de 18 meses, a una tasa de interés simple de un 6 % anual?

  $\mathbf{M}$ = RD$ 38 150.00; $\mathbf{r}\ \% = 0.06$; $\mathbf{t} = \dfrac{18}{12} = 1.5$ años.

  El depósito debe ser: $\mathbf{C} = \dfrac{\text{RD\$ } 38\,150.00}{(1 + 0.06 \times 1.5)}$ = RD$ 35 000.00.

MÁS INFORMACIÓN

Cálculos del tiempo y de la tasa de interés

El tiempo, **t**, necesario para obtener con un capital inicial, **C**, y a una tasa de interés simple de un **r**%, un determinado interés **I** se calcula con:

$$\mathbf{t} = \frac{\mathbf{I}}{(\mathbf{C} \times \mathbf{r}\ \%)}.$$

La tasa de interés, **r**%, a la que debe depositarse un capital, **C**, para obtener en un tiempo, **t**, un determinado interés simple **I**, se calcula con:

$$\mathbf{r}\ \% = \frac{\mathbf{I}}{(\mathbf{C} \times \mathbf{t})}.$$

El tiempo y la tasa de interés en relación con el monto simple, **M**, se calculan, respectivamente, con:

$$\mathbf{t} = \frac{(\mathbf{M} - \mathbf{C})}{(\mathbf{C} \times \mathbf{r}\ \%)}.$$

$$\mathbf{r}\ \% = \frac{(\mathbf{M} - \mathbf{C})}{(\mathbf{C} \times \mathbf{t})}.$$

ACTIVIDADES

14 Resuelve los problemas. Luego, compara tus resultados con los de tus compañeros.

- En una cuenta de ahorros, a una tasa de interés de un 5.98 % se depositan RD$ 8 600.00 inicialmente. ¿Qué interés genera el capital depositado al cabo de 200 días y cuánto asciende el monto simple en ese período de tiempo?
  RD$ 281.80. El monto asciende a RD$ 8 881.80.
- Luis depositó en sus ahorros RD$ 5 000 a un 6.2 % de interés simple anual. ¿Qué tiempo debe pasar para tener un monto simple de RD$ 6 550? ¿A qué tasa de interés hubiera conseguido, en ese tiempo, un monto de RD$ 6 700?
  En 5 años. A una tasa de interés de 6.8 %.

- **Desarrollo:** Muestre a sus estudiantes cómo se obtiene el interés simple, el monto simple y el valor presente a interés simple. Desarrolle los ejemplos resueltos y otros más en la pizarra. Haga que resuelvan ejercicios similares en la pizarra y en sus cuadernos. Motíveles para que lean y comenten en el grupo las informaciones del apartado *Más información* (Cálculo del tiempo y de la tasa). Haga que resuelvan ejercicios aplicando estas fórmulas en sus cuadernos.
- **Cierre:** Motive a sus estudiantes a realizar los ejercicios del apartado *Actividades*. En la actividad 14, resolverán problemas relacionados con el cálculo de interés simple y monto simple. Revise los resultados en el grupo.

Atención a la diversidad

Actividades de refuerzo: Proponga a sus estudiantes que resuelvan los siguientes problemas:

- *¿Cuál es el interés generado por un depósito de ahorro de 35 000 pesos, a una tasa de interés de 6.5 por ciento, en un tiempo de 4 años?* Resp.: 9 100 pesos.
- *Un banco tiene una tasa de interés anual de 17.5 por ciento. ¿Qué cantidad de interés pagará un préstamo de 30 000 pesos en 3 años?* Resp.: 15 750 pesos.

Ficha 20.

Actividades de ampliación: Proponga a sus estudiantes que resuelvan los siguientes problemas:

- *¿En qué tiempo se ha generado un interés de 1 550 pesos, si el capital es 2 500 pesos y la tasa de interés 6.2 por ciento?* Resp.: 10 años.
- *¿Qué tasa de interés se aplicó a un préstamo de 15 000, si en 12 meses generó 2 400 pesos?* Resp.: 16 por ciento.
- *¿Cuál es el monto simple de un depósito de 50 000 pesos, a una tasa de 12% en 4 años?* Resp.: 74 000 pesos.

Aprender a aprender

Pregunte a sus estudiantes:

- ¿Tienen alguna cuenta de ahorros?
- ¿Creen que son capaces de calcular los intereses generados en lo que va de este año?

Competencias

- Comunicativa
- Algoritmo
- Ciencia y tecnología

Indicadores de logro

- **Identifica** y **representa** proporciones. **Calcula** los términos de una proporción. **Reconoce** y **representa** gráficamente una proporcionalidad directa. **Reconoce** y **representa** gráficamente una proporcionalidad inversa. **Resuelve** problemas utilizando la regla de tres. **Calcula** correctamente porcentajes de cantidades. **Calcula** el interés simple, mensual y anual, y el monto de una deuda al final de un período. **Resuelve** problemas diversos que impliquen el cálculo de porcentaje, interés simple y monto en diversas situaciones de la vida cotidiana.

Competencias fundamentales

Competencia comunicativa

Es necesario que los estudiantes adquieran las habilidades necesarias para reconocer las informaciones requeridas al resolver un problema que involucre el cálculo de interés simple y, al mismo tiempo, que conozcan la fórmula que usarán en cada caso.

Uso de algoritmos

Las reglas y procedimientos en la resolución de operaciones aritméticas son vitales para la persecución de resultados correctos, en el caso del interés simple, efectuar las operaciones tal como les indican las fórmulas es vital para que obtengan los resultados deseados.

ACTIVIDADES

15 Identifica y, luego, encierra las proporciones.

- $\frac{4}{3} = \frac{36}{27}$
- $\frac{5}{6} = \frac{60}{72}$
- $\frac{2}{9} = \frac{30}{130}$
- $\frac{3}{8} = \frac{36}{96}$
- $\frac{12}{5} = \frac{24}{16}$
- $\frac{1}{75} = \frac{4}{280}$

16 Construye una proporción, con cada razón.

- *0.2*
- *1.75*
- *2.5*
- *0.06*

Respuestas libres.

17 Completa dos proporciones equivalentes a cada proporción dada. *Respuestas libres.*

- $\frac{2}{5} = \frac{......}{......} = \frac{......}{......}$
- $\frac{8}{15} = \frac{......}{......} = \frac{......}{......}$
- $\frac{3}{10} = \frac{......}{......} = \frac{......}{......}$
- $\frac{14}{9} = \frac{......}{......} = \frac{......}{......}$

18 Determina los términos desconocidos de las proporciones siguientes.

- $\frac{\mathbf{x}}{3} = \frac{20}{12}$ $\mathbf{x} = 5$
- $\frac{4}{5} = \frac{24}{\mathbf{x}}$ $\mathbf{x} = 30$
- $\frac{7}{9} = \frac{\mathbf{x}}{135}$ $\mathbf{x} = 105$
- $\frac{12}{\mathbf{x}} = \frac{72}{30}$ $\mathbf{x} = 5$
- $\frac{\mathbf{x}}{5} = \frac{9}{45}$ $\mathbf{x} = 1$
- $\frac{15}{75} = \frac{3}{\mathbf{x}}$ $\mathbf{x} = 15$

19 Piensa y, luego, escribe en tu cuaderno tres proporciones continuas.

20 Determina la media proporcional desconocida en las siguientes proporciones.

- $\frac{\mathbf{x}}{3} = \frac{27}{\mathbf{x}}$ $\mathbf{x} = 9$
- $\frac{5}{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{x}}{45}$ $\mathbf{x} = 15$
- $\frac{\mathbf{x}}{12} = \frac{27}{\mathbf{x}}$ $\mathbf{x} = 18$
- $\frac{11}{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{x}}{44}$ $\mathbf{x} = 22$
- $\frac{\mathbf{x}}{52} = \frac{13}{\mathbf{x}}$ $\mathbf{x} = 26$
- $\frac{64}{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{x}}{16}$ $\mathbf{x} = 32$

21 Comprueba, partiendo de una proporción cualquiera, $\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} = \frac{\mathbf{c}}{\mathbf{d}}$, que la expresión siguiente se cumple:

$$\frac{(\mathbf{a} + \mathbf{c})}{(\mathbf{b} + \mathbf{d})} = \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} = \frac{\mathbf{c}}{\mathbf{d}}$$

22 Calcula el valor de **x** de cada proporción.

- $\frac{(\mathbf{x} + 2)}{8} = \frac{15}{24}$ $\mathbf{x} = 3$
- $\frac{9}{(\mathbf{x} + 8)} = \frac{3}{5}$ $\mathbf{x} = 7$
- $\frac{5}{7} = \frac{(\mathbf{x} + 20)}{98}$ $\mathbf{x} = 20$
- $\frac{40}{(110 - \mathbf{x})} = \frac{5}{13}$ $\mathbf{x} = 6$

23 Completa la tabla de proporcionalidad.

X	5	*6*	8	10	14	*15*	*20*
Y	12.0	14.4	*19.2*	*24.0*	33.6	36.0	48.0

- *¿Cuál es la constante de proporcionalidad? 2.4*

24 Grafica en una misma cuadrícula las proporcionalidades directas siguientes. Luego, responde.

- $\mathbf{y} = 4 \times \mathbf{x}$
- $\mathbf{y} = 2 \times \mathbf{x}$
- $\mathbf{y} = 5 \times \mathbf{x}$
- *¿Cuál de las representaciones gráficas tiene mayor inclinación respecto al eje* **x***?* $\mathbf{y} = 5 \times \mathbf{x}$

25 Identifica la clase de proporcionalidad, si la hubiera, entre cada par de variables.

- *Los galones de gasolina que llenan el tanque de un carro y el dinero necesario para llenarlo. Proporcionalidad directa.*
- *La velocidad con que se mueve un vehículo y el tiempo que tarda en recorrer cierta distancia. Proporcionalidad inversa.*
- *La distancia recorrida por un vehículo que se mueve con rapidez constante y el tiempo transcurrido. Proporcionalidad directa.*
- *El área de una pelota de béisbol y el tiempo que dura un partido. No hay proporcionalidad.*

26 Resuelve los problemas de proporcionalidad.

- *En un hotel un grupo de 54 personas ha consumido 18 barras de pan. ¿Cuántas barras se necesitarán para 72 personas? 24 barras.*
- *60 albañiles trabajando juntos construyen una muralla en 7 días. ¿Con cuántos albañiles se hubiera construido la muralla en 5 días? Con 84 albañiles.*
- *El embalse de una presa está lleno hasta el 80 % de su capacidad. Si tiene 125 hm^3 de agua, ¿cuántos hm^3 le faltan al embalse para llenarse? 31.25 hm^3.*

27 Resuelve los problemas.

- *Don Marcos toma un préstamo de RD$ 75 000.00 a un plazo de 5 años. El interés que le cobrará el banco es de un 12.5 % anual. ¿Cuánto pagará de interés a mitad del plazo? RD$ 23 437.50*
- *María quiere ahorrar en una cooperativa para obtener RD$ 60 000 al cabo de 5 años. ¿De cuánto deberá ser el depósito inicial si la cooperativa paga un 10 % de interés anual? RD$ 40 000.00*
- *Inés depositó RD$ 37 500.00 en su cuenta de ahorros y al cabo de 4 años había alcanzado un balance RD$ 45 000.00. ¿A qué tasa de interés simple anual depositó Inés? A un 5 % de interés.*

Sugerencias didácticas

- Las actividades propuestas en esta página están estrechamente vinculadas a los conceptos y procedimientos desarrollados a lo largo de la unidad. Haga que lean cuidadosamente las instrucciones y, después, verifique las respuestas obtenidas.
- Es importante observar de cerca que los estudiantes siguen las instrucciones e identifiquen los datos requeridos para obtener lo que se les indica en cada caso. Recuerde al grupo que deben aprender las fórmulas relacionadas con el cálculo del interés simple.

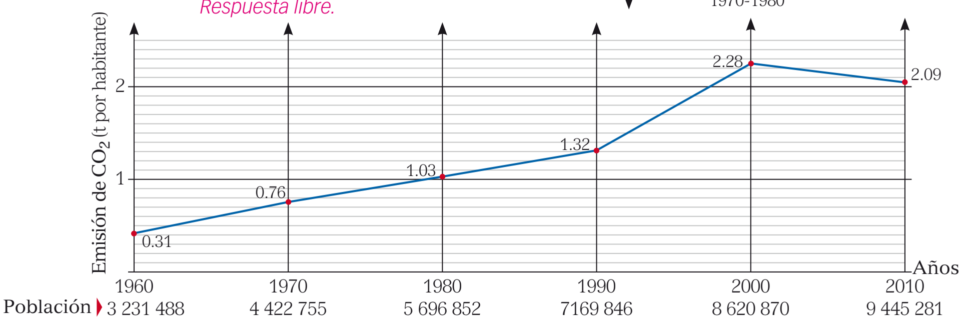
COMPETENCIA CIENTÍFICA Y TECNOLÓGICA

28 Lee, observa la tabla y, luego, responde.

El calentamiento global es un problema que impacta sobre la vida en la Tierra. El aumento de la temperatura media del planeta es provocado, fundamentalmente, por la emisión de gases de efecto invernadero (GEI) producidos por el uso de combustibles fósiles en la industria y el transporte.

Nuestro país es signatario de acuerdos globales para reducir la presencia en la atmósfera de GEI.

- *¿Reconoces al calentamiento global como un problema que afecta a nuestro país?* Respuesta libre.
- *¿Qué tendencia ha sido dominante en lo que toca a la emisión de GEI en nuestro país?* La tendencia a crecer.
- *¿Qué significado tiene la expresión emisión per cápita y cómo se calcula?* Emisión por habitante del país.
- *¿Cómo se calcula la emisión de GEI per cápita por año?* Dividiendo el total de toneladas de GEI emitidas por la población del país en ese año.
- *¿Qué medidas podrían reducir la emisión de GEI en el entorno? Coméntalas en el grupo.* Respuesta libre.



29 Resuelve los problemas.

- *En el año 2000 la población dominicana se estimaba en unos 8 620 870 habitantes. Si la emisión per cápita de gases de invernadero para ese año se estimaba en unas 2.28 toneladas, ¿cuántas toneladas de gases invernadero se emitieron en la atmósfera?* 19 655 583.6 t

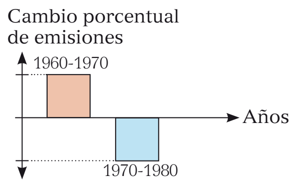
30 Piensa y, luego, responde.

Del año 2000 al 2010 disminuyeron las emisiones per cápita de GEI en nuestro país.

- *¿Disminuyó la cantidad de GEI vertida en la atmósfera?* No necesariamente, porque en las medidas per cápita interviene la población en el momento en que se estiman.
- *¿Qué harías para saberlo?* Calcular la emisión para el año 2010 y compararla con la emisión del año 2000.
- *¿La emisión de GEI en el año 2010 disminuyó en relación con la emisión del año 2000?* Para el año 2010 la emisión aumentó a 19 740 637.29 t.

31 Haz lo que se te pide.

- *Grafica los cambios porcentuales de cada década en un esquema como el del modelo. Los aumentos son positivos, las disminuciones negativas.*



Competencias fundamentales

Competencia científica y tecnológica

- El conocimiento científico en la actualidad es una necesidad y un derecho de todo ente social. Las habilidades y destrezas técnicas son necesarias para la solución de problemas que forman parte del diario vivir. En este aspecto radica la importancia de que los estudiantes adquieran las destrezas necesarias para calcular porcentajes, ya que están presentes en muchos aspectos importantes de la vida diaria.

Criterios de evaluación

Competencia comunicativa:

- Adaptación a las representaciones gráficas, simbólicas y numéricas a la situación de comunicación.

Uso de algoritmo:

- Seguimiento de las reglas, instrucciones y procedimientos.

Competencia científica y tecnológica:

- Aplicación apropiada de los procedimientos, técnicas, modelos y teorías científicas.

Sugerencias didácticas

- Proponga a sus estudiantes que lean detenidamente las actividades planteadas y que externen sus opiniones acerca de los pasos que deben dar para cada resolución.
- Los problemas propuestos en este apartado son aplicaciones cotidianas de las operaciones relacionadas a los conceptos estudiados en la unidad. Acompañe a sus estudiantes en la realización de estas actividades y ofrézcales las orientaciones necesarias.

Aprender a aprender

Motive a sus estudiantes para que reflexionen sobre los temas estudiados en la unidad. Por ejemplo, pregunte al grupo:

- *¿Qué tipo de proporcionalidad existe entre el dinero depositado y los intereses generados?*

Discuta las diversas respuestas con el grupo.

Indicadores de logro de la evaluación

- **Identifica** y **representa** proporciones. **Calcula** los términos de una proporción.
- **Reconoce** y **representa** gráficamente una proporcionalidad directa.
- **Reconoce** y **representa** gráficamente una proporcionalidad inversa.
- **Resuelve** problemas utilizando la regla de tres.
- **Calcula** correctamente porcentajes de cantidades.
- **Calcula** el interés simple, mensual y anual y el monto de una deuda al final de un período.
- **Resuelve** problemas diversos que impliquen el cálculo de porcentaje, interés simple y monto en diversas situaciones de la vida cotidiana.
- **Utiliza** recursos virtuales y electrónicos: computadora, softwares educativos, juegos interactivos y otros, en la búsqueda de información.

EVALUACIÓN

Comunica

32 Construye, a partir de cada razón, una frase que muestre una relación entre dos variables.

- $\frac{5}{8}$
- $\frac{10}{3}$
- $\frac{15}{24}$
- 2.5
- 0.12

Respuestas libres.

33 Escribe las proporciones de dos modos distintos.

- $\frac{2}{5} = \frac{16}{40}$
- $\frac{21}{4} = \frac{84}{16}$
- $\frac{8}{5} = \frac{10}{6.25}$

Respuestas libres.

34 Enuncia la siguiente ley de los gases, refiriéndote al tipo de proporcionalidad presente.

$$\text{Presión en un gas} = \frac{\text{Constante}}{\text{Volumen del gas}}$$

Modela y representa

35 Represente en una tabla los siguientes resultados extraídos de un informe de investigación.

- *Los cambios observados en una variable* ***A*** *en relación con otra variable* ***B*** *fueron los siguientes:* ***A*** *toma el valor 9, cuando* ***B*** *vale 12;* ***A*** *toma el valor 11.25, cuando* ***B*** *vale 15;* ***A*** *toma el valor 13.25, cuando* ***B*** *vale 18.*

Usa algoritmos

36 Identifica la clase de proporcionalidad entre las variables **A** y **B** de la actividad anterior y, luego, obtén su constante de proporcionalidad.

37 Obtén el valor de **x** en cada proporción.

- $\frac{x}{17} = \frac{72}{136}$ $x = 9$
- $\frac{12}{x} = \frac{60}{3.75}$ $x = 0.75$
- $\frac{16}{5} = \frac{x}{12}$ $x = 38.4$
- $\frac{4}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{8}}{x}$ $x = 1$

38 Determina la media proporcional de cada par de números y, luego, construye una proporción continua con dichos pares y la media proporcional obtenida.

- 2 y 9 $x = 6$
- 3 y 9 $x = 3\sqrt{3}$
- 15 y 16 $x = 4\sqrt{16}$
- 5 y 245 $x = 35$

39 Calcula el valor de **x** en cada proporción.

- $\frac{8}{(x-2)} = \frac{24}{21}$ $x = 9$
- $\frac{(x-1)}{12} = \frac{30}{72}$ $x = 4$
- $\frac{5}{8} = \frac{(x+20)}{96}$ $x = 40$
- $\frac{7}{9} = \frac{42}{2x}$ $x = 27$

40 Completa la tabla de proporcionalidad y, luego, represéntala gráficamente.

x	*1*	2	2.5	4	*5*
y	8	*4*	3.2	*2*	1.6

Conecta

41 Resuelve los problemas siguientes.

- La temperatura y la presión de un gas, encerrado a volumen constante, son directamente proporcionales. Si un gas encerrado a una temperatura de 300 **K** ejerce una presión de 4 $\mathbf{P_a}$ sobre las paredes del recipiente, ¿a qué temperatura ejercerá una presión de 10 Pa? *750* **k**
- En un aeropuerto llegan 25 vuelos chárter cada 4 horas. Si se mantiene constante el mismo ritmo de llegadas, ¿cada cuánto tiempo llegan 15 aviones al aeropuerto? *Cada 2.4 horas.*
- El 40% de los trabajadores de una zona franca va a su trabajo en transporte público, el 25% en vehículos propios y el resto caminando. ¿Cuántos trabajadores van a su trabajo caminando, si la zona franca tiene 800 trabajadores? *280 trabajadores.*
- Un ahorrante deposita RD$12 500.00 con el fin de alcanzar un monto de RD$15 000.00. Si el banco paga un interés simple anual de un 6%, ¿cuánto tiempo debe transcurrir para que el ahorrante llegue a acumular el monto deseado? *3 años y 4 meses.*

Diseña problemas

42 Construye, a partir de la siguiente proporción, dos problemas distintos y, luego, resuélvelos y comprueba sus soluciones. *Respuestas libres.*

$$\frac{5}{14} = \frac{x}{40}$$

Sugerencias didácticas para la evaluación

- Es importante verificar, antes de dar inicio a las actividades de evaluación, que sus estudiantes identifican los conceptos y los procedimientos trabajados en la unidad. Observar que efectúan de forma correcta las operaciones con proporciones, uso de la regla de tres y cálculo de porcentajes. Verificar que aprendieron las fórmulas relacionadas con el cálculo de interés simple.
- Si cuenta con tecnología como refuerzo, puede aplicar la prueba de la unidad que se encuentra en la plataforma didáctica Pleno.

Competencias específicas

- Comunica.
- Modela y representa.
- Usa algoritmos.
- Razona y argumenta.
- Conecta.
- Diseña problemas.

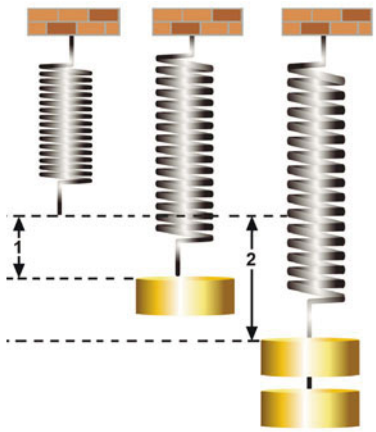
43 **Estudio de caso**. Lean y, luego, hagan lo que se les pide.

Al colgar una pesa en el extremo libre de un resorte como se muestra en la figura, el resorte sufre un alargamiento, **x**, que depende del número, **N**, de pesas colgadas.

- **Completen** la siguiente tabla, colocando pesas iguales, una tras otra, en el extremo libre de un resorte y midiendo con una regla los alargamientos. Luego, **respondan**.

Número de pesas, N	1	2	3	4	5
Alargamientos, x (en cm)	....	....	....	....	....

- **Descubran**, a partir de la tabla, si **N** y **x** son proporcionales y, si lo son, qué clase de proporcionalidad relaciona a estas magnitudes.
- **Representen** gráficamente la relación entre **N** y **x**.
- **Responde**. ¿Qué harían para investigar el comportamiento del resorte al colocar cada vez más pesas? **Comenten** las respuestas.
- **Detallen** en un informe su experiencia y sus conclusiones.



Ley de Hooke. El estiramiento de un resorte depende del peso que sostiene.

44 Piensa y, luego, responde. *Respuestas libres.*

- ¿Por qué la veracidad y honestidad son tan importantes en la práctica de la investigación en ciencia y tecnología?
- ¿Qué otros valores identificas en el ejercicio de la investigación?
- ¿Hasta qué punto crees que estos valores animan, en la actualidad, al quehacer científico y tecnológico? Comenten las respuestas.

APRENDIZAJE AUTÓNOMO

45 Marca según tus logros.

	Iniciado	En proceso	Logrado
• Identifico y represento proporciones y calculo sus términos.	☐	☐	☐
• Reconozco y grafico proporcionalidades directas e inversas.	☐	☐	☐
• Resuelvo problemas utilizando la regla de tres.	☐	☐	☐
• Calculo porcentajes y resuelvo problemas de interés simple.	☐	☐	☐

46 Reflexiona sobre tu aprendizaje.

- ¿Por qué son útiles en la vida diaria las aplicaciones de las proporciones? Pon tres ejemplos.
- ¿Cómo juzgas tu desempeño en el trabajo con los contenidos de esta unidad?

Sugerencias didácticas para la evaluación

- Pregunte a sus estudiantes:
  - — *¿Cómo comprobamos la igualdad de dos razones?*
  - — *¿Qué tipos de problemas se resuelven con la regla de tres?*
  - — *¿Cuál es el significado de la expresión: tanto por ciento?*
  - — *¿Cuál es la fórmula para calcular el interés simple?*

Estudio de caso

- En la actividad 43, deberán leer cuidadosamente el problema propuesto y las instrucciones, observar la ilustración, después, hacer lo que se les indica. En este caso, completarán una tabla con los estiramientos que sufre un resorte al colgar en uno de sus extremos distintos números de pesas; luego, responderán las preguntas. Motivarles para que comenten los resultados en el grupo.

Actitudes y valores

Ciencia y tecnología

En la sección destinada a *Actitudes y valores*, actividad 44, responderán por qué la veracidad y honestidad son tan importantes en la práctica de la investigación en ciencia y tecnología. Dirán qué otros valores identifican en el ejercicio de la investigación. Expresarán hasta qué punto creen que estos valores animan, en la actualidad, el quehacer científico y tecnológico.

Aprendizaje autónomo

- En este apartado en la actividad 45, evaluarán por ellos mismos si los conceptos y procedimientos que trabajaron en la unidad se encuentran en estado de iniciación, en proceso o logrados. En la actividad 46, reflexionarán sobre su proceso de aprendizaje.

Aprender a aprender

Pregunte a sus estudiantes:

- *¿Creen que son importantes para su formación los conceptos estudiados en esta unidad?*
- *¿Podrían dar un ejemplo de la vida cotidiana de aplicación de algunos de estos conceptos?*

4 Elementos de Geometría. Ángulos

Propuesta de programación

COMPETENCIAS	CONTENIDOS

COMPETENCIAS

Específicas

- **Razona y argumenta**: **Distingue** las nociones de horizontalidad, verticalidad, paralelismo y perpendicularidad. **Construye** distintos tipos de ángulos e **identifica** sus propiedades. **Justifica** las demostraciones geométricas realizadas del teorema de Pitágoras.
- **Modelar y representar**: **Representa**, con lenguaje matemático y gráfico, segmentos, ángulos, pares ordenados y figuras geométricas en el plano cartesiano.
- **Usa algoritmo**: **Sigue** las reglas que le permiten obtener un resultado al obtener longitudes y medidas de ángulos.
- **Conecta**: **Aplica** las operaciones con las coordenadas cartesianas para resolver problemas de situaciones del contexto, de otras ciencias y de la propia Matemática.
- **Utiliza herramientas tecnológicas**: **Utiliza** soportes tecnológicos como la Internet, la calculadora científica y otros dispositivos.

Fundamentales

Resolución de problemas: **Plantea** y **resuelve** problemas sobre situaciones del entorno que involucran elementos geométricos y ángulos.

Desarrollo personal y espiritual: **Reconoce** la importancia del cuidado y el rigor en el trabajo.

CONTENIDOS

Conceptos

- Rectas paralelas y perpendiculares.
- Ángulos.
- Ángulos complementarios y suplementarios.
- Ángulos entre rectas paralelas y una secante.
- Plano cartesiano. Coordenadas de un punto.
- Distancia entre dos puntos.
- Teorema de Pitágoras.

Procedimientos

- Construcción de rectas paralelas y perpendiculares, bisectriz de ángulo y diferentes ángulos.
- Estimación de medidas de ángulos.
- Cálculo de complemento y suplemento de ángulos.
- Demostración del teorema de Pitágoras.
- Utilización del sistema de coordenadas cartesianas para la localización de puntos en el plano y trazo de las figuras que se determinan.

Actitudes y valores

- Apreciación de la belleza de las diversas formas geométricas.
- Valoración por el cuidado y el rigor en el trabajo.

Tiempo estimado de trabajo: 2 semanas

INDICADORES DE LOGRO

- **Identifica** rectas paralelas y perpendiculares.
- **Traza** rectas paralelas, perpendiculares y mediatrices.
- **Identifica**, **traza** y **clasifica** ángulos.
- **Efectúa** operaciones con ángulos.
- **Determina** el complemento y el suplemento de un ángulo.
- **Reconoce** los ángulos formados por dos rectas paralelas y una secante.
- **Identifica** las coordenadas cartesianas de puntos del plano.
- **Conoce** y **aplica** correctamente el teorema de Pitágoras.
- **Obtiene** la distancia de dos puntos en el plano.
- **Resuelve** problemas del contexto donde aplica elementos geométricos y ángulos.
- **Utiliza** recursos virtuales y electrónicos: computadora, softwares educativos, juegos interactivos y otros, en la búsqueda de información.

Valor transversal: Creatividad

Recursos digitales

Plataforma digital

CD

BIBLIOTECA DEL DOCENTE

- DOCUMENTOS PARA LA PLANIFICACIÓN
- GUÍA DE RECURSOS TIC

CUADERNO DE ACTIVIDADES

UNIDAD 4	Elementos de Geometría. Ángulos

RECURSOS DE REFUERZO Y AMPLIACIÓN

LibroMedia

ACTIVIDADES INTERACTIVAS

PÁGINA 66	Paralelas
PÁGINA 72	¿Cuál es el ángulo adyacente?
PÁGINA 76	Coordenadas cartesianas
PÁGINA 78	Teoría sobre el teorema de Pitágoras

RECURSOS MULTIMEDIA

PÁGINA 65	Video: Los ángulos en la vida diaria

CD DE RECURSOS DIGITALES: PLAN REGULAR

Pleno: PRUEBA DE EVALUACIÓN FORMATIVA DE LA UNIDAD

Estrategias pedagógicas

- Recuperación de experiencias previas.
- Trabajo en equipo.
- Aprendizaje basado en problemas (ABP).

Unidad 4

Competencias de la unidad

- **Lee** y **comenta** las informaciones expuestas en el apartado *Punto de partida*.
- **Responde** preguntas relacionadas con las informaciones expuestas en el apartado *Punto de partida*.
- **Recupera** experiencias vividas mediante la observación de las imágenes de la ilustración.
- **Responde** preguntas vinculadas a sus experiencias previas sobre los conceptos que desarrollarán en la unidad en el apartado *Recuperación de conocimientos*.
- **Responde** preguntas vinculadas a las aplicaciones cotidianas de los conceptos que desarrollarán en la unidad en el apartado *Observación*.

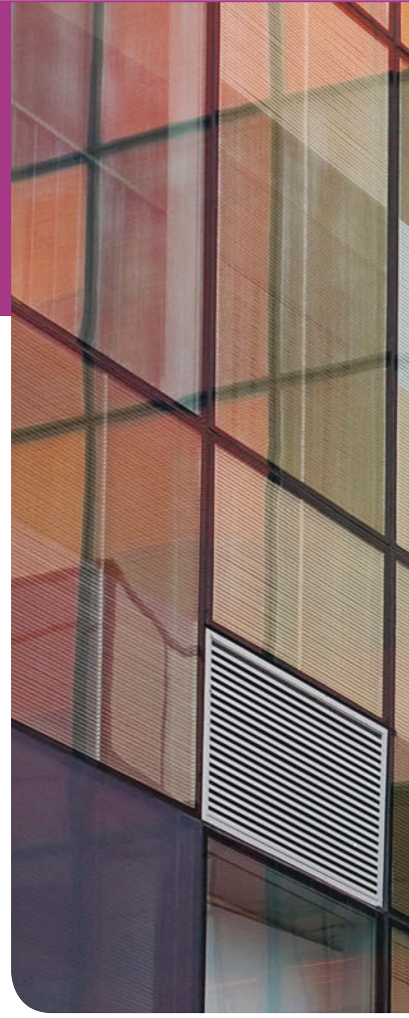
Apertura de la unidad

Dentro de los objetivos principales de la apertura de esta unidad se encuentran el plantear una situación de aprendizaje, una problemática o un texto que sirve para contextualizar el tema de la unidad. Todo esto con la finalidad de motivar y despertar la curiosidad de los estudiantes.

A partir de la situación o texto planteado y las imágenes de la ilustración se conecta al estudiante con el tema a tratar, a la vez que se vincula la realidad o cotidianidad con los temas que se van a desarrollar.

Todos los elementos que conforman la portada promueven la recuperación de experiencias o conocimientos previos y la motivación o el interés por los conocimientos que adquirirán en la unidad.

4 Elementos de Geometría. Ángulos



Punto de partida

Aidita hojea su libro de Educación Artística y se detiene en las páginas dedicadas a la arquitectura y a los ejemplos de algunas de sus obras maestras.

Comprobó que no solo los materiales de construcción han cambiado a través de los tiempos, sino también los elementos geométricos que siempre están presentes en las edificaciones.

Sin geometría, las artes visuales y la arquitectura no habrían alcanzado el grado de avance que hoy muestran, pensó Aidita para sí.

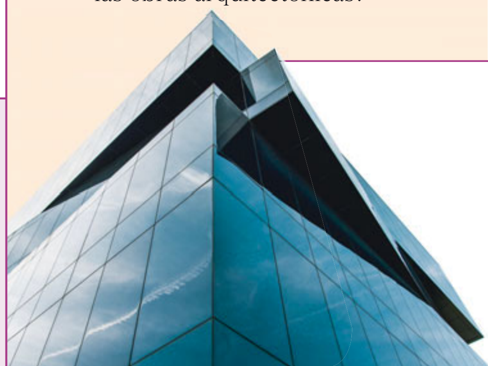
- ¿Qué llama tu atención cuando contemplas las edificaciones modernas de las ciudades?
- ¿Qué elementos de la geometría ya conocidos por ti están presentes en esas edificaciones?
- ¿Qué relaciones hay entre las propiedades de las líneas, figuras y cuerpos geométricos y la belleza de las obras arquitectónicas?

Conceptos y procedimientos

- Rectas paralelas y perpendiculares.
- Ángulos.
- Ángulos complementarios y suplementarios.
- Ángulos entre rectas paralelas y una secante.
- Plano cartesiano. Coordenadas de un punto.
- Distancia entre dos puntos del plano.
- Teorema de Pitágoras.

Actitudes y valores

- Apreciar la belleza de las diversas formas geométricas.
- Valorar el cuidado y el rigor en el trabajo.



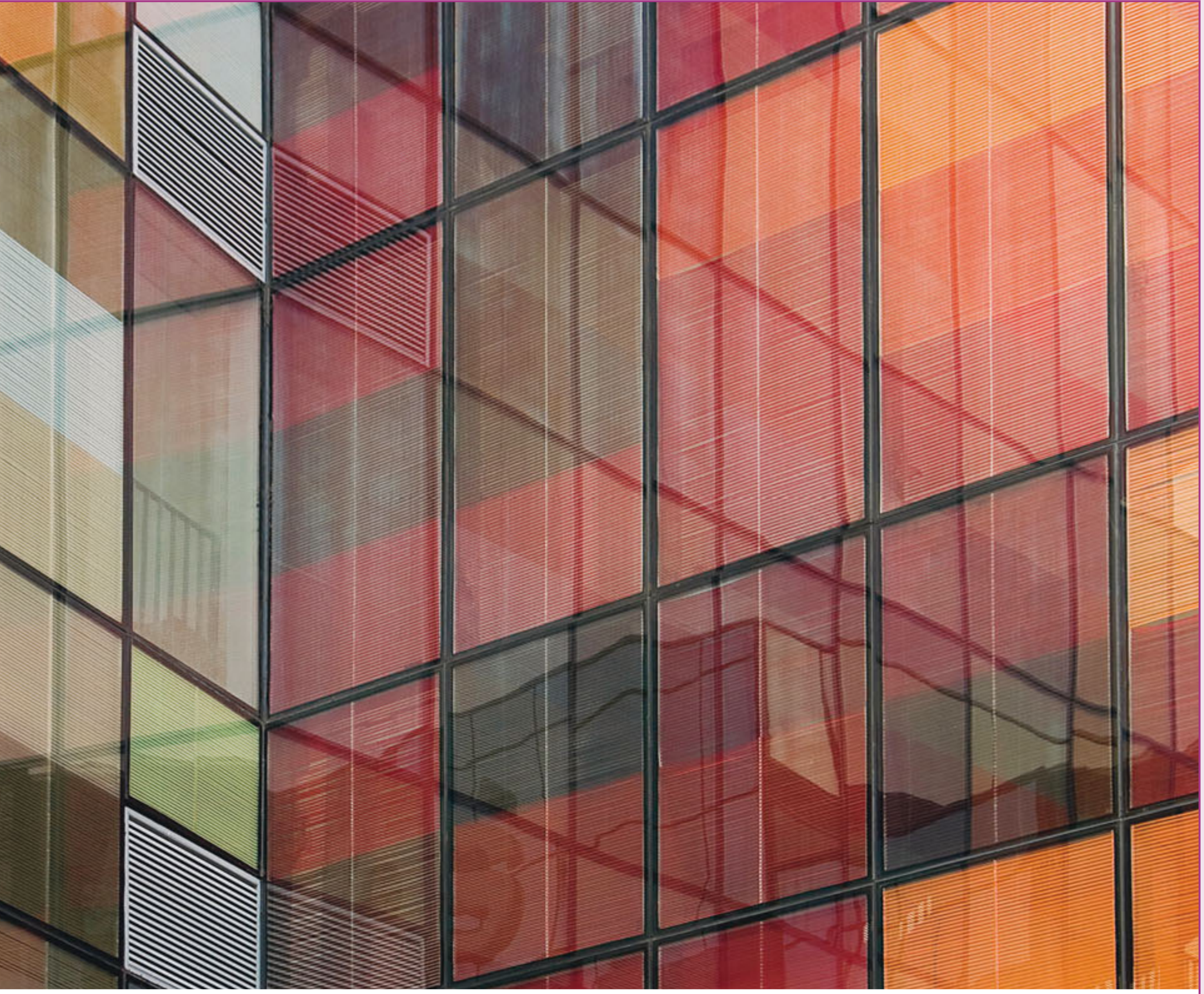
RECUPERACIÓN DE CONOCIMIENTOS

- ¿Cuándo se afirma de dos líneas rectas que son paralelas?
- Identifica tres pares de líneas paralelas en el entorno del aula.
- ¿Cómo puedes comprobar, utilizando una regla, que dos líneas son paralelas?
- ¿Qué dificultades podrían presentarse?
- ¿Qué harías para comprobarlo, usando un cuadrado de lados cuya longitud sea la distancia entre las paralelas?

64

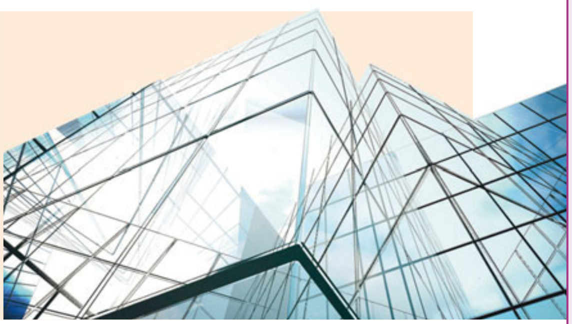
Trabajo colectivo de apertura

- **Punto de partida:** Guíe a sus estudiantes a leer y comentar en el grupo las informaciones expuestas en el apartado *Punto de partida* relacionadas con la presencia de los elementos geométricos en las edificaciones.
- **Recuperación de conocimientos:** Las preguntas de este apartado permiten hacer un diagnóstico de los conocimientos y las experiencias previas vinculados a los elementos geométricos.
- **Observación:** En este apartado se plantean preguntas relacionadas con las combinaciones de las líneas en los diseños arquitectónicos como el que observan en la ilustración.



OBSERVACIÓN

- ¿Has visto en edificios de tu entorno formas como las que se muestran en las ilustraciones?
- ¿Qué clase de líneas y figuras identificas en ellas?
- ¿Te parecen atractivas y armoniosas las combinaciones de distintas líneas y sus disposiciones que se observan en las ilustraciones?¿Por qué?
- ¿Qué líneas y figuras son las más frecuentes en las edificaciones de tu entorno físico?



Esquema conceptual de la unidad

Elementos de geometría

entre los que figuran

- Las rectas paralelas y las perpendiculares
- Los ángulos y su clasificación
- Operaciones

con estos elementos se

- Realizan construcciones con la regla y el compás
- Reconocen ángulos entre rectas paralelas y una secante
- Identifican puntos sobre el plano cartesiano
- Calculan distancias sobre el plano

Actividad de motivación

Pida a sus estudiantes que lean en la sección *Conceptos y procedimientos*, los temas que trabajarán en la unidad y las actitudes y valores que estarán presentes en el desarrollo de la misma. Luego, para que interioricen la importancia de los elementos geométricos y los ángulos en la vida cotidiana, formúleles preguntas como las siguientes:

- *¿Cómo se relacionan la geometría y el diseño arquitectónico?*
- *¿Qué presencia tienen los elementos geométricos en la naturaleza?*
- *¿Creen que podrían existir la belleza natural y artística sin los elementos geométricos que las caracterizan?*

Video

Los ángulos en la vida diaria

El recurso es un video que muestra la presencia de los ángulos en la vida cotidiana con imágenes de gran diversidad de diseños arquitectónicos.

Actitudes y valores

Creatividad

Aproveche la situación planteada en el apartado *Punto de partida* y en las imágenes de la ilustración para conversar con sus estudiantes acerca del valor del diseño arquitectónico y el papel que juegan los elementos geométricos en el mismo. Pregunte al grupo:

- *¿Qué combinaciones geométricas están presentes en las imágenes de la ilustración?*

Indicadores de logro

- **Identifica** rectas paralelas y perpendiculares.

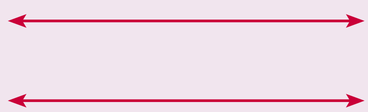
Actividad interactiva

Paralelas

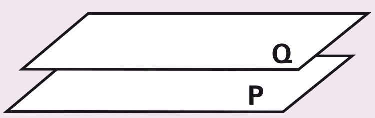
En esta actividad interactiva ubicarán y, luego, seleccionarán, dentro de un conjunto de imágenes distintas, específicamente las rectas paralelas.

Más información

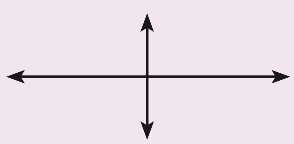
Comente a sus estudiantes, a manera de repaso, que dos rectas paralelas equidistantes nunca se encuentran o se cortan.



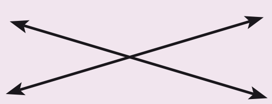
Dos líneas curvas y dos planos a una misma distancia y que no se corten son paralelos.



Las rectas perpendiculares se cortan formando ángulos rectos o de 90 grados.



Las rectas secantes u oblicuas se cortan y forman dos ángulos agudos y dos obtusos.



RECUPERACIÓN

Responde.

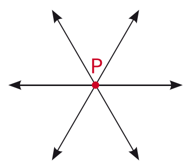
- *¿Qué cosas del entorno te dan la idea de una línea recta?*
- *¿Qué es lo que llama la atención en una línea recta?*

Trazado de una recta. Una recta se traza pasando un lápiz por el borde de una regla.

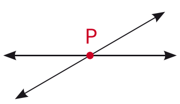
MÁS INFORMACIÓN

Afirmaciones sobre la recta en el plano

- Por un punto **P** pasan infinitas rectas distintas.



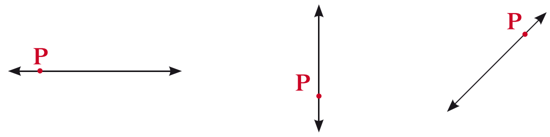
- Dos rectas secantes se cortan exactamente en un punto.



1 Rectas, semirrectas y segmentos

Una línea recta es un conjunto de puntos que se extienden indefinidamente en una dirección y en sentidos opuestos.

Los siguientes conjuntos de puntos **P** son líneas rectas con direcciones distintas.



Por dos puntos cualesquiera, **A** y **B**, pasa solo una línea recta.

Si tres puntos, **A**, **P** y **B**, están sobre una misma recta, la distancia de **A** a **B**, **d**(**A**, **B**) es igual a la suma de las distancias de **A** a **P**, **d**(**A**, **P**) y de **P** a **B**, **d**(**P**, **B**).

d(**A**, **B**) = **d**(**A**, **P**) + **d**(**P**, **B**).

La recta que pasa por los puntos **A** y **B** se designa: **AB**. En ocasiones, para nombrar una recta se usa una letra: **a**, **b**, etc.

Una semirrecta o rayo es un conjunto de puntos que tienen un punto inicial y se extienden indefinidamente en una dirección y un sentido. El punto inicial de una semirrecta es su origen.

Los siguientes conjuntos de puntos **P** son semirrectas de origen **A**.

Una segmento de recta o, simplemente un segmento, es un conjunto de puntos limitados por dos puntos fijos que son sus extremos.

2 Posiciones relativas de dos rectas

Dos rectas cualesquiera sobre el plano pueden ser:

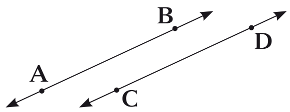
- **Paralelas**, si no tienen un punto común.
- **Secantes**, si tienen solo un punto común.
- **Coincidentes**, si todos sus puntos son comunes.

Sugerencias didácticas

- **Inicio:** Oriente a sus estudiantes para que lean y respondan las preguntas vinculadas a la recuperación de experiencias previas propuestas en el apartado *Recuperación*, relacionadas con las líneas rectas. Motive al grupo a justificar sus respuestas.
- **Desarrollo:** Pida a sus estudiantes que lean cuidadosamente el contenido de la doble página y que observen las representaciones gráficas. Formúleles preguntas como, por ejemplo: *¿En qué se diferencian una recta y un rayo o semirrecta? ¿Cuáles son las posiciones relativas de dos rectas?* Comente con el grupo las informaciones del apartado *Más información*, que trata sobre las afirmaciones sobre la recta en el plano.

3 Rectas paralelas y perpendiculares

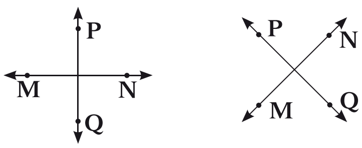
Las rectas **AB** y **CD** son paralelas. Por más que las prolonguemos jamás se tocarán.



La siguiente afirmación se conoce como el postulado de las paralelas: *por un punto* **P**, *exterior a una línea recta, pasa una paralela y solamente una.*

Para escribir simbólicamente que dos rectas, $\overleftrightarrow{L}$ y $\overleftrightarrow{M}$, son paralelas se usa la notación: $\overleftrightarrow{L} \parallel \overleftrightarrow{M}$.

Dos rectas secantes que dividen al plano en cuatro partes iguales son perpendiculares. Las rectas $\overleftrightarrow{MN}$ y $\overleftrightarrow{PQ}$ siguientes son perpendiculares. Simbólicamente: $\overleftrightarrow{MN} \perp \overleftrightarrow{PQ}$.



Para designar dos perpendiculares, $\overleftrightarrow{N}$ y $\overleftrightarrow{O}$, se usa: $\overleftrightarrow{N} \mid \overleftrightarrow{O}$.

Por un punto **P**, exterior a una recta, no puede ser trazada más de una perpendicular a una recta dada.

Esta última afirmación permite construir otra definición de líneas paralelas: *dos líneas rectas distintas sobre un plano y que sean perpendiculares a una tercera son líneas paralelas.*

MÁS INFORMACIÓN

Propiedades del paralelismo

Dado un conjunto de rectas paralelas sobre un plano, se cumplen:

1. Toda recta **a** se considera paralela a sí misma.

   a ∥ **a**.

2. Si una recta **a** es paralela a otra recta **b**, la recta **b** es paralela a la recta **a**.

   a ∥ **b** ····► **b** ∥ **a**.

3. Dos rectas, **a** y **b**, paralelas a una tercera recta **c**, son paralelas entre sí.

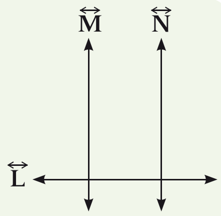
   a ∥ **b** y **b** ∥ **c** ····► **a** ∥ **c**.

$\overleftrightarrow{M}$ y $\overleftrightarrow{M}$

$\overleftrightarrow{L} \perp \overleftrightarrow{M}$

$\overleftrightarrow{N}$ y $\overleftrightarrow{O}$

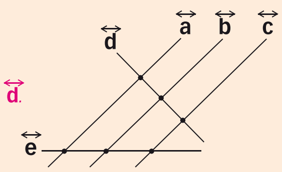
$\overleftrightarrow{N} \perp \overleftrightarrow{O}$



Si $\overleftrightarrow{M}$, $\overleftrightarrow{N} \perp \overleftrightarrow{L}$, entonces: $\overleftrightarrow{M} \parallel \overleftrightarrow{N}$

ACTIVIDADES

1 Observa la figura de la derecha y, luego, identifica.



- Los pares de rectas que son paralelas. $\overleftrightarrow{a} \parallel \overleftrightarrow{b}$; $\overleftrightarrow{a} \parallel \overleftrightarrow{c}$; $\overleftrightarrow{b} \parallel \overleftrightarrow{c}$
- Las rectas que son secantes. $\overleftrightarrow{a} \parallel \overleftrightarrow{e}$; $\overleftrightarrow{b} \parallel \overleftrightarrow{e}$; $\overleftrightarrow{c} \parallel \overleftrightarrow{e}$; $\overleftrightarrow{a} \parallel \overleftrightarrow{d}$; $\overleftrightarrow{b} \parallel \overleftrightarrow{d}$; $\overleftrightarrow{c} \parallel \overleftrightarrow{d}$.
- Las rectas que son perpendiculares. $\overleftrightarrow{a} \parallel \overleftrightarrow{d}$; $\overleftrightarrow{b} \parallel \overleftrightarrow{d}$; $\overleftrightarrow{c} \parallel \overleftrightarrow{d}$.

2 Analiza y, luego, responde cada pregunta. Comparte tus respuestas.

- ¿Cuántas líneas paralelas o perpendiculares puedes trazar a un recta dada? *Infinitas.*
- Si trazas una perpendicular $\overleftrightarrow{l}$, a una línea recta $\overleftrightarrow{m}$ que es, a su vez, perpendicular a otra **n**, ¿cuál es la posición relativa de la recta $\overleftrightarrow{l}$ con respecto a la recta $\overleftrightarrow{n}$? $\overleftrightarrow{l} \parallel \overleftrightarrow{n}$.
- ¿Una recta $\overleftrightarrow{r}$ secante a una de dos rectas paralelas, es secante a la otra? *Sí, necesariamente.*

Atención a la diversidad

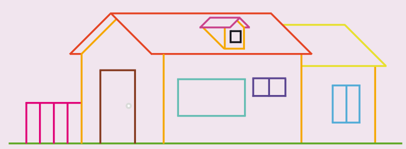
Actividades de refuerzo: Pida a sus estudiantes que tracen en hojas blancas las siguientes rectas:

- Tres líneas rectas.
- Dos rectas paralelas.
- Una semirrecta o rayo.
- Tres segmentos de rectas.
- Dos rectas perpendiculares.
- Dos rectas secantes.

Motíveles para que destaquen con colores los tipos de rectas y que las identifiquen con sus nombres.

Ficha 21.

Actividades de ampliación: Pida a sus estudiantes que reproduzcan la casita en hojas blancas y, luego, destaquen con distintos colores las líneas paralelas, perpendiculares y secantes.



- **Desarrollo:** Muéstreles ejemplos de los conceptos desarrollados en la doble página. Después, pregunte al grupo: *¿Cómo se designan las rectas paralelas y las perpendiculares?* Pídales que lean y reproduzcan el contenido del apartado *Más información*, que trata sobre las propiedades del paralelismo. Diseñe ejemplos de estos conceptos e invíteles a la pizarra.
- **Cierre:** Motive a sus estudiantes a realizar los ejercicios del apartado *Actividades*. En la actividad 1, observarán la figura de la derecha y, luego, identificarán las rectas indicadas. En la actividad 2, analizarán y, luego, responderán cada pregunta. Finalmente, compartirán sus respuestas.

Aprender a aprender

Pregunte a sus estudiantes:

- *¿Qué calles son paralelas en su comunidad?*
- *¿Cuáles son perpendiculares?*

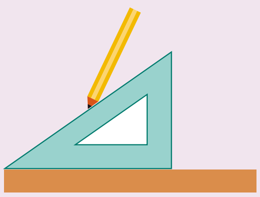
Indicadores de logro

- **Traza** rectas paralelas, perpendiculares y mediatrices.

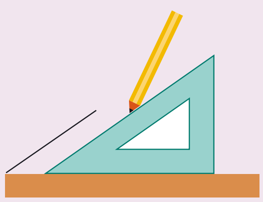
Más información

Muestre a los estudiantes los pasos de otro método, mediante el uso de la regla y la escuadra, para trazar rectas paralelas.

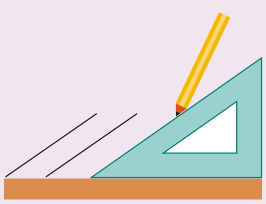
Primero: Se coloca la escuadra sobre la regla, como observan en la imagen, y se traza la línea recta.



Segundo: Se desplaza la escuadra sobre la regla y se traza la recta siguiente.



Tercero: Las dos rectas trazadas son paralelas.



RECUPERACIÓN

■ Responde.

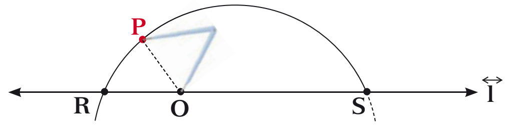
- *¿Has empleado la regla y el compás en la construcción de figuras?*
- *¿Cuáles figuras has construido con estos instrumentos?*

Regla y compás. En la geometría estos dos instrumentos juegan, desde la antigüedad, un papel de primer orden.

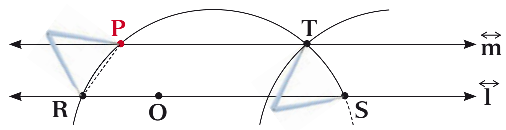
1 Construcción de la recta paralela que pasa por un punto exterior a una recta dada

Para construir la recta paralela a una recta dada $\overleftrightarrow{l}$ que pase por el punto **P**, se dan los siguientes pasos:

1.º Sobre la recta $\overleftrightarrow{l}$ se marca un punto cualquiera **O**. Se apoya la punta del compás en **O**, el compás se abre con una abertura **OP** y se traza un arco que corte a la recta $\overleftrightarrow{l}$ en los puntos **R** y **S**.

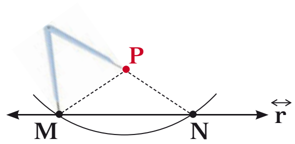


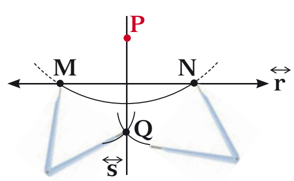
2.º Se abre el compás con una abertura de **R** a **P**. Con esa misma abertura se apoya su punta en **S** y se traza un segundo arco que corta al primero en el punto **T**. La recta **m** trazada por los puntos **P** y **T** es la paralela a $\overleftrightarrow{l}$ que pasa por el punto **P**.



2 Construcción de la recta perpendicular que pasa por un punto exterior a una recta dada

Para construir la recta perpendicular a una recta dada **r** y que pase por el punto **P**, se procede como se indica abajo. Fíjate en las figuras de la izquierda.





1º. Apoyando la punta del compás en el punto **P**, se traza un arco de circunferencia que corte a la recta **r** en dos puntos, **M** y **N**.

2º. Con otra abertura del compás o la misma anterior, se apoya su punta en **M** y se traza un segundo arco.

Manteniendo la abertura del paso anterior, y apoyando el compás en **N** se traza otro arco que corte al anterior en un punto **Q**.

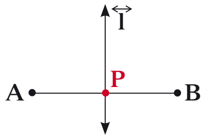
La recta que pasa por **P** y **Q**, es la perpendicular a $\overleftrightarrow{l}$ que pasa por el punto **P**.

Sugerencias didácticas

- **Inicio:** Oriente a sus estudiantes para que lean y respondan en el aula las preguntas vinculadas a la recuperación de experiencias previas propuestas en el apartado *Recuperación* relacionadas con el uso de la regla y el compás. Motive al grupo a justificar sus respuestas.
- **Desarrollo:** Pida a sus estudiantes que lean cuidadosamente el contenido de la doble página y que observen las representaciones gráficas. Es necesario que lleven al aula su regla y su compás para que reproduzcan los procedimientos en hojas blancas o en sus cuadernos. Haga que lean y comenten el pie de la imagen que muestra la regla y el compás.

3 Mediatriz de un segmento. Construcción

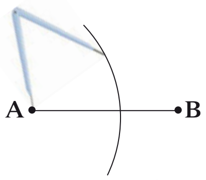
La mediatriz de un segmento **AB** es la recta perpendicular que divide a dicho segmento en dos partes iguales.



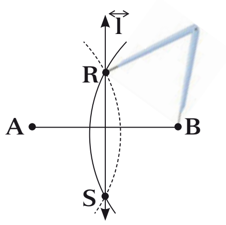
La mediatriz del segmento **AB** es la recta perpendicular $\overleftrightarrow{l}$ que pasa por el punto **P**. De acuerdo a la definición de mediatriz: **AP** = **PB**.

El procedimiento para trazar la mediatriz de un segmento **AB** es el siguiente:

1.º Apoyando la punta del compás en el extremo **A** del segmento **AB** y con una abertura mayor que la mitad de la longitud de dicho segmento se traza un primer arco que corte al segmento.



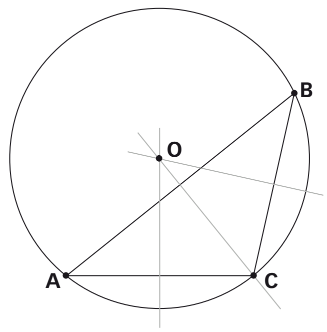
2.º Con la misma abertura del compás, se apoya su punta en el otro extremo del segmento, **B**, y se traza un segundo arco que corte al primero en dos puntos **R** y **S**. La recta $\overleftrightarrow{l}$ que pasa por los puntos **R** y **S**, es la mediatriz del segmento **AB**.



INTELIGENCIA COLABORATIVA

El circuncentro

- **Dibujen** un triángulo y **tracen** la mediatriz de cada uno de sus lados. Luego, **comprueben**:
  - Que las tres mediatrices se cortan en un punto único. Este punto se llama circuncentro del triángulo.
  - Que con una abertura del compás que vaya del circuncentro a cualquiera de los vértices del triángulo y apoyando su punta en el circuncentro, se puede trazar una circunferencia que pase por los tres vértices de triángulo.



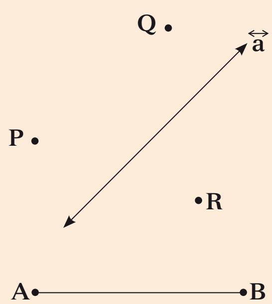
ACTIVIDADES

3 Fotocopien las rectas y, luego, tracen lo que se les pide.

- Paralelas a la recta **a** que pasen, cada una de ellas, por los puntos **P**, **Q** y **R**.
- Perpendiculares a la recta **b** que pasen, cada una de ellas, por los puntos **S**, **T** y **U**.

4 Traza la mediatriz del segmento **MN** de 10 cm y comprueba tu resultado con una regla. Luego, responde.

- ¿Qué harías para dividir un segmento en cuatro partes iguales?



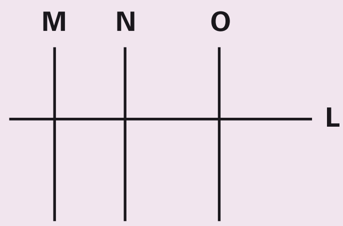
Dividir el segmento ***AB*** *en dos partes iguales y, luego, cada una de estas partes en otras dos partes iguales.*

- **Desarrollo:** Pida a sus estudiantes que comenten el contenido del apartado *Inteligencia colaborativa*, que trata sobre el circuncentro en el trazado de la circunferencia. Pídales que tracen la circunferencia en hojas blancas utilizando este método. Haga que realicen las distintas construcciones en sus cuadernos o en hojas blancas hasta asegurarse que dominan los procesos.
- **Cierre:** Motive a sus estudiantes a realizar los ejercicios del apartado *Actividades*. En la actividad 3, fotocopiarán las rectas y, luego, trazarán lo que se les pide. En la actividad 4, trazarán la mediatriz del segmento **MN** de 10 cm y comprobarán el resultado, usando una regla.

Atención a la diversidad

Actividades de refuerzo: Pida al grupo que dibujen sobre hojas blancas, utilizando la regla y el compás, lo que se les indica siguiendo los pasos indicados en la doble página:

- Primero: la recta **L**.
- Segundo: sobre la recta **L**, las perpendiculares **M**, **N** y **O**.
- Tercero: clasificar las rectas construidas, por ejemplo: **L** y **M** son perpendiculares, **M** y **O** son paralelas.



Pídales que tracen la mediatriz de el segmento **NO** de 12 cm y que, luego, usando la regla, comprueben el resultado.

Ficha 22.

Aprender a aprender

Pregunte a sus estudiantes:

- *¿Tuvieron alguna dificultad para realizar las construcciones con regla y compás trabajadas en esta oportunidad?*
- *¿Podrían explicar a sus compañeros estos procedimientos?*

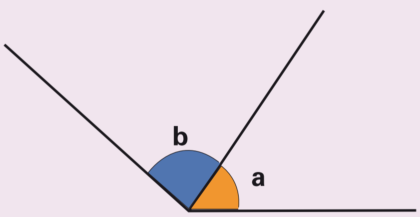
Indicadores de logro

- **Identifica**, **traza** y **clasifica** ángulos.

Competencia comunicativa

Ángulos consecutivos

Dos ángulos son consecutivos cuando tienen un rayo y un vértice comunes.



Otras sugerencias

Explique a los estudiantes que para sumar o restar ángulos se colocan los grados debajo de los grados, los minutos debajo de los minutos y los segundos debajo de los segundos.

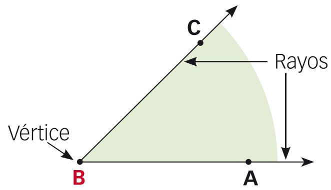
Cuando los segundos pasan de 60, o sea, más de un minuto, se dividen entre 60 y el cociente se suma a los minutos. Se realiza el mismo procedimiento para los minutos, en este caso, se suman a las horas o grados.

RECUPERACIÓN

- Haz lo que se te pide.
- *Observa a tu alrededor e identifica ángulos distintos.*
- *¿Qué clases de ángulos diferentes has identificado?*

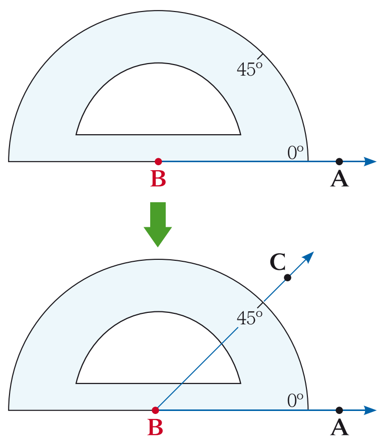
RECUERDA

Elementos de un ángulo



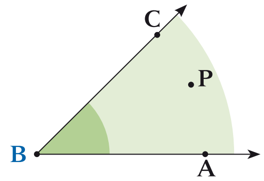
Los puntos **A**, **B** y **C** no son puntos interiores del ∢**ABC**.

Trazado un ángulo de 45º.



1 Concepto de ángulo

Un ángulo es la parte de un plano limitada por dos semirrectas con el mismo origen y con direcciones distintas.



El ángulo representado arriba está formado por los rayos $\overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{BA}$, ambos con un origen común, **B**. Este ángulo se designa mediante: ∢**ABC** o ∢**CBA**. La letra que corresponde al vértice se coloca entre las otras dos. Un ángulo también se designa con la letra del vértice, ∢**B**, o con un número, ∢1, ∢2, …

El punto **P** está en el interior del ángulo **ABC**, si **A** y **P** están localizados a un mismo lado del rayo $\overrightarrow{BC}$, y **P** y **C**, en el mismo lado del rayo $\overrightarrow{AC}$.

La región interior del ángulo **ABC** está formada por la totalidad de puntos **P**, interiores al ángulo. La región sombreada de la figura anterior representa el interior del ángulo **ABC**.

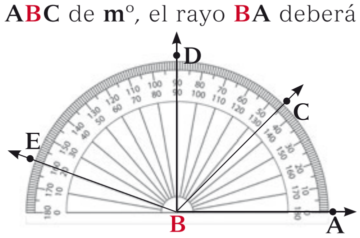
2 Medida de un ángulo

La medida de un ángulo expresa el tamaño de la abertura que hay entre sus dos rayos.

Para medir ángulos se utiliza el grado sexagesimal (º) que es una trescientas sesentava parte de la circunferencia. Un grado está formado por 60 minutos (′) y un minuto por 60 segundos (″).

Observa cómo se miden con el transportador los ángulos **ABC**, **ABD** y **ABE**. Las medidas de estos ángulos son, respectivamente, 45º, 90º y 160º.

Para trazar un ángulo **ABC** de **m**º, el rayo **BA** deberá pasar sobre la línea del 0º del transportador y el rayo **BC** por la marca **m**º de la semicircunferencia del transportador. Observa a la derecha.



Sugerencias didácticas

- **Inicio:** Oriente a sus estudiantes para que realicen en el aula la actividad de recuperación de experiencias previas propuesta en el apartado *Recuperación*, relacionada con ángulos.
- **Desarrollo:** Haga que lean cuidadosamente el contenido de la doble página y que observen las ilustraciones. Formúleles preguntas vinculadas al contenido como, por ejemplo: *¿Qué es un ángulo? ¿Qué expresa la medida de un ángulo?* Haga que observen en el apartado *Recuerda*, los elementos de un ángulo y la representación del trazado de un ángulo de 45º.

3 Clasificación de los ángulos

Por sus medidas, los ángulos pueden ser **agudos**, **rectos** u **obtusos**.

La medida de un ángulo agudo está entre 0º y 90º; la de un ángulo recto es 90º; y la de un ángulo obtuso, entre 90º y 180º.

La geometría elemental no toma en cuenta ángulos de medidas 0º (ángulos nulos) y 180º (ángulos llanos).

4 Operaciones con ángulos

En la figura de la derecha, los ángulos **ABC** y **CBD** tienen en común el rayo **BC**. ∢**ABC** y ∢**CBD** son ángulos consecutivos. Las medidas de ∢**ABD** es la suma de las medidas de ∢**ABC** y ∢**CBD**.

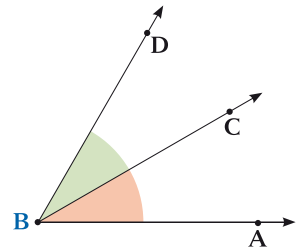
Las medidas de ∢**ABC** y ∢**CBD** son las diferencias de la medida de ∢**ABD** y las medidas de ∢**ABC** y ∢**CBD**.

RECUERDA

Ángulos congruentes

Dos ángulos con la misma medida son congruentes.

Si ∢**ABC** y ∢**XYZ** son ángulos congruentes se escribe: ∢**ABC** ≅ ∢**XYZ**.



EJEMPLO RESUELTO:

- Determinar la medida de ∢**ABD**, si ∢**ABC** y ∢**CBD** miden, respectivamente, 30º 40′ 25″ y 25º 35′ 40″.

La medida de ∢**ABD** se obtiene con: 30º 40′ 25″ + 25º 35′ 40″.

	1º	1′	
	30º	40′	25″
+	25º	35′	40″
	56º	76′	65″
		60′+16′	60″+5″

∢**ABD** mide 56º 16′ 5″.

- Obtener la medida de ∢**ABC**, si ∢**ABD** y ∢**CBD** miden, respectivamente, 90º 10′ 35″ y 78º 50′ 15″.

La medida de ∢**ABC** se obtiene con: 90º 10′ 35″ – 78º 50′ 15″.

	89º	60′+10=70′	
	~~90º~~	10′	35″
–	78º	50′	15″
	11º	20′	20″

∢**ABD** mide 56º 16′ 5″.

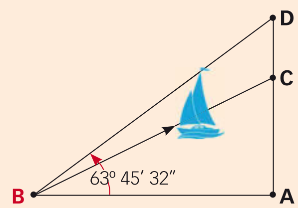
ACTIVIDADES

5 Traza, usando el transportador, ángulos con las medida siguientes.

- 20º
- 75º
- 92º
- 120º
- 150º

6 Observa la figura y, luego, resuelve el problema.

- Un velero debía dirigirse desde **B** a un puerto **D**. El rumbo que tomó, de 58º 32′ 48″, lo llevó a un puerto distinto **C**. ¿En cuánto debió corregir el rumbo tomado para haber llegado al puerto **D**? *5º 12′ 44″.*



- **Desarrollo:** Muestre a sus estudiantes, con ejemplos prácticos, cómo se construyen y cómo se miden los ángulos usando el transportador. Explíqueles, con ejemplos diversos en la pizarra, los pasos para efectuar sumas y restas de ángulos.
- **Cierre:** Motive a sus estudiantes a realizar los ejercicios del apartado *Actividades*. En la actividad 5, trazarán, usando el transportador, los ángulos cuyas medidas se les indican. En la actividad 6, observarán la representación de la dirección de los puntos por los que se dirige un velero y, luego, resolverán el problema. Revise los resultados en el grupo y envíeles a la pizarra.

Atividad grupal

Organice a sus estudiantes en grupos de 3 o 4 integrantes. Luego, pídales que tengan a la mano sus lápices de colores, regla, hojas blancas y el transportador. Finalmente, motíveles para que construyan los siguientes ángulos:

- 35°
- 130°
- 80°
- 100°
- 75°
- 160°
- 115°
- 55°
- 90°
- 165°
- 95°
- 40°

Proponga a los equipos de trabajo que efectúen las siguientes operaciones con ángulos:

- 35° 42′ 25″ + 14° 25′ 50″

  Resp.: 50° 8′ 15″
- 25° 40′ 30″ + 20° 15′ 18″

  Resp.: 45° 55′ 48″
- 22° 12′ 20″ + 24° 20′ 32″

  Resp.: 46° 32′ 52″
- 90° 22′ 25″ – 14° 12′ 13″

  Resp.: 76° 10′ 12″
- 88° 10′ 45″ – 14° 25′ 15″

  Resp.: 73° 45′ 30″
- 80° 45′ 15″ – 38° 25′ 10″

  Resp.: 42° 20′ 5″

Ficha 23.

Aprender a aprender

Pregunte al grupo:

- *¿Les resultaron fáciles las operaciones con ángulos?*
- *¿Qué hacen cuando los segundos se convierten en minutos?*
- *¿Y cuando los minutos se convierten en horas?*

Indicadores de logro

- **Efectúa** diversas operaciones con ángulos.
- **Determina** el complemento y el suplemento de un ángulo.

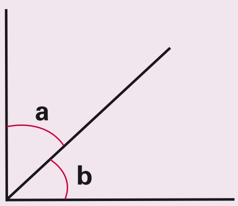
Actividad interactiva

¿Cuál es el ángulo adyacente?

En esta actividad interactiva los estudiantes identificarán y, luego, seleccionarán ángulos adyacentes en las representaciones dadas.

Otras actividades

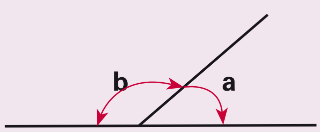
Dibuje en la pizarra esta figura:



Luego, pregunte al grupo:

- *¿Cuál es el resultado de la suma de los ángulos a y b?*
- *¿Cómo saben que suman 90°?*
- *¿Qué nombre reciben los ángulos cuya suma es 90°?*

Dibuje la siguiente figura:



Luego, pregunte al grupo:

- *¿Cuál es el resultado de la suma de los ángulos b y a?*
- *¿Cómo saben que suman 180°?*
- *¿Qué nombre reciben los ángulos cuya suma es 180°?*

COMPLEMENTO Y SUPLEMENTO DE UN ÁNGULO

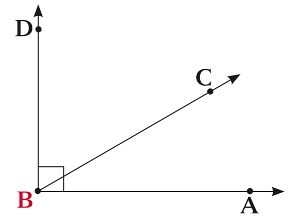
RECUPERACIÓN

- **Responde**.
  - *¿Cuántos grados le faltan a un ángulo de 27° para llegar a ser recto?* *63°*
  - *¿Cuántos grados le faltan a un ángulo de 165° 45′ para ser llano?* *14° 15′*

1 Complemento de un ángulo

Si la suma de las medidas de dos ángulos es 90°, dichos ángulos son complementarios uno del otro.

Observa la figura.



Los ángulos **ABC** y **CBD** son complementarios. Estos ángulos son consecutivos y forman un ángulo recto.

El ángulo **ABC** es el complemento del ángulo **CBD** y viceversa:

Medida **ABC** = 90° – medida **CBD**.

Medida **CBD** = 90° – medida **ABC**.

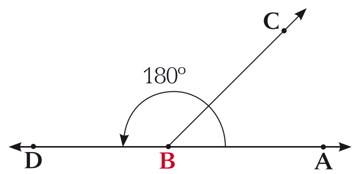
EJEMPLOS RESUELTOS:

- El complemento de 15° 25′ es: $90^\circ - 15^\circ\,25' = 74^\circ\,35'$.
- El complemento de 75° 18′12″ es: $90^\circ - 75^\circ\,18'\,12'' = 14^\circ\,41'\,48''$.

2 Suplemento de un ángulo

Si la suma de las medidas de dos ángulos es 180°, dichos ángulos son suplementarios uno del otro.

Fíjate en la figura.



Los ángulos **ABC** y **CBD** son suplementarios. Estos ángulos son consecutivos y forman un ángulo llano.

El ángulo **ABC** es el suplemento del ángulo **CBD** y viceversa:

Medida **ABC** = 180° – medida **CBD**.

Medida **CBD** = 180° – medida **ABC**.

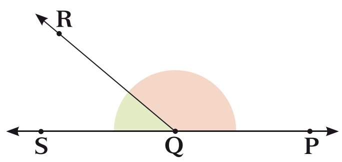
EJEMPLOS RESUELTOS:

- El suplemento de 85° 30′ 53″ es: $180^\circ - 85^\circ\,30'\,53'' = 94^\circ\,29'\,7''$.
- El suplemento de 132° 45″ es: $180^\circ - 132^\circ\,45'' = 47^\circ\,59'\,15''$.

MÁS INFORMACIÓN

Ángulos adyacentes

- A dos ángulos consecutivos y que formen un ángulo llano se les llama ángulos adyacentes.
- Los ángulos **PQR** y **RQS** siguientes son adyacentes.



Sugerencias didácticas

- **Inicio:** Oriente a sus estudiantes para que lean y respondan en el aula las preguntas vinculadas a la recuperación de experiencias previas propuestas en el apartado *Recuperación*, relacionadas con los ángulos.
- **Desarrollo:** Pídales que lean el contenido de la doble página, que observen los procedimientos aplicados en los ejemplos resueltos y las ilustraciones. Formúleles preguntas vinculadas al contenido como, por ejemplo: *¿Cuándo se dice que dos ángulos son complementarios? ¿Y cuándo son suplementarios?* Discuta con el grupo el contenido del apartado *Más información*, relacionado con los ángulos adyacentes.

3 Problemas

Sigue con atención los siguientes ejemplos.

EJEMPLOS RESUELTOS:

- Determinar la medida **x** del ángulo coloreado de la figura 1.

  Los ángulos de la figura 1 son adyacentes, entonces la medida desconocida, **x**, es la del suplemento del ángulo que mide 52º: **x** = 180˚ – 52˚ = 128º.

  La medida del ángulo **x** es 128º.

- ¿Cuál es la medida **x** del ángulo coloreado de la figura 2?

  Como los tres ángulos consecutivos forman un ángulo recto, entonces: 15º + **x** + 20º = 90º.

  Si se suman las medidas 15º y 20º, la expresión anterior es equivalente a: **x** + 35º = 90º.

  Entonces: **x** = 90º – 35º = 55º, es la medida buscada.

- ¿Qué medidas **x** e **y** tienen los ángulos de la figura 3?

  Como los ángulos de medidas **x** y 160º son adyacentes, entonces: 160º + **x** = 180º.

  Luego: **x** = 180º – 160º = 20º.

- Conocida la medida **x** = 20º, entonces: 20º + **y** = 180º.
- Luego: **y** = 180º – 20º = 160º.

Figura 1.

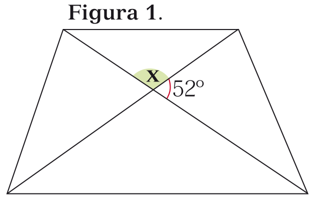


Figura 2.

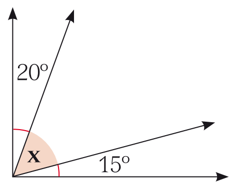
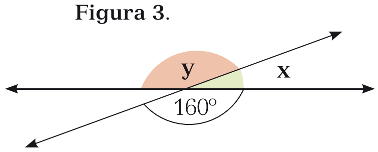


Figura 3.

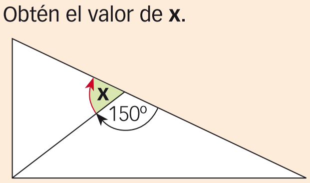


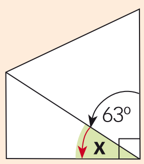
ACTIVIDADES

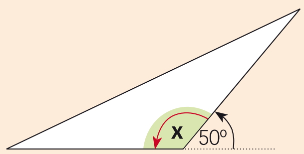
7 Obtén lo que se te pide. Comprueba tus resultados en cada caso.

- El complemento de los siguientes ángulos.
  - 48º
  - 25º 15′ 36″
  - 76º 19′ 50″
  - 43º 48′ 54″
  - 10º 32′ 45″
- El suplemento de los siguientes ángulos.
  - 48º
  - 75º 46′ 12″
  - 98.75º
  - 142º 28′ 39″
  - 176º 58″

8 Obtén el valor de **x**.







- **Desarrollo:** Muestre a sus estudiantes el proceso de solución de los ejemplos resueltos en el cálculo de ángulos complementarios y suplementarios y en la determinación de medidas de ángulos desconocidos. Pregunte a sus estudiantes: *¿Qué les indica que dos ángulos son adyacentes?*
- **Cierre:** Motive a sus estudiantes a realizar los ejercicios propuestos en el apartado *Actividades*. En la actividad 7, obtendrán el complemento y el suplemento de los ángulos indicados y, después, comprobarán sus resultados. En la actividad 8, obtendrán el valor del ángulo **x** en los polígonos representados. Revise los resultados en el grupo.

Atención a la diversidad

Actividades de refuerzo: Pídales que obtengan el complemento de los siguientes ángulos:

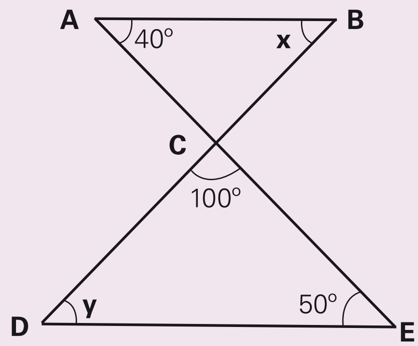
- 52º 25′
- 32º 15′ 23″
- 60º 25′ 45″
- 32º 15′ 23″

Pídales que obtengan el suplemento de los siguientes ángulos:

- 152º 25′
- 132º 15′ 23″
- 160º 25′ 45″
- 55º 15′ 23″

Ficha 24.

Actividades de ampliación: Motive al grupo para que identifiquen el valor de ángulos desconocidos en figuras como la siguiente:



Resp.:

ángulo: **C** = 80° ; **x** = 40° ; **y** = 30°

Aprender a aprender

Pregunte al grupo:

- *¿Les parecieron fáciles los conceptos trabajados en esta doble página?*
- *¿Serían capaces de explicarlos a un compañero de aula?*

Indicadores de logro

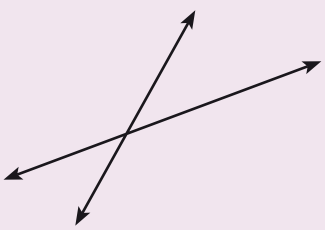
- **Reconoce** los ángulos formados por dos rectas paralelas y una secante.

Previsión de dificultades

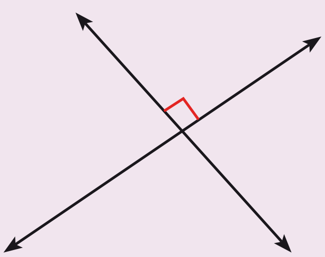
Antes de dar inicio al desarrollo de los conceptos, a manera de repaso, pregunte a sus estudiantes:

- *¿Qué nombre reciben las rectas que no se cruzan o cortan?*
- *¿Qué nombre reciben las rectas que se cortan?*
- *¿Pueden dos rectas distintas tener dos puntos comunes?*
- *¿En cuántas regiones divide una línea recta el plano?*
- *¿Y dos líneas rectas que se cortan en un punto?*

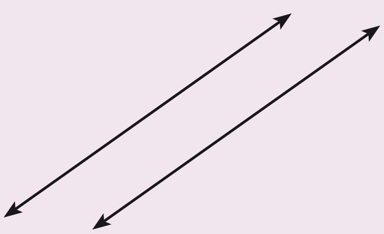
Pídales que clasifiquen las siguientes rectas:



Resp.: Secantes u oblicuas



Resp.: Perpendiculares



Resp.: Paralelas

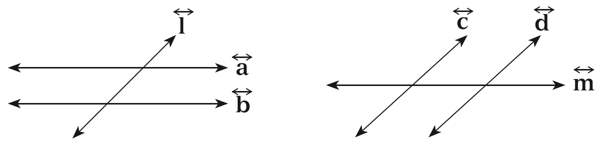
ÁNGULOS ENTRE RECTAS PARALELAS Y UNA SECANTE

RECUPERACIÓN

- **Responde**.
  - *¿Una recta perpendicular a una de dos rectas paralelas es perpendicular a la segunda?*

1 Secante a dos rectas paralelas

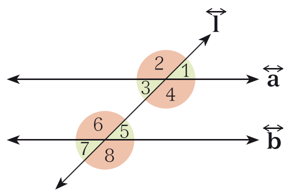
Una recta que corta a dos rectas paralelas del plano es una secante o recta transversal de dichas paralelas.



La recta $\overleftrightarrow{l}$ es secante al par de rectas paralelas $\overleftrightarrow{a}$ y $\overleftrightarrow{b}$ y la recta $\overleftrightarrow{m}$ es secante de las paralelas $\overleftrightarrow{c}$ y $\overleftrightarrow{d}$.

2 Ángulos formados por una secante y dos rectas paralelas

Una recta secante al atravesar un par de líneas paralelas determina ocho ángulos.



Los pares de ángulos 1 y 7, 2 y 8 que están a ambos lados de la secante y fuera del espacio entre las paralelas son ángulos alternos externos.

Los pares de ángulos 3 y 5, 4 y 6 que están a ambos lados de la secante y dentro del espacio entre las paralelas son ángulos alternos internos.

Los pares de ángulos 1 y 5, 4 y 8, 2 y 6, 3 y 7 que están en un mismo lado de la secante y uno dentro y otro fuera del espacio entre las paralelas, son ángulos correspondientes.

Los pares de ángulos alternos externos 1 y 7 son congruentes. También lo son los ángulos 2 y 8: $\measuredangle 1 \cong \measuredangle 7$; $\measuredangle 2 \cong \measuredangle 8$.

Los pares de ángulos alternos internos 3 y 5 son congruentes. También lo son los ángulos 4 y 6: $\measuredangle 3 \cong \measuredangle 5$; $\measuredangle 4 \cong \measuredangle 6$.

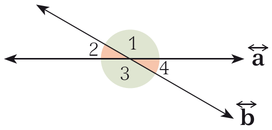
Los pares de ángulos correspondientes 1 y 5, 4 y 8, 2 y 6, 3 y 7 son congruentes: $\measuredangle 1 \cong \measuredangle 5$; $\measuredangle 4 \cong \measuredangle 8$; $\measuredangle 2 \cong \measuredangle 6$; $\measuredangle 3 \cong \measuredangle 7$.

Sugerencias didácticas

- **Inicio:** Oriente a sus estudiantes para que lean, analicen y respondan en el aula la pregunta vinculada a la recuperación de experiencias previas propuesta en el apartado *Recuperación*.
- **Desarrollo:** Pida a sus estudiantes que lean cuidadosamente el contenido de la doble página y que observen las representaciones gráficas de cada concepto. Formúleles preguntas vinculadas al contenido como, por ejemplo: *¿Cuál es el nombre de la recta que corta dos rectas paralelas en el plano?* Haga que tracen las rectas y los ángulos en sus cuadernos.

3 Ángulos opuestos por el vértice

Si dos rectas se cortan en un punto se forman cuatro ángulos.



Los pares de ángulos 1; 3 y 2; 4 son opuestos por el vértice.

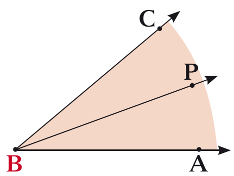
Dos ángulos son opuestos por el vértice cuando uno de ellos está formado por las prolongaciones de los rayos del otro, en sentido contrario.

Los ángulos opuestos por el vértice son congruentes: ∡1 ≅ ∡3; ∡2 ≅ ∡4.

4 Bisectriz de un ángulo

La bisectriz de un ángulo es el rayo, situado en la región interior de dicho ángulo y que parte de su vértice, que lo divide en dos ángulos congruentes.

En la figura, el rayo $\overrightarrow{BP}$ es la bisectriz del ángulo **ABC**. Está contenido en la región interior de ∡**ABC**, sale de su vértice y divide a este ángulo en dos ángulos congruentes ∡**ABP** y ∡**PBC**.



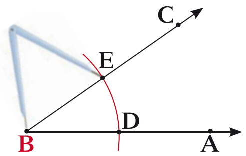
El rayo $\overrightarrow{BP}$ que es la bisectriz del ángulo **ABC**, es único.

MÁS INFORMACIÓN

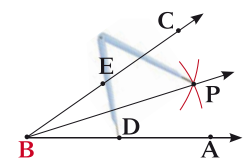
Construcción de una bisectriz

Para trazar la bisectriz de un ángulo **ABC**:

1.º Con una determinada abertura se apoya la punta del compás en el vértice **B** del ángulo y se traza un primer arco que corte a los dos rayos en los puntos **D** y **E**.



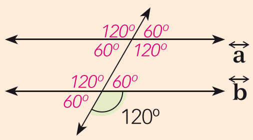
2.º Con la misma abertura del compás se trazan dos arcos apoyándolo, primero, en el punto **D** y, después, en el punto **E**. Estos arcos se cortarán en el punto **P**. La bisectriz del ángulo es el rayo que pasa por los puntos **B** y **P**.



ACTIVIDADES

9 Observa la figura de la derecha y, luego, responde.

- ¿Puedes escribir las medidas de todos los demás ángulos? Hazlo.
- ¿Podrías hacerlo si las rectas **a** y **b** no fueran paralelas?
  No es posible.
- ¿Cuáles pares de ángulos opuestos por el vértice identificas?
  Hay dos pares de 120º y dos pares de 60º.



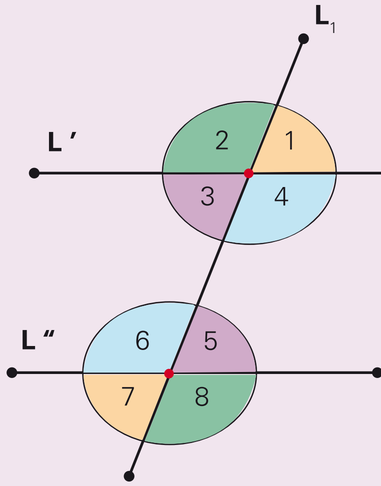
10 Construye ángulos con las medidas indicadas y, luego, traza sus bisectrices.

- 30º *15º*
- 48º *24º*
- 70º *35º*
- 100º *50º*
- 160º *80º*

- **Desarrollo:** Haga que identifiquen y tracen en sus cuadernos las distintas rectas y ángulos vistas en esta oportunidad. Proponga al grupo que sigan las instrucciones para construir la bisectriz de un ángulo, indicadas en el apartado *Más información*. Después, motíveles para que construyan, en hojas blancas, la bisectriz de un ángulo.
- **Cierre:** Motive a sus estudiantes a realizar los ejercicios del apartado *Actividades*. En la actividad 9, observarán la figura de la derecha y, luego, responderán las preguntas relacionadas con los ángulos y rectas que la componen. En la actividad 10, construirán ángulos con las medidas indicadas y, después, trazarán su bisectriz. Revise los resultados en el grupo y envíeles a la pizarra.

Atención a la diversidad

Actividades de refuerzo: Haga que clasifiquen los ángulos como se les indica.



- Ángulos 2 y 8.
  Resp.: Alternos externos.
- Ángulos 4 y 6.
  Resp.: Alternos internos.
- Ángulos 1 y 7.
  Resp.: Son congruentes.
- Ángulos 1 y 3.
  Resp.: Opuestos por el vértice.
- Ángulos 1 y 5.
  Resp.: Son correspondientes.

Ficha 25.

Aprender a aprender

Pregunte al grupo:

- *¿Creen que dominan perfectamente los conceptos estudiados o por el contrario necesitan reforzarlos?*
- *¿Cómo quisieran reforzar estos conceptos?*

Indicadores de logro

- **Identifica** las coordenadas cartesianas de puntos del plano.

RECUPERACIÓN

- **Responde** las preguntas.

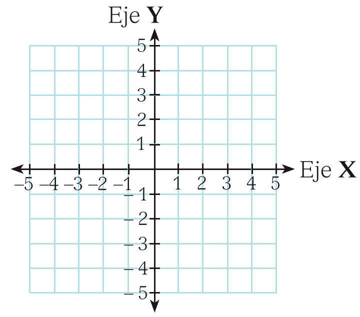
¿Qué utilidad tiene que el tejido urbano esté formado por calles paralelas y perpendiculares?

¿Cómo describes un desplazamiento por las calles de la ciudad?

1 El plano cartesiano

Un plano cartesiano es el plano determinado por dos rectas numéricas perpendiculares.

A la recta numérica horizontal del plano cartesiano se le llama eje de las abscisas o eje **X** y a la recta numérica vertical, eje de las ordenadas o eje **Y**. Los ejes de las abscisas y las ordenadas se denominan ejes coordenados.



2 Coordenadas de un punto en el plano

Los ejes coordenados permiten especificar de manera precisa cuál es la posición de un punto en el plano. Para determinar la posición de un punto **P**, basta con conocer sus coordenadas cartesianas.

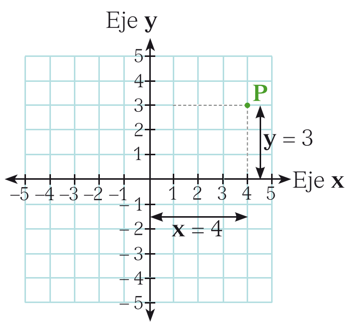
Las coordenadas de un punto **P** del plano son dos números, **x**, llamado abscisa, e **y**, llamado ordenada. **P** estará debidamente localizado cuando se escriben sus coordenadas **P**(**x**, **y**).

El número **x** se encuentra sobre el eje horizontal y el número **x**, sobre el eje vertical.

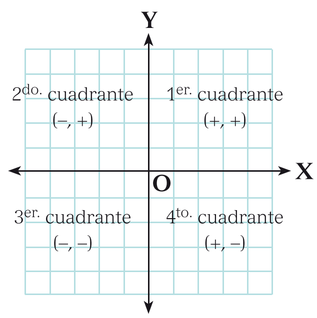
El punto **P** en la figura de la izquierda se localiza tomando **x** = 4 unidades hacia la derecha en el eje horizontal e **y** = 3 unidades hacia arriba en el eje vertical.

El plano cartesiano está dividido en cuatro partes que son sus cuadrantes. El punto **O** se llama origen del plano cartesiano.

En el 1.er cuadrante, la abscisa y la ordenada son positivas; en el 2.do cuadrante, la abscisa es negativa y la ordenada positiva; en el 3.er cuadrante, la abscisa y la ordenada son negativas y en el 4.to cuadrante, la abscisa es positiva y la ordenada negativa.



Cuadrantes del plano cartesiano.



Actividad interactiva

Coordenadas cartesianas

Este recurso es una actividad interactiva en la que identificarán las coordenadas de diversos puntos en el plano cartesiano y, además, los puntos, dadas las coordenadas.

Más información

Converse con sus estudiantes acerca de la importancia del uso de las coordenadas cartesianas en la vida cotidiana. Por ejemplo: para ubicar lugares en un mapa, encontrar personas extraviadas o lugares específicos tomando como referencia un punto de partida, trayectorias de ciclones y huracanes, centro de sismos, posiciones de los barcos y de los aviones, etc.

Un plano cartesiano está formado por dos rectas perpendiculares llamadas ejes de coordenadas. La recta horizontal se llama eje de las abscisas (**x**) y la recta vertical se llama eje de las ordenadas (**y**).

Sugerencias didácticas

- **Inicio:** Oriente a sus estudiantes para que respondan en el aula las preguntas vinculadas a la recuperación de experiencias previas propuestas en el apartado *Recuperación*, relacionadas con el plano cartesiano.
- **Desarrollo:** Pida a sus estudiantes que lean cuidadosamente el contenido de la doble página y que observen los gráficos relacionados con el plano cartesiano y la localización de los puntos sobre el mismo. Formúleles preguntas como, por ejemplo: *¿Cómo se identifican las coordenadas de un punto en el plano cartesiano?*

3 Localización de puntos en el plano

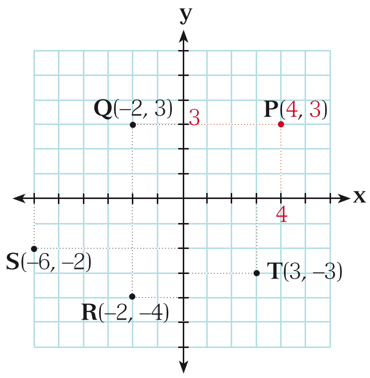
A cada par de coordenadas (**x**, **y**) del plano le corresponde un punto **P** y solamente uno **y**, recíprocamente, el punto **P** tiene un par de coordenadas y solo uno, (**x**, **y**).

EJEMPLOS:

- Marcar sobre el plano los siguientes puntos:

  P(4, 3); **Q**(– 2, 3); **R**(– 2, – 4); **S**(– 6, – 2); **T**(3, – 3).

  Observa la figura de la derecha. Los puntos **P**(4, 3) y **Q**(– 2, 3) pueden unirse con un segmento paralelo al eje horizontal, y los puntos **Q**(– 2, 3) y **R**(– 2, – 4) pueden ser unidos mediante un segmento paralelo al eje vertical.



Los puntos de un segmento paralelo al eje horizontal tienen la misma ordenada **y**; y los de un segmento paralelo al eje vertical, la misma abscisa **x**.

Si $\mathbf{P}(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1)$ y $\mathbf{Q}(\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2)$ son los extremos de un segmento **PQ**, las coordenadas del punto medio, $\mathbf{P}_\mathbf{m}(\mathbf{x}_\mathbf{m}, \mathbf{y}_\mathbf{m})$, son:

$$\mathbf{x}_\mathbf{m} = \frac{\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2}{2}\ ;\ \mathbf{y}_\mathbf{m} = \frac{\mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2}{2}.$$

EJEMPLO RESUELTO:

- Obtener las coordenadas del punto medio de un segmento del plano cuyos extremos son **A**(2, 3) y **B**(– 4, 5).

$$\mathbf{x}_\mathbf{m} = \frac{2 + (-4)}{2} = -1\ ;\ \mathbf{y}_\mathbf{m} = \frac{3 + 5}{2} = 4.$$

Las coordenadas del punto medio son: $P_m(-1, 4)$.

ACTIVIDADES

11 Marca los siguientes puntos sobre el plano: **P**(– 5, 6), P(5, 0), **P**(8, – 10) y **P**(– 4, – 4.5).

12 Traza los segmentos especificados y escribe las coordenadas de tres puntos de cada uno.

- Un segmento **AB**, paralelo al eje horizontal.
- Un segmento **CD**, paralelo al eje vertical.

13 Determina las coordenadas de los puntos medios de extremos A y B dados.

- **A**(– 4, 5) y **B**(4, 7)
  Pm(0, 6)
- **A**(5, 9) y **B**(3, – 6)
  Pm(4, 1.5)
- **A**(– 1, – 5) y **B**(0, 4)
  Pm(– 0.5, – 0.5)
- **A**(– 4, 6) y **B**(6, – 4)
  Pm(1, 1)

- **Desarrollo:** Muestre a sus estudiantes los procedimientos para ubicar puntos en el plano y para calcular el punto medio de un segmento, de acuerdo a como se les indica en el apartado *Más información*. Pregúnteles: *¿Qué informaciones requieren para determinar el punto medio de un segmento?*
- **Cierre:** Motive a sus estudiantes a realizar los ejercicios del apartado *Actividades*. En la actividad 11, marcarán sobre el plano los puntos que se les indican. En la actividad 12, trazarán los segmentos especificados y, luego, escribirán las coordenadas de tres puntos de cada uno. En la actividad 13, determinarán las coordenadas de los puntos medios de los extremos **A** y **B** dados. Revise los resultados en el grupo.

Atención a la diversidad

Actividades de refuerzo: Proponga a sus estudiantes que utilicen hojas de papel cuadriculado, luego, tracen los ejes coordenados y, después, marquen los siguientes puntos sobre el plano cartesiano:

- **A**(– 4, 5) ; **B**(6, 0) ; **C**(7, – 8) y **D**(– 5, – 5).
- **A**(– 7, 6) ; **B**(8, 0) ; **C**(4, – 2) y **D**(– 6, – 3).
- **A**(6, – 6) ; **B**(6, – 4) ; **C**(3, – 5) y **D**(7, 6).

Ficha 26.

Actividades de ampliación: Plantear a sus estudiantes:

- *Si las coordenadas de un punto en el plano cartesiano tienen signos positivos, ¿en qué cuadrante se ubicarán esos puntos?*

  Resp.: En el primer cuadrante.
- *Si las coordenadas de un punto en el plano cartesiano tienen signos negativos, ¿en qué cuadrante se ubicarán esos puntos?*

  Resp.: En el primer cuadrante.

Aprender a aprender

Plantear a sus estudiantes:

- *Si tuvieran que ubicar una localidad en un mapa, ¿qué pasos darían para encontrarla?*

Indicadores de logro

- **Conoce** y **aplica** correctamente el teorema de Pitágoras.
- **Obtiene** la distancia de dos puntos en el plano.

Actividad interactiva

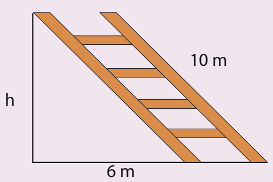
Teoría sobre el teorema de Pitágoras

Este recurso es una actividad interactiva en la que señalará, dentro de varias opciones, conceptos relacionados con el teorema de Pitágoras.

Más información

Converse con sus estudiantes sobre la importancia del teorema de Pitágoras para resolver problemas de la vida cotidiana relacionados con la ingeniería, diseño arquitectónico, artes gráficas, la ciencia, etc.

Por ejemplo, si se conocen la longitud de una escalera y la distancia de la base de apoyo del suelo a la pared donde descansa, podemos determinar la longitud de la pared mediante el teorema de Pitágoras.



$\mathbf{c}^2 = \mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2$

$\mathbf{a}^2 = \mathbf{c}^2 - \mathbf{b}^2$

$\mathbf{a} = \sqrt{\mathbf{c}^2 - \mathbf{b}^2}$

$\mathbf{a} = \sqrt{10^2 - 6^2}$

$\mathbf{a} = \sqrt{100 - 36}$

$\mathbf{a} = \sqrt{64}$

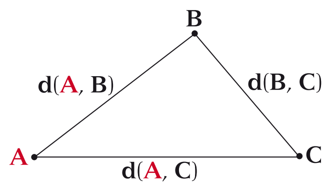
$\mathbf{h} = 8$ m

DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS DEL PLANO

RECUPERACIÓN

- **Observa** la figura y, luego, **responde** la pregunta.

- *¿Si las longitudes de los segmentos* ***AB*** *y* ***BC*** *son* ***x*** *e* ***y****, respectivamente, cuál es la longitud de* ***AC****?*

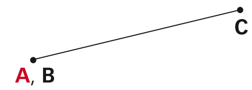


1 Concepto de distancia

Dados dos puntos cualesquiera del plano, **A** y **B**, la distancia entre ellos es un número, **d**(**A**,**B**), que cumple con:

- **d**(**A**, **B**) es un cero o positivo. La distancia entre **A** y **B** es cero, si ambos puntos coinciden y; positivo, si ambos puntos no coinciden:

  $\mathbf{d}(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = 0$; $\mathbf{d}(\mathbf{A}, \mathbf{C}) > 0$.



- La distancia no depende del orden en que se tomen los puntos **A** y **B**. La distancia de **A** a **B** y de **B** a **A** es la misma: **d**(**A**, **B**) = **d**(**B**, **A**).
- Para tres puntos, **A**, **B** y **C**, que no pertenecen a una misma recta, se cumplirá la desigualdad triangular:

$$\mathbf{d}(\mathbf{A}, \mathbf{B}) < \mathbf{d}(\mathbf{B}, \mathbf{C}) + \mathbf{d}(\mathbf{A}, \mathbf{C}).$$

2 Teorema de Pitágoras

En un triángulo rectángulo **ABC**, el cuadrado de la longitud del lado mayor o hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los otros dos lados, llamados catetos.

En el triángulo rectángulo de la izquierda: $\mathbf{c}^2 = \mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2$.

Para calcular un cateto, conocidos la hipotenusa y el otro cateto, se emplea una de las expresiones siguientes:

$$\mathbf{a}^2 = \mathbf{c}^2 - \mathbf{b}^2 \; ; \; \mathbf{b}^2 = \mathbf{c}^2 - \mathbf{a}^2.$$

EJEMPLOS:

- Obtener la longitud de la hipotenusa de un triángulo cuyos catetos miden 7 cm y 24 cm.

  Como $\mathbf{a} = 7$ cm y $\mathbf{b} = 24$ cm: $\mathbf{c}^2 = 7^2 + 24^2 = 49 + 576 = 625$.

  Entonces: $\mathbf{c} = \sqrt{625} = 25$ cm.

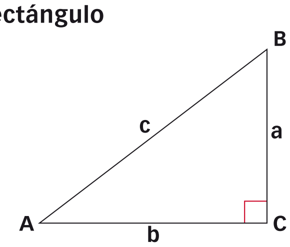
- Calcular la longitud del cateto **b** de un triángulo de hipotenusa **c** de 13 m y un cateto **a** de 5 m.

  Como $\mathbf{c} = 13$ m y $\mathbf{a} = 5$ m: $\mathbf{b}^2 = 13^2 - 5^2 = 169 - 25 = 144$.

  Luego: $\mathbf{c} = \sqrt{144} = 12$ cm.

RECUERDA

Elementos de un triángulo rectángulo



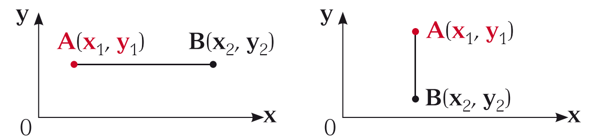
- El lado **AB** de longitud **c** es la hipotenusa.
- Los lados **BC** y **AC** de longitudes respectivas **a** y **b** son los catetos.
- Los ángulos **A** y **B** son agudos y el ángulo **C** es recto.

Sugerencias didácticas

- **Inicio:** Oriente a sus estudiantes para que lean y respondan en el aula la actividad vinculada a la recuperación de experiencias previas propuesta en el apartado *Recuperación*, relacionadas con la longitud de varios segmentos.
- **Desarrollo:** Haga que lean cuidadosamente el contenido de la doble página y que observen los procedimientos aplicados en los ejemplos resueltos. Pregúnteles: *¿Qué expresa el teorema de Pitágoras?* Haga que lean y comenten los elementos de un triángulo rectángulo, en el apartado *Recuerda*. Explíqueles estos conceptos en la pizarra.

3 Obtención de la distancia entre dos puntos

Si dos puntos **A** y **B** son extremos de segmentos paralelos al eje horizontal o al eje vertical, en el primer caso, su distancia es el valor absoluto de la diferencia de sus abscisas o, en el segundo caso, el valor absoluto de la diferencia de sus ordenadas.



$\mathbf{d}(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2| = |\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1|$; $\mathbf{d}(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = |\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2| = |\mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_1|$.

La distancia entre dos puntos $\mathbf{A}(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1)$ y $\mathbf{B}(\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2)$ se calcula con la expresión: $\mathbf{d}(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \sqrt{(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)^2 + (\mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_1)^2}$.

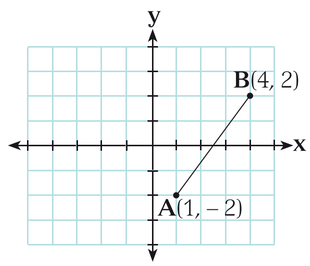
EJEMPLOS RESUELTOS:

- Determinar la distancia entre **A**(1, – 2) y **B**(4, 2).

  Como $\mathbf{x}_1 = 1$; $\mathbf{y}_1 = -2$; $\mathbf{x}_2 = 4$; $\mathbf{y}_2 = 2$, entonces:

  $\mathbf{d}(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \sqrt{(4-1)^2 + (2-(-2))^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5.$

  La distancia entre los puntos **A** y **B** es de 5 unidades.

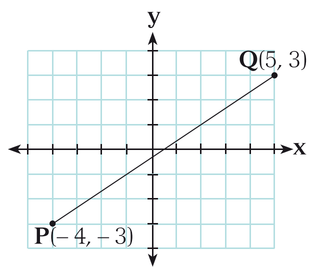


- Determinar la distancia entre **P**(– 4, – 3) y **Q**(5, 3).

  Como $\mathbf{x}_1 = -4$; $\mathbf{y}_1 = -3$; $\mathbf{x}_2 = 5$; $\mathbf{y}_2 = 3$, entonces:

  $\mathbf{d}(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) = \sqrt{(5-(-4))^2 + (3-(-3))^2} = \sqrt{9^2 + 6^2} = \sqrt{117} \approx 10.8.$

  La distancia entre los puntos **P** y **Q** es de 10.8 unidades.



ACTIVIDADES

13 Marca los pares de puntos, traza el segmento entre ellos y, finalmente, determina la longitud de cada segmento.

- **A**(4, 7) y **B**(0, 5)
- **A**(– 2, 3) y **B**(3, – 2)
- **A**(– 3, – 5) y **B**(– 1, 2)
- **A**(– 2, 0) y **B**(0, 6)

14 Los puntos de cada conjunto son vértices de un polígono. Márcalos sobre el plano cartesiano, descubre de qué polígono se trata en cada caso y calcula su polígono.

- **A**(– 4, 2); **B**(4, 5); **C**(4, 2)
- **P**(0, 6); **Q**(4, 6); **R**(2, 0)
- **X**(3, 5); **Y**(1, 2); **Z**(3, 5); **W**(1, 2)

15 Obtén, a partir de la fórmula, la distancia entre los puntos $\mathbf{A}(\mathbf{x}_1, \mathbf{c})$ y $\mathbf{B}(\mathbf{x}_2, \mathbf{c})$.
Observa que sus abscisas son distintas, $\mathbf{x}_1$ y $\mathbf{x}_2$ pero su ordenada es la misma, **c**.

- **Desarrollo:** Muestre a sus estudiantes el proceso de solución de los ejemplos resueltos. Desarrolle en la pizarra algunos ejemplos adicionales y, luego, pregúnteles: *¿Qué pasos debemos dar, al usar el teorema de Pitágoras, si lo que desconocemos es el valor de un cateto en un triángulo rectángulo?*
- **Cierre:** Motive a sus estudiantes a realizar los ejercicios del apartado *Actividades*. En la actividad 13, marcarán los pares de puntos, trazarán el segmento entre ellos y, finalmente, determinarán la longitud de cada segmento. En la actividad 14, marcarán los puntos indicados sobre el plano cartesiano, descubrirán el polígono de que se trata en cada caso y calcularán su polígono. Revise los resultados en el grupo.

Atención a la diversidad

Actividades de refuerzo: Proponga a sus estudiantes que calculen la distancia entre los puntos siguientes:

- **A** (4, 6) y **B** (6, 9)

  Resp.: **d** (**A**, **B**) = 5
- **A** (4, 6) y **B** (8, 10)

  Resp.: **d** (**A**, **B**) = 2√8
- **A** (4, 1) y **B** (7, 5)

  Resp.: **d** (**A**, **B**) = 5
- **A** (– 4, 0) y **B** (5, 0)

  Resp.: **d** (**A**, **B**) = 3

Ficha 27.

Competencia comunicativa

Al utilizar la fórmula de la distancia entre dos puntos, no importa a qué punto le coloquemos los subíndices, 2 o 1. El resultado será el mismo, porque la distancia de **A** a **B** es la misma que de **B** a **A**.

Aprender a aprender

Pregunte al grupo:

- *¿Tuvieron alguna dificultad para aplicar el teorema de Pitágoras en la resolución de problemas cotidianos?*
- *¿Qué problema de la vida diaria podrían resolver utilizando este método?*

Competencias

- Comunicativa.
- Uso de algoritmo.
- Resolución de problemas.

Indicadores de logro

- **Identifica** rectas paralelas y perpendiculares.
- **Traza** rectas paralelas, perpendiculares y mediatrices.
- **Identifica**, **traza** y **clasifica** ángulos. **Efectúa** operaciones con ángulos.
- **Determina** el complemento y el suplemento de un ángulo.
- **Reconoce** los ángulos formados por dos rectas paralelas y una secante.
- **Identifica** las coordenadas cartesianas de puntos del plano.
- **Conoce** y **aplica** correctamente el teorema de Pitágoras.
- **Obtiene** la distancia de dos puntos en el plano.
- **Resuelve** problemas del contexto donde aplica elementos geométricos y ángulos.

Competencias fundamentales

Competencia comunicativa

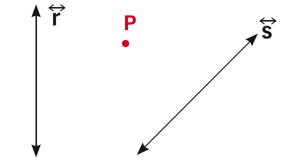
Es necesario que los estudiantes adquieran las habilidades necesarias para identificar las rectas y los ángulos y, al mismo tiempo, puedan desarrollar las competencias comunicativas que les permitan expresar y aplicar sus propiedades.

Uso de algoritmo

Las reglas y procedimientos en la resolución de operaciones aritméticas son vitales para la persecución de resultados correctos. Por ejemplo, en las operaciones con ángulos y el cálculo de la distancia de dos puntos en el plano.

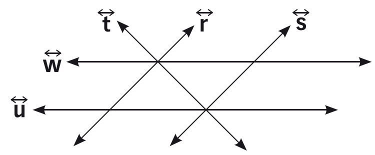
ACTIVIDADES

16 Copia las rectas **r** y **s** en tu cuaderno y, luego, haz lo que se te pide.



- Traza la recta paralela a **r** que pase por el punto **P**.
- Traza la recta paralela a **s** que pase por el punto **P**.
- Traza las perpendiculares a **r** y **s** que pasen por el punto **P**.

17 Observa la figura e identifica las posiciones relativas de los pares de rectas identificados.



- Las rectas **r** y **s**. *Paralelas*
- Las rectas **r** y **t**. *Perpendiculares*
- Las rectas **w** y **s**. *Secantes*
- Las rectas **w** y **r**. *Secantes*

18 Observa y, luego, responde.

- ¿Cuántas rectas pasan por el punto **P**? *Pasan infinitas rectas.*
- ¿Cuántas rectas pasan por los puntos **P** y **Q**? *Pasa una sola recta.*
- ¿Cuántos rayos distintos hay en la figura? *Cuatro rayos.*
- ¿Cuáles son esos rayos? *Los dos que salen de* **P** *y los dos que salen de* **Q**.

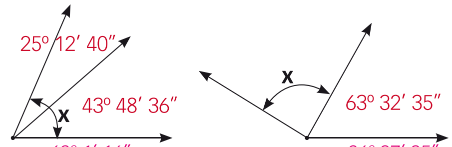
19 Traza una línea recta en tu cuaderno y marca sobre ella cuatro puntos distintos. Luego, responde las preguntas.

- ¿Hay solo tres segmentos sobre la recta? *No.*
- ¿Si hay más de tres segmentos, cuántos hay? ¿Cuáles son esos segmentos? *Hay seis segmentos:* **AB, AC, AD, BC, CD** *y* **BD**.

20 Traza con una regla segmentos con las longitudes siguientes.

- 6 cm
- 12 cm
- 1.5 dm
- 96 mm

21 Fíjate en los ángulos siguientes y sus medidas. Luego, obtén el valor de **x**.

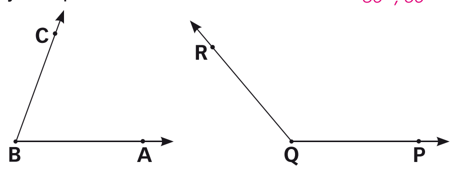


x = 69° 1′ 16″ *x = 86° 27′ 25″*

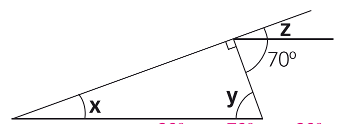
22 Obtén.

- El complemento de un ángulo de 25° 34′ 51″. *64° 25′ 9″*
- El suplemento de un ángulo de 152° 43′ 38″. *27° 16′ 22′*

23 Mide los ángulos siguientes, construye su bisectriz y comprueba tus resultados. *35° ; 65°*



24 Obtén, a partir de la figura, las medidas desconocidas de los ángulos.



x = 20°; y = 70°; z = 20°.

25 Haz lo que se te pide a continuación.

- **Marca** los puntos **A**(8, – 3), **B**(– 5, 2), **C**(4, 0) y **D**(– 5, –3) sobre el plano cartesiano.
- **Determina** la distancia entre los puntos: **A** y **B**; **B** y **C**; **A** y **D**; **B** y **D**.

d(A, B) = 13.93; d(B, C) = 9.23; d(A, D) = 13; d(B, D) = 5.

26 Calcula la longitud de la hipotenusa **c**, o de los catetos, **a** y **b**.

- **a** = 21 m; **b** = 220 m; **c** = ? *c = 221 m*
- **a** = ?; **b** = 312 m; **c** = 313 m. *a = 25 m*
- **a** = 75 m; **b** = ?; **c** = 120 m. *b = 93.67 m*

Sugerencias didácticas

- Las actividades propuestas en esta página están estrechamente vinculadas a los conceptos y procedimientos desarrollados a lo largo de la unidad. Haga que lean cuidadosamente las instrucciones y, después, verifique las respuestas obtenidas.
- Es importante observar de cerca que los estudiantes siguen las instrucciones y los procedimientos para efectuar operaciones con ángulos y el uso del teorema de Pitágoras para determinar la distancia de dos puntos en el plano y longitudes en situaciones de la cotidianidad.

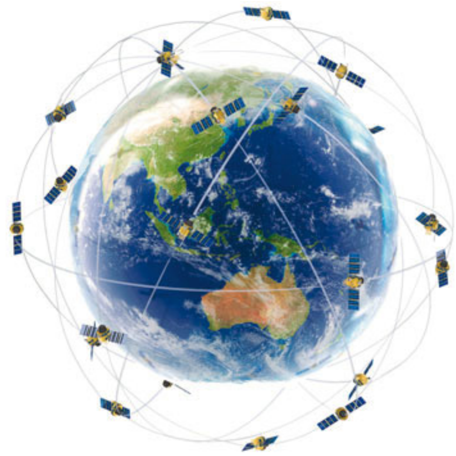
RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

27 Lee y, luego, responde.

El sistema de posicionamiento global (GPS) es un sistema diseñado para la determinación, mediante satélites, de la posición de un objeto sobre la superficie de la Tierra. Está constituido por 24 satélites que orbitan alrededor de la Tierra y cubren toda su superficie. Esos satélites operan con relojes de alta precisión.

El GPS identifica las posiciones de objetos y personas desde una altura de 20 000 kilómetros con precisión de unos pocos metros.

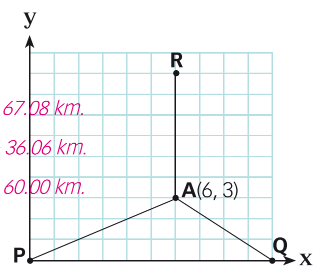
- ¿En qué situaciones has escuchado hablar del GPS? *Respuesta libre.*
- ¿Qué aplicaciones tiene el GPS? Señala tres. *Respuesta libre.*
- ¿Cuáles conceptos geométricos están presentes en el GPS?
  Coordenadas, distancias y triángulos.



28 Lee, observa la figura y, luego, responde.

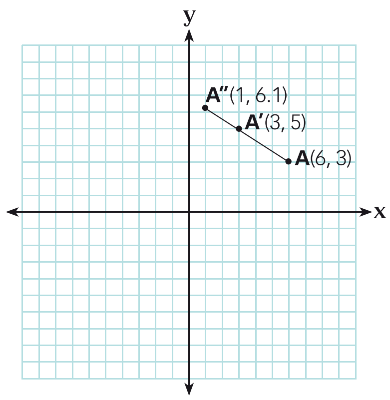
- **Imagina** tres satélites situados en un plano en los puntos **P**, **Q** y **R**. Cada satélite mide la distancia a la que se encuentra un barco con respecto a él. A las 21:00 horas el barco está localizado en el punto **A** (6, 3).

d(P, A) = 67.08 km.
d(Q, A) = 36.06 km.
d(R, A) = 60.00 km.



- A las 21:00 horas el barco está localizado en el punto **A** (6, 3). Si cada unidad de los ejes coordenados mide kilómetros, ¿a qué distancia del satélite **P** está el barco?
  ***d**(**P**, **A**) = 67.08 km.*
- ¿A qué distancias de los satélites **Q** y **R** está el barco a esa misma hora?
  ***d**(**Q**, **A**) = 36.06 km; **d**(**R**, **A**) = 60.00 km.*

29 Resuelve el problema.



- Los satélites del GPS determinan dos nuevas posiciones del barco, en la figura de arriba estas posiciones son **A'**(3, 5) y **A''**(1, 6.1). Quiere saberse si el barco se movió de **A**(6, 3) hasta **A''**(1, 6.1), siguiendo una línea recta.
- **Piensa** y, luego, **responde**. ¿Cómo resolverías el problema?
- **Comprueba** tus suposiciones y, luego, **comparte** con tus compañeros los resultados que obtuviste.

*De **A** hasta **A''** el barco no se movió en línea recta. En **A'** se desvió ligeramente.*

Conpetencias fundamentales

Resolución de problemas

- Las habilidades y destrezas adquiridas por los estudiantes son necesarias para identificar las alternativas más convenientes en la persecución de la solución de problemas que forman parte de su diario vivir. En este aspecto radica la importancia de que adquieran las destrezas necesarias en los aspectos relacionados con los elementos geométricos y ángulos vistos en la unidad.

Criterios de evaluación

Competencia comunicativa:

- Adaptación a las representaciones gráficas, simbólicas y numéricas a la situación de comunicación.

Uso de algoritmo:

- Seguimiento de las reglas, instrucciones y procedimientos.

Resolución de problemas:

- Adecuación de las estrategias y procedimientos al tipo de problema y al contexto.

Sugerencias didácticas

- Proponga a sus estudiantes que lean detenidamente las informaciones relacionadas con el sistema de posicionamiento global (GPS) y que se fijen en las ilustraciones. Haga que comenten las informaciones en el grupo y externen sus experiencias sobre el tema.
- Pídales que respondan las preguntas de la actividad 27 y realicen el ejercicio 28, que es una aplicación del plano cartesiano. Acompañe a sus estudiantes en la realización de estas actividades y ofrézcales las orientaciones necesarias.

Aprender a aprender

Motive a sus estudiantes para que inventen ejemplos de las aplicaciones cotidianas de los conceptos desarrollados en la unidad. Por ejemplo, pregunte al grupo:

- *¿Cómo medirían la altura de un edificio mediante el uso del teorema de Pitágoras?*
- Discuta las diversas respuestas con el grupo.

Indicadores de logro de la evaluación

- **Identifica** rectas paralelas y perpendiculares.
- **Traza** rectas paralelas, perpendiculares y mediatrices.
- **Identifica**, **traza** y **clasifica** ángulos. **Efectúa** operaciones con ángulos.
- **Determina** el complemento y el suplemento de un ángulo.
- **Reconoce** los ángulos formados por dos rectas paralelas y una secante.
- **Identifica** las coordenadas cartesianas de puntos del plano.
- **Conoce** y **aplica** correctamente el teorema de Pitágoras.
- **Obtiene** la distancia de dos puntos en el plano.
- **Resuelve** problemas del contexto donde aplica elementos geométricos y ángulos.
- **Utiliza** recursos virtuales y electrónicos: computadora, softwares educativos, juegos interactivos y otros, en la búsqueda de información.

Competencias específicas

- Modela y representa.
- Usa algoritmos.
- Conecta.

Aprender a aprender

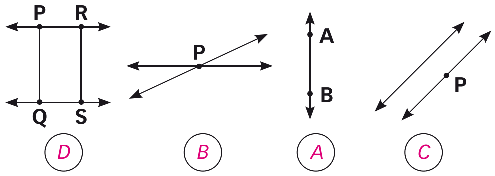
Haga que sus estudiantes apliquen los conceptos aprendidos en la unidad en situaciones de la cotidianidad, por ejemplo, preguntar:

- *¿Qué calles son paralelas o perpendiculares a la calle en la que residen en su sector?*

EVALUACIÓN

Modela y representa

30 Observa las figuras y, luego, escribe debajo la letra del enunciado que le corresponde.



A) Por dos puntos pasa una recta y solo una.

B) Dos rectas cualesquiera se cortan exactamente en un punto.

C) Por un punto exterior a una recta pasa una y solo una paralela a dicha recta.

D) La distancia entre paralelas es constante.

Modela y representa

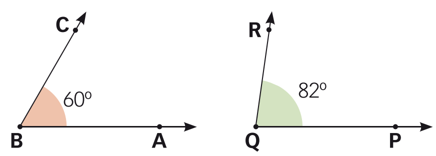
31 Traza dos líneas secantes **a** y **b** y una tercera línea **c** secante a las otras dos de tal manera que formes un triángulo. Luego, identifica lo que se te pide.

- Los ángulos opuestos por el vértice.
- Los ángulos adyacentes.

32 Construye dos rectas paralelas y, luego, haz lo que se te pide.

- Marca sobre cada una de las paralelas dos puntos y resalta, con un lápiz de color, los segmentos entre los dos puntos marcados.
- Traza las mediatrices de los segmentos resaltados. ¿Cómo son esas mediatrices?

33 Traza en tu cuaderno con un transportador ángulos con las medidas siguientes y, luego, construye la bisectriz de cada ángulo.



Usa algoritmos

34 Obtén lo que se te pide.

- El complemento de un ángulo cuya medida es 34º 15′ 58″. *55º 44′ 2″*
- El suplemento de un ángulo cuya medida es 102º 46′ 12″. *77º 13′ 48″*

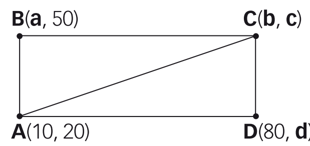
35 Calcula las longitudes de los segmentos $\overline{AB}$ y las coordenadas de sus puntos medios.

- **A**(6, 10) ; **B**(2, – 8) **Pm***(4, 1)*
- **A**(– 5, 4) ; **B**(– 3, – 2) **Pm***(– 4, 1)*
- **A**(0, – 5) ; **B**(2, 5) **Pm***(1, 0)*
- **A**(– 9, 0) ; **B**(– 5, 12) **Pm***(– 7, 6)*

Conecta

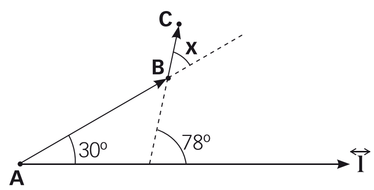
36 Resuelve los problemas siguientes. NOTA: Las medidas están en metros.

- Un agrimensor identificó por sus coordenadas tres puntos en un terreno. Las coordenadas de los tres puntos identificados sobre el terreno son **A**(12, 15); **B**(9, 20) y **C**(10, 27). ¿Si la unidad de medida utilizada es el metro, cuál es el perímetro del triángulo formado por **A**, **B** y **C**? **P** *= 25.07 m*
- Un solar tiene la forma rectangular mostrada. ¿Cuáles son las coordenadas **a**, **b**, **c** y **d**? ¿Qué longitud tiene la diagonal $\overline{AC}$?



a *= 10;* **b** *= 80;* **c** *= 50;* **a** *= 20. Diagonal = 76.158 m*

- Un avión se movía inicialmente formando un ángulo de 30º respecto a una recta $\overleftrightarrow{l}$. En un momento cambia de rumbo tomando la dirección indicada por el rayo **BC**. ¿De cuántos grados **x** fue el desvío? **x** *= 48º*

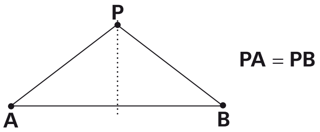


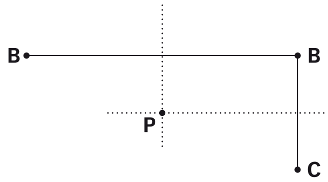
Sugerencias didácticas para la evaluación

- Es importante verificar, antes de dar inicio a las actividades de evaluación, que sus estudiantes identifican las rectas, los ángulos y sus operaciones, el uso del teorema de Pitagoras para determinar longitudes y la ubicación de puntos en el plano cartesiano. Observe que efectúen de forma correcta las operaciones con ángulos y las aplicaciones del teorema de Pitágoras.
- Si cuenta con tecnología como refuerzo, puede aplicar la prueba de la unidad que se encuentra en la plataforma didáctica Pleno.

37 Estudio de caso. Lean y, luego, hagan lo que se les pide.

Si **P** es un punto de la mediatriz de un segmento **AB**, los segmentos que **PA** y **PB** tienen la misma longitud.





- A partir de la afirmación anterior analicen y traten de ofrecer una solución al siguiente problema.

  En un parque se quiere colocar un farol que produzca la misma iluminación en tres puntos **A**, **B** y **C**. La luz de un farol produce la misma iluminación en los puntos situados a igual distancia del farol. ¿En qué punto **P** debe ponerse la lámpara?
  En el punto donde se cortan las mediatrices de ***AB*** *y* ***BC****.*
- Describan el procedimiento que siguieron para resolver el problema y, luego, justifíquenlo utilizando argumentos de la Geometría.
- Detallen en un informe su experiencia y sus conclusiones.

38 Piensa y, luego, responde.

- ¿De qué manera la Geometría ofrece recursos al arte y la arquitectura?
- Pon algunos ejemplos que apoyen tu respuesta. *Respuestas libres.*
- ¿En qué lugares de tu entorno cotidiano puedes apreciar la presencia de formas y figuras de la Geometría? *Respuestas libres.*

Proveyendo las formas y figuras, y sus propiedades y relaciones, empleadas para dar belleza y armonía a las construcciones.

APRENDIZAJE AUTÓNOMO

39 Marca según tus logros.

	Iniciado	En proceso	Logrado
• Identifico y trazo rectas paralelas y perpendiculares.	☐	☐	☐
• Identifico y trazo ángulos y efectúo operaciones con ellos.	☐	☐	☐
• Determino el complemento y el suplemento de un ángulo.	☐	☐	☐
• Reconozco los ángulos entre rectas paralelas y una secante.	☐	☐	☐
• Identifico las coordenadas cartesianas de puntos del plano.	☐	☐	☐

40 Reflexiona sobre tu aprendizaje.

- ¿Cómo juzgas tu desempeño en el trabajo con los contenidos de esta unidad?

Sugerencias didácticas para la evaluación

- Pregunte a sus estudiantes:
  - — *¿Qué nombre reciben las rectas que nunca se cortan?*
  - — *¿Cómo se denominan las rectas que dividen el plano en cuatro partes iguales?*
  - — *¿Cuál es el procedimiento, en las operaciones con ángulos, cuando los segundos se convierten en minutos y los minutos en horas?*

Estudio de caso

- En la actividad 37, *Estudio de caso*, deberán leer cuidadosamente el problema propuesto y las instrucciones, después, hacer lo que se les indica. En este caso, determinarán cuál es la posición más adecuada para colocar un farol en un parque que ilumine con la misma intensidad en tres puntos indicados. Motíve para que describan los procedimientos que aplicaron y ofrezcan un informe detallado de sus experiencias.

Actitudes y valores

Creatividad

En la sección destinada a *Actitudes y valores*, actividad 38, responderán de qué manera la Geometría ofrece recursos al arte y a la arquitectura. Pondrán algunos ejemplos que apoyen sus respuestas. Expresarán en qué lugares de su entorno cotidiano pueden apreciar la presencia de formas y figuras de la Geometría.

Aprendizaje autónomo

- En el apartado *Aprendizaje autónomo*, actividad 39, evaluarán por ellos mismos si los conceptos y procedimientos que trabajaron en la unidad se encuentran en estado de iniciación, en proceso o logrados. En la actividad 40, reflexionarán sobre su proceso de aprendizaje.

Reflexión sobre la práctica docente

Pregunte a sus estudiantes:

- *¿Hubo algún caso, de los temas desarrollados en la unidad, que consideren difícil? ¿Pudieron superar dicha dificultad? ¿Qué pasos dieron para superar el problema?*

5 Medidas

COMPETENCIAS

Específicas

- **Comunica**: **Expresa**, con la notación adecuada, las experiencias con medidas que ha experimentado en su diario vivir. **Usa** los símbolos de las unidades de peso, masa, capacidad, tiempo y temperatura.
- **Modela y representa**: **Usa** los símbolos de las unidades de peso, masa, capacidad, tiempo y temperatura en diferentes sistemas de medidas.
- **Usa algoritmo**: **Sigue** las reglas que le permiten obtener un resultado al resolver problemas que involucran unidades de medidas.
- **Conecta**: **Aplica** las diferentes unidades de medidas para resolver problemas de situaciones del contexto, de otras ciencias y de la propia Matemática.
- **Resuelve problemas**: **Resuelve** problemas que involucran distintas medidas de peso, masa, capacidad, tiempo y temperatura.
- **Utiliza herramientas tecnológicas**: **Utiliza** soportes tecnológicos como la Internet, la calculadora científica y otros dispositivos.

Fundamentales

Resolución de problemas: **Plantea** y **resuelve** problemas sobre situaciones del entorno que involucran el uso de unidades de medidas.

CONTENIDOS

Conceptos

- Medidas angulares.
- Transformaciones de medidas angulares.
- Medidas de peso, masa y capacidad.
- Medidas de tiempo.
- Medidas de temperatura.

Procedimientos

- Desarrollo de algoritmo de conversión de una medida a otra.
- Conversiones y estimaciones de peso, masa, capacidad, tiempo y temperatura.
- Uso internacional de las unidades de medidas.
- Estimación de diferentes medidas.
- Identificación de temperaturas en diferentes termómetros.
- Conversión de grados centígrados a Fahrenheit y viceversa.

Actitudes y valores

- Apreciación de la importancia de las medidas para la vida.
- Valoración de la justicia y la equidad en las acciones cotidianas que impliquen medidas.

Tiempo estimado de trabajo: 2 semanas

INDICADORES DE LOGRO

- **Reconoce** sistemas de unidades angulares.
- **Convierte** medidas angulares de un sistema a otro.
- **Mide** ángulos y **los expresa** en grados, minutos y segundos.
- **Reconoce** unidades de masa, peso y capacidad.
- **Realiza** conversiones de unidades de masa, peso y capacidad.
- **Identifica** unidades de tiempo.
- **Realiza** conversiones de unidades de tiempo.
- **Identifica** escalas de temperatura.
- **Convierte** medidas de temperatura.
- **Resuelve** problemas del contexto donde aplica diversas unidades de medidas.
- **Utiliza** recursos virtuales y electrónicos: computadora, softwares educativos, juegos interactivos y otros, en la búsqueda de información.

Valor transversal: Convivencia

Recursos digitales

Plataforma digital

CD

BIBLIOTECA DEL DOCENTE

- DOCUMENTOS PARA LA PLANIFICACIÓN
- EVALUACIÓN PRIMER SEMESTRE
- GUÍA DE RECURSOS TIC

CUADERNO DE ACTIVIDADES

UNIDAD 5	Medidas

RECURSOS DE REFUERZO Y AMPLIACIÓN

LibroMedia

ACTIVIDADES INTERACTIVAS

PÁGINA 84	Unidades de masa. Relaciones
PÁGINA 85	Grados, minutos y segundos
PÁGINA 91	El kilogramo y la libra
PÁGINA 93	Transformación de magnitudes de tiempo

CD DE RECURSOS DIGITALES: PLAN REGULAR

Pleno online — PRUEBA DE EVALUACIÓN FORMATIVA DE LA UNIDAD

Estrategias pedagógicas

- Recuperación de experiencias previas.
- Trabajo en equipo.
- Aprendizaje basado en problemas (ABP).

Unidad 5

Competencias de la unidad

- **Lee** y **comenta** las informaciones expuestas en el apartado *Punto de partida*.
- **Responde** preguntas relacionadas con las informaciones expuestas en el apartado *Punto de partida*.
- **Recupera** experiencias vividas mediante la observación de las imágenes de la ilustración.
- **Responde** preguntas vinculadas a sus experiencias previas sobre los conceptos que desarrollarán en la unidad en el apartado *Recuperación de conocimientos*.
- **Responde** preguntas vinculadas a las aplicaciones cotidianas de los conceptos que desarrollarán en la unidad en el apartado *Observación*.

Apertura de la unidad

Dentro de los objetivos principales de la apertura de esta unidad se encuentran el plantear una situación de aprendizaje, una problemática o un texto que sirve para contextualizar el tema de la unidad. Todo esto con la finalidad de motivar y despertar la curiosidad de los estudiantes.

A partir de la situación o texto planteado y las imágenes de la ilustración se conecta al estudiante con el tema a tratar, a la vez que se vincula la realidad o cotidianidad con los temas que se van a desarrollar.

Todos los elementos que conforman la portada promueven la recuperación de experiencias o conocimientos previos y la motivación o el interés por los conocimientos que adquirirán en la unidad.

5 Medidas

Punto de partida

Es el ser que mide —respondió Antonio a la pregunta sobre la actividad que mejor define al ser humano. De inmediato argumentó, que es posible hallar muestras de pensamiento y lenguaje en los animales más evolucionados. Que hay animales con algún sentido de belleza. Solo el ser humano mide.

La conversación entre Antonio y sus amigos continuó con sus pro y sus contra. Pero con la respuesta de Antonio, todos se pusieron a pensar en la importancia que han tenido las medidas en el desarrollo de la civilización.

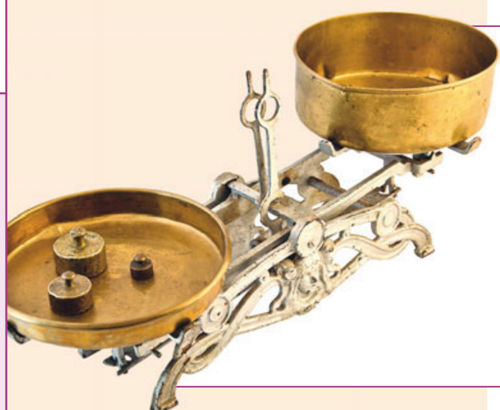
- ¿Puedes dar respuestas distintas a la de Antonio acerca de lo que caracteriza al ser humano?
- ¿Consideras que la respuesta de Antonio tampoco es totalmente cierta?
- ¿Habrá algún animal que estime distancias, pesos o temperaturas? **Investígalo**.

Conceptos y procedimientos

- Medidas angulares.
- Medidas de peso, masa y capacidad.
- Medidas de temperatura.
- Medidas de tiempo.
- Transformaciones de medidas.

Actitudes y valores

- Apreciar la importancia de las medidas para la vida.
- Valorar la justicia y la equidad en las acciones cotidianas que impliquen medidas.



RECUPERACIÓN DE CONOCIMIENTOS

- ¿Qué relaciones tienen las medidas con el desarrollo de la sociedad?
- ¿Por qué no puede concebirse una sociedad moderna ajena a operaciones de medición?
- ¿Cómo fueron depurándose y haciendo más precisos los sistemas de unidades?
- ¿De qué manera la técnica contribuye con el avance de los procesos de medición?
- ¿Cómo ensanchan los procesos de medición al conocimiento del medio natural y social?

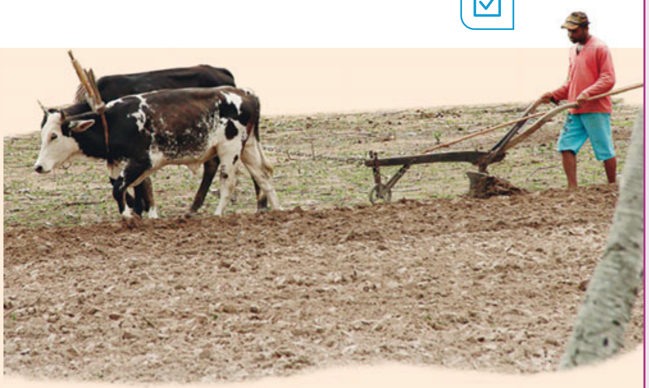
84

Trabajo colectivo de apertura

- **Punto de partida:** Guie a sus estudiantes a leer y comentar en el grupo las informaciones expuestas en el apartado *Punto de partida*, relacionadas con la importancia de las medidas en el desarrollo de las civilizaciones.
- **Recuperación de conocimientos:** Las preguntas de este apartado permiten hacer un diagnóstico de los conocimientos y las experiencias previas vinculados al impacto de las medidas en las sociedades.
- **Observación:** En este apartado se plantean preguntas relacionadas con las diversas actividades que observan en la ilustración.

OBSERVACIÓN

- Describe las actividades que se realizan en cada una de las situaciones mostradas en la doble página.
- ¿Dónde has visto situaciones en las que se desarrollen acciones similares a las que observas?
- ¿Qué magnitudes están presentes en los artículos que se venden en los supermercados?
- ¿Qué magnitudes se miden en un terreno como el que aparece a la derecha?



Esquema conceptual de la unidad

Medidas

con las que se asigna un número y una unidad a

- los ángulos
- el peso
- la masa
- la capacidad
- el tiempo
- la temperatura

Actividad de motivación

Pida a sus estudiantes que lean en la sección *Conceptos y procedimientos*, los temas que trabajarán en la unidad y las actitudes y valores que estarán presentes en el desarrollo de la misma. Luego, para que interioricen la importancia de la utilidad de las medidas en la vida cotidiana, formúleles preguntas tales como las siguientes:

- *¿Por qué es vital el uso de las medidas en nuestro diario vivir?*
- *¿Qué elementos de la vida cotidiana se miden?*
- *¿Por qué es importante medir el tiempo y la temperatura?*
- *¿De qué manera pueden medirse los alimentos? ¿Y los materiales de construcción?*

Actividad interactiva

Unidades de masa. Relaciones

El recurso es una interesante actividad interactiva en la que deben determinar el peso de varias agrupaciones de maletas y, luego, las ordenarán de mayor a menor peso.

Actitudes y valores

Convivencia

Aprovechar la situación planteada en el apartado *Punto de partida* y en las imágenes de la ilustración para conversar con sus estudiantes acerca de por qué las medidas están presentes en todos los aspectos de nuestra vida y del valor de ser justos en nuestras acciones. Pregunte al grupo:

- *¿Creen que en la vida diaria siempre se aplican la igualdad y la justicia? ¿Por qué?*

Indicadores de logro

- **Reconoce** sistemas de unidades angulares.

Actividad interactiva

Grados, minutos y segundos

Esta actividad interactiva consta de dos partes, en la primera, informarán sobre las medidas angulares y, en la segunda, representarán las medidas angulares en grados, minutos y segundo.

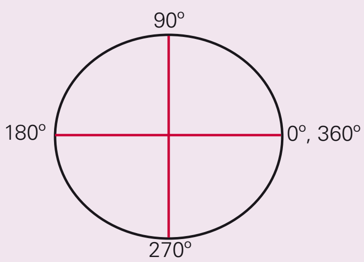
Más información

Comente a sus estudiantes, que entre los sistemas de medición angular se encuentran el sistema sexagesimal (inglés), el centesimal (francés) y el radial (circular).

El sistema sexagesimal divide la circunferencia sobre el plano en 360°. Su unidad es el grado sexagesimal (°). Cada grado se divide en 60 partes denominadas minutos (‘) y cada minuto en 60 partes llamadas segundos (“).

Sistema sexagesimal

Sistema inglés



RECUPERACIÓN

- **Escribe** la equivalencia en cada caso.
  - *5′ = ...′*　　*10′ = ...′*
  - *30′ = ...°*　　*15′ = ...°*
  - *20′ = ...″*　　*15′ = ...″*

1 El sistema sexagesimal

La unidad principal del sistema sexagesimal de medida de ángulos es el grado (°) , el cual es $\left(\frac{1}{360}\right)$ parte de una circunferencia.

El minuto (′) y el segundo (″) son fracciones de la unidad principal, el grado: $1' = \left(\frac{1}{60}\right)$; $1'' = \left(\frac{1}{3\,600}\right)$.

Es usual expresar la medida de un ángulo usando grados, minutos y segundos; pero en ocasiones, una medida angular puede ser expresada solo en grados.

EJEMPLOS RESUELTOS:

- Expresar la medida angular 35°40′18″ solo en grados

  Para escribir solo en grados la medida angular anterior, primero, se convierten en grados los minutos y segundos y, luego, se suman los resultados del paso anterior y el número de grados enteros:

  $40' = \left(\frac{40}{60}\right)^{o} \approx 0.667^{o}$; $18'' = \left(\frac{18}{3\,600}\right)^{o} = 0.005^{o}$

  Entonces:

  $$35^{o}40'18'' = 35^{o} + 0.667^{o} + 0.005^{o} = 35.672^{o}$$

- Expresar solo en grados la medida 58°32′50″.

  Aquí: $32' = \left(\frac{32}{60}\right)^{o} \approx 0.533^{o}$; $50'' = \left(\frac{50}{3\,600}\right)^{o} \approx 0.014^{o}$

  Luego:

  $$58^{o}32'50'' = 58^{o} + 0.533^{o} + 0.014^{o} = 58.547^{o}$$

  Si una medida angular está expresada solo en grados y una fracción decimal de grado, los minutos se obtienen multiplicando la parte decimal por 60′ y los segundos, multiplicando la parte decimal de los minutos por 60″.

EJEMPLOS RESUELTOS:

- Escribir la medida 142.625° en grados, minutos y segundos.

  Primero, se convierte la parte decimal de los grados en minutos: 0.625° = 0.625 x 60′ = 37.5′.

  Luego, se convierte la parte decimal de los minutos en segundos: 0.5′ = 0.5 x 60″ = 30″.

  Finalmente: 142.625° = 142° 37′ 30″.

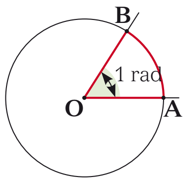
Sugerencias didácticas

- **Inicio:** Oriente a sus estudiantes para que lean y respondan la actividad vinculada a la recuperación de experiencias previas propuesta en el apartado *Recuperación*, relacionadas con equivalencias en grados, minutos y segundos.
- **Desarrollo:** Pida a sus estudiantes que lean cuidadosamente el contenido de la doble página y que observen el desarrollo de los ejemplos resueltos. Formúleles preguntas como, por ejemplo: *¿Cuál es la unidad principal de medida angular en el sistema sexagesimal? ¿Cómo puede expresarse usualmente la medida de un ángulo?* Continúe con las preguntas.

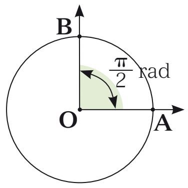
2 El Sistema Internacional de Magnitudes

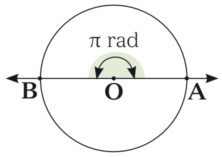
La unidad de medida angular del Sistema Internacional de Magnitudes es el radián (rad), que es la abertura de un ángulo con vértice en el centro de una circunferencia y que determina, sobre ella, una parte de igual longitud que su radio.

Longitud $\overline{OA}$ = longitud $\widehat{AB}$



Un cuarto de circunferencia equivale a $\frac{\pi}{2} \approx 1.57$ radianes, y media circunferencia equivale a $\pi \approx 3.14$ radianes.





EJEMPLO RESUELTO:

- ¿A qué parte de una circunferencia equivalen $\pi/3$ rad?

La respuesta se obtiene con una simple regla de tres:

$\frac{\pi}{2}$ rad $\longrightarrow$ $\frac{1}{4}$ circunferencia

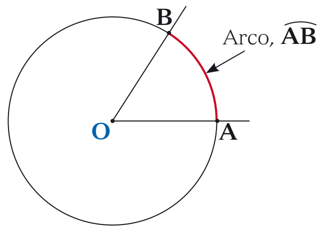
$\frac{\pi}{3}$ rad $\longrightarrow$ **x** circunferencia

$\mathbf{x} = \left(\frac{\pi}{3} \times \frac{1}{4}\right) \div \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{12} \div \frac{\pi}{2} = \frac{1}{16}$ de circunferencia.

MÁS INFORMACIÓN

Arco de circunferencia

Un arco es la parte de una circunferencia comprendida entre dos posiciones distintas de su radio.



$\measuredangle$**AOB** de vértice en el centro **O** de la circunferencia es un ángulo central.

ACTIVIDADES

1 Expresa las medidas angulares solo en grados sexagesimales.

- 55°12′50″ *55.214°*
- 125°8′46″ *125.1461°*
- 93°45′30″ *93.7583°*
- 10°56′ *10.933°*
- 150°45″ *150.0125°*

2 Expresa las medidas en grados, minutos y segundos.

- 32.45° *32° 27′*
- 64. 265° *64° 15′ 54″*
- 120.0875° *120° 5′ 15″*
- 0.0125° *0° 0′ 45″*
- 132.8532° *132° 51′ 11.52″*

3 Piensa y, luego, responde la pregunta en tu cuaderno. Comenta tu respuesta en el grupo.

- ¿La medida de un ángulo con vértice en el centro de una circunferencia depende de la longitud del radio de dicha circunferencia? *La medida el ángulo no depende del radio de la circunferencia.*

Atención a la diversidad

Actividades de refuerzo: Pida a sus estudiantes que expresen las siguientes medidas angulares solo en grados:

- 45° 38′ 15″ Resp.: 45.637°
- 29° 35′ 25″ Resp.: 29.590°
- 77° 58′ 36″ Resp.: 77.977°
- 95° 18′ 30″ Resp.: 95.308°
- 56° 49′ 35″ Resp.: 56.827°

Motíveles para que expresen las medidas angulares en grados, minutos y segundos.

- 154.825 Resp.: 154°60′30″
- 135.340 Resp.: 135°20′24″
- 96.635 Resp.: 96°38′6″
- 180.895 Resp.: 180°53′42″
- 85.960 Resp.: 85°57′36″

Ficha 28.

- **Desarrollo:** Muéstreles ejemplos de los conceptos desarrollados en la doble página. Pídales que lean y reproduzcan el contenido del apartado *Más información* que trata sobre el arco de circunferencia. Aclare al grupo que el símbolo (≈) significa 'aproximadamente'. Se usa cuando se hacen estimaciones hasta un determinado orden.
- **Cierre:** Motive a sus estudiantes a realizar los ejercicios del apartado *Actividades*. En la actividad 1, expresarán las medidas angulares solo en grados sexagesimales. En la actividad 2, expresarán las medidas en grados, minutos y segundos. En la actividad 3, responderán si la medida de un ángulo con vértice en el centro de una circunferencia depende de la longitud del radio de dicha circunferencia.

Aprender a aprender

Pregunte a sus estudiantes:

- *¿Necesitaron de ayuda adicional para realizar alguna de las actividades propuestas?*
- *¿En qué consistió la ayuda?*

Indicadores de logro

- **Convierte** medidas angulares de un sistema a otro.
- **Mide** ángulos y **los expresa** en grados, minutos y segundos.

Competencia comunicativa

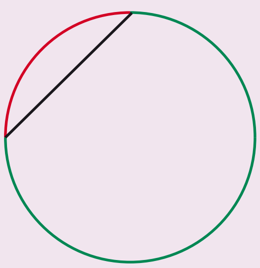
Comente con sus estudiantes que el ángulo de 60° mide $\pi/3$ radianes. Si no quisieran escribir esta medida empleando π, entonces se sustituye el valor de π, es decir 3.1416.

Por lo tanto:

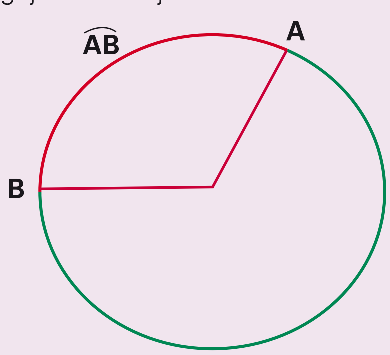
- $60° = \pi/3$ rad $= 3.1416/3$ rad $= 1.0472$ rad.
- $150° = 5\pi/6$ rad $= 5 \times 3.1416/3$ rad $= 2.618$ rad.

Más información

Comente al grupo que el arco de una circunferencia es cada una de las partes en que una cuerda divide dicha circunferencia.



Las letras que identifican el arco se escriben en sentido antihorario, es decir, contrario al movimiento de las agujas del reloj.



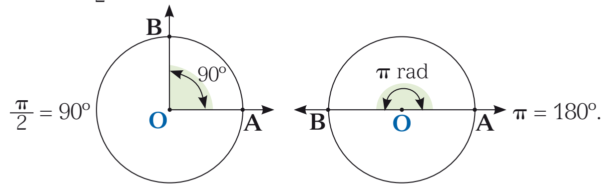
RECUPERACIÓN

■ Responde.

- *¿Cuántos ángulos llanos consecutivos forman una circunferencia?*
  2 ángulos llanos.
- *¿Y cuántos ángulos rectos y de 120°?*
  4 ángulos rectos y 3 de 120°.

1 Conversiones del sistema sexagesimal al Sistema Internacional

Un ángulo central de $\frac{\pi}{2}$ radianes determina un arco de un cuarto de circunferencia. Esto permite identificar a un ángulo de $\frac{\pi}{2}$ rad con un ángulo de 90°.



Como π rad $= 180° = 180 \times 1°$, entonces: $1° = \frac{\pi}{180}$ rad.

Para transformar una medida angular del sistema sexagesimal al Sistema Internacional de Magnitudes se multiplica la medida en grados por $\frac{\pi}{180}$.

EJEMPLOS RESUELTOS:

- Convertir a radianes la medida angular 60°.

  $$60° = 60 \times 1° = 60 \times \frac{\pi}{180} \text{ rad} = \frac{60\,\pi}{180} \text{ rad} = \frac{\pi}{3} \text{ rad.}$$

  Puesto que π no puede escribirse como un número decimal exacto, la expresión $\frac{\pi}{3}$ se deja tal y como aparece.
- Convertir a radianes la medida angular 150°.

  $$150° = 150 \times \frac{\pi}{180} \text{ rad} = \frac{150\,\pi}{180} \text{ rad} = \frac{5\pi}{6} \text{ rad.}$$

2 Conversiones del Sistema Internacional al sistema sexagesimal

Como π rad $= \pi \times 1$ rad $= 180°$, entonces: $1 \text{ rad} = \frac{180°}{\pi}$.

Para transformar una medida angular del Sistema Internacional de Magnitudes al sistema sexagesimal, se multiplica la medida en grados por $\frac{180°}{\pi}$.

EJEMPLOS RESUELTOS:

- Convertir $\frac{\pi}{4}$ rad al sistema sexagesimal.

  $$\frac{\pi}{4} \text{ rad} = \frac{\pi}{4} \times \frac{180°}{\pi} = \frac{180°}{4} = 45°.$$
- Convertir $\frac{2\pi}{5}$ rad al sistema sexagesimal.

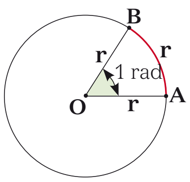
  $$\frac{2\pi}{5} \text{ rad} = \frac{2\pi}{5} \times \frac{180°}{\pi} = \frac{360°}{5} = 72°.$$

Sugerencias didácticas

- **Inicio:** Oriente a sus estudiantes para que lean y respondan en el aula las preguntas vinculadas a recuperación de experiencias previas propuestas en el apartado *Recuperación,* relacionadas con el concepto de ángulo. Motive al grupo a justificar sus respuestas.
- **Desarrollo:** Pida a sus estudiantes que lean cuidadosamente el contenido de la doble página y que observen las representaciones gráficas y los ejemplos resueltos. Es necesario que lleven al aula su regla y su compás para que reproduzcan los gráficos correspondientes y, luego, desarrollen los ejemplos en sus cuadernos.

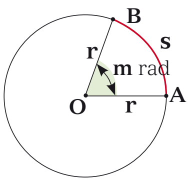
3 Longitud de un arco de circunferencia

Observa la figura siguiente.



$$\frac{\overset{\frown}{AB}}{OA} = \frac{s}{r} = \frac{r}{r} = 1 \text{ rad.}$$

Si el ángulo **AOB** mide un radián, entonces:



$$\frac{\overset{\frown}{AB}}{OA} = \frac{s}{r} = m \text{ rad.}$$

Si **m** es la medida de un ángulo central, expresada en radianes, la longitud del arco **s** se obtiene con: **s** = **m** x **r**.

La longitud, **s**, de un arco de circunferencia es el producto de la medida, **m**, en radianes, del ángulo que lo determina y el radio, **r**, de la circunferencia.

EJEMPLOS RESUELTOS:

- Obtener la longitud del arco determinado por un ángulo de $\frac{\pi}{5}$ rad en una circunferencia de 15 cm de radio.

  Aquí: $m = \frac{\pi}{5}$; $r = 15$ cm.

  $s = m \times r = \frac{\pi}{5} \times 15 \text{ cm} = 3\pi \text{ cm} \approx 9.42$ cm.

INTELIGENCIA COLABORATIVA

Medir un arco

Hagan lo que se les pide.

- **Tracen** con un compás una circunferencia de 8 cm de radio y sobre esta, usando un transportador, **construyan** un ángulo central de 60º.
- **Calculen**, con la fórmula de la longitud de un arco, el largo del arco comprendido entre los rayos del ángulo construido. **Aproximen** hasta las centésimas. *8.38 cm.*
- **Respondan**. ¿Cómo se mide con una regla la longitud de un arco?
- **Midan** la longitud del arco y **comparen** el resultado obtenido con la fórmula, con el resultado de la medición directa.
- **Tomen** la longitud calculada como la mejor y **calculen** el error absoluto cometido en la medición.

ACTIVIDADES

4 Convierte, del sistema sexagesimal al internacional y viceversa, usando la calculadora.

- 20º *π/9*
- 160º *8π/9*
- 42º *7π/30*
- 95º *19π/36*
- 124º *31π/45.*
- $\frac{4\pi}{15}$ *48º*
- $\frac{5\pi}{12}$ *75º*
- $\frac{3\pi}{4}$ *135º*
- $\frac{\pi}{8}$ *22º 30'*
- $\frac{15\pi}{16}$ *168º 45'*

5 Determina la longitud del arco de una circunferencia de 15 cm de radio, comprendido entre ángulos centrales con las medidas siguientes.

- $\frac{\pi}{6}$ rad. *2.5π cm ≈ 7.85 cm*
- $\frac{\pi}{12}$ rad. *1.25π cm ≈ 3.93 cm*
- $\frac{5\pi}{9}$ rad. *8.33π cm ≈ 26.17 cm*
- 50º *4.17π cm ≈ 13.10 cm*
- 135º *0.75π cm ≈ 35.34 cm*

Atención a la diversidad

Actividades de refuerzo: Pida al grupo que conviertan del sistema sexagesimal al Internacional usando la calculadora.

- 50º Resp.: 5π/18
- 75º Resp.: 5π/12
- 35º Resp.: 7π/36
- 40º Resp.: 4π/18

Haga que conviertan del Sistema Internacional al sexagesimal usando la calculadora.

- 2π/10 Resp.: 36º .
- 6π/12 Resp.: 90º .
- 5π/15 Resp.: 60º .
- 3π/9 Resp.: 60º
- 8π/30 Resp.: 48º

Ficha 29.

- **Desarrollo:** Pida a sus estudiantes que comenten el contenido del apartado *Inteligencia colaborativa* acerca de los procedimientos para medir un arco. Pídales que usen su compás y sigan los pasos indicados en sus cuadernos. Envíeles a la pizarra. Ofrézcales las orientaciones necesarias.
- **Cierre:** Motive a sus estudiantes a realizar los ejercicios del apartado *Actividades*. En la actividad 4, convertirán, del sistema sexagesimal al Internacional y viceversa, usando la calculadora. En la actividad 5, determinarán la longitud del arco de la circunferencia de 15 cm de radio, comprendido entre ángulos centrales con las medidas indicadas.

Aprender a aprender

Pregunte a sus estudiantes:

- *¿Cuáles son los pasos a dar para obtener la longitud de un arco limitado por un ángulo en la circunferencia?*
- *¿Son capaces de explicar a sus compañeros estos procedimientos?*

Indicadores de logro

- **Reconoce** unidades de masa, peso y capacidad.
- **Realiza** conversiones de unidades de masa, peso y capacidad.

Actividad interactiva

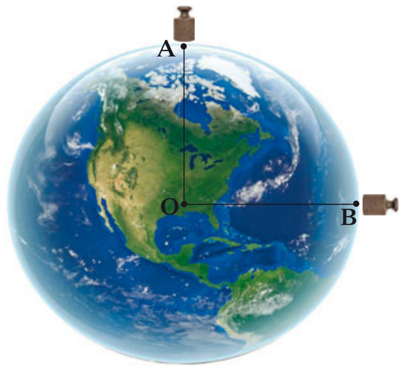
El kilogramo y la libra

En esta actividad interactiva se les presenta una tabla de factores de conversión entre kilogramos y libras. En este caso, realizarán las operaciones necesarias para realizar las conversiones y completar la tabla.

RECUPERACIÓN

Responde.

- *¿Cómo se sabe, utilizando la percepción sensorial, cuándo un objeto pesa más que otro?*
- *¿Por qué no siempre se puede utilizar el procedimiento anterior para comparar pesos?*



$\overline{OA} < \overline{OB}$

Planeta Tierra. En los polos un objeto está más cerca del centro de la Tierra; en la línea ecuatorial el objeto está más alejado del centro.

1 Unidades de peso

El peso de un objeto es la fuerza de atracción que ejerce la Tierra sobre dicho objeto.

El peso depende del lugar donde se encuentre el objeto, por tanto, no es constante. El peso de un objeto es mayor cuanto más cercano esté ese objeto del centro de la Tierra; por esto, en los polos, los objetos pesan ligeramente más que en la línea ecuatorial.

Las unidades de medida del peso más usuales son la libra (lb) y la onza (oz), que son unidades del Sistema Inglés:

1 lb = 16 oz ; 1 oz = 0.0625 lb.

Otra unidad es el kilogramo o kilo (kg), que no debe ser confundido con el utilizado como unidad de masa:

1 kg = 2.20 lb ; 1 lb = 0.45 kg.

EJEMPLOS RESUELTOS:

- Un paquete de 12.75 lb tiene: 12.75 x 16 oz = 204 oz.
- Un paquete de 5 kg tiene: 5 x 2.2 lb = 11 lb.
- Un paquete de 400 oz tiene: 400 x 0.0625 lb = 25 lb.

2 Unidades de masa

La masa es la resistencia que opone un cuerpo a ser movido, si está inicialmente en reposo; o a ser detenido, si está inicialmente en movimiento.

En el Sistema Internacional de Magnitudes la unidad principal de masa es el kilogramo (kg).

Otras unidades de masa son el gramo (g) y la tonelada (t):

1 kg = 1 000 g ; 1 g = 0.001 kg.

1 t = 1 000 kg ; 1 kg = 0.001 t.

EJEMPLOS RESUELTOS:

- Un objeto de 0.075 kg tiene: 0.075 x 1 000 g = 75 g.
- Un cuerpo de 12 800 g tiene: 12 800 x 0.001 kg = 12.8 kg.
- Un cuerpo de 0.325 t tiene: 0.325 x 1 000 kg = 325 kg.

Más información

Explique a los estudiantes que la masa es la cantidad de materia que tiene un cuerpo. Hay objetos que, aunque tengan el mismo tamaño o volumen, tienen distinta cantidad de materia, por ejemplo, un cubo plástico y un cubo de hierro, este último tiene mayor cantidad de masa y, por lo tanto, mayor peso que el de plástico. Pida al grupo que expresen ejemplos similares a estos en el aula.

Sugerencias didácticas

- **Inicio:** Oriente a sus estudiantes para que respondan en el aula las preguntas de recuperación de experiencias previas propuestas en el apartado *Recuperación*, relacionadas con el peso de los cuerpos.
- **Desarrollo:** Haga que lean cuidadosamente el contenido de la doble página y que observen el desarrollo de los ejemplos resueltos. Formúleles preguntas como, por ejemplo: *¿Cómo se define el peso de un objeto? ¿Qué es la masa de un cuerpo?* Haga que observen la ilustración del planeta Tierra y que lean y comenten la información al pie de la misma.

3 Unidades de capacidad

La capacidad de un recipiente es la cantidad de líquido que cabe en dicho recipiente.

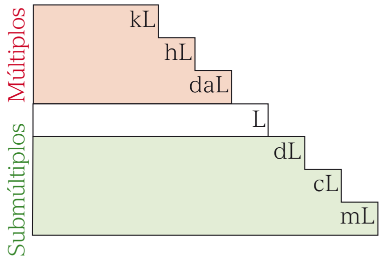
La unidad principal de capacidad es el litro (L), que es la cantidad de líquido que cabe en un recipiente con un volumen de un decímetro cúbico. Esto último no debe inducirnos a confundir el concepto de capacidad con el de volumen, simplemente lo que se quiere significar es que en un volumen de 1 dm^3 cabe 1 L.

Otras unidades de capacidad son los múltiplos del litro, el kilolitro (kL), el hectolitro (hL) y el decalitro (daL) y sus submúltiplos, el decilitro (dL), el centilitro (cL) y el mililitro (mL):

1 kL = 1 000 L; 1 hL = 100 L; 1 daL = 10 L.

1 dL = 0.1 L; 1 cL = 0.01 L; 1 mL = 0.001 L.

Cada unidad de capacidad es 10 veces mayor que la inmediatamente inferior y 10 veces menor que la inmediatamente superior.



EJEMPLOS:

- Un recipiente de 25 L tiene: 25 x 10 dL = 250 dL.
- Un recipiente de 15 000 L tiene: 15 000 x 0.01 hL = 150 hL.
- Un recipiente de 675 cL tiene: 675 x 0.001 daL = 0.675 daL.
- Un recipiente de 12 cuartillos tiene: 12 x 0.5 L = 6 L.

MÁS INFORMACIÓN

Otras medidas de capacidad

En la vida cotidiana y la práctica comercial se usan como unidades de capacidad la taza, el cuartillo y el galón.

1 taza = 250 mL.

1 cuartillo = 0.50 L.

1 galón = 3.79 L.

ACTIVIDADES

6 Convierte.

- 7 lb a oz. *112 oz.*
- 70 oz a lb. *4.375 lb.*
- 18.25 lb a oz. *292 oz.*
- 125 lb a kg. *56.82 kg.*
- 0.54 lb a oz. *8.64 oz.*
- 0.75 kg a lb. *1.65 lb.*
- 728 oz a lb. *45.5 lb.*
- 850 oz a kg. *24.148 kg.*
- 75.4 oz a lb. *4.7125 lb.*
- 0.025 kg a oz. *0.88 oz.*

7 Transforma las medidas de masa y capacidad.

- 5 kg a g. *112 oz.*
- 20 L a dL. *200 dL.*
- 0.75 kg a g. *292 oz.*
- 350 daL a L. *3.5 L.*
- 450 g a kg. *8.64 oz.*
- 0.048 kL a daL. *4.8 daL.*
- 1 240 g a kg. *45.5 lb.*
- 850 L a galones. *224.27 galones.*
- 0.06 t a kg. *4.7125 lb.*
- 36 cuartillos a tazas. *72 tazas.*

8 Piensa y, luego, responde. Después, explica qué hiciste para responder.

- ¿Cuántos cm^3 o cc de volumen debe tener un recipiente para que quepa un litro de agua? *1 000 cm^3*

- **Desarrollo:** Muestre a sus estudiantes, con ejemplos prácticos, las aplicaciones de los conceptos estudiados en esta doble página. Explíqueles, con ejemplos diversos en la pizarra, los pasos para efectuar las conversiones de unidades de peso, masa y capacidad.
- **Cierre:** Motive a sus estudiantes a realizar los ejercicios del apartado *Actividades*. En la actividad 6, efectuarán conversiones de unidades de peso, masa y capacidad. En la actividad 7, transformarán medidas de masa y capacidad. En la actividad 8, explicarán, justificando sus respuestas, cuántos centímetros cúbicos o cc de volumen debe tener un recipiente para que quepa un litro de agua.

Atención a la diversidad

Actividades de refuerzo: Organice a sus estudiantes en grupos de 3 o 4 integrantes. Luego, pídales que tengan a la mano sus cuadernos para que realicen conversiones de medidas de peso, masa y capacidad.

Unidades de peso

- 15 lb _____oz. Resp.: 240 oz.
- 160 oz ____ lb. Resp.: 10 lb.
- 25 kg _____ lb. Resp.: 55 lb.
- 440 lb ____ kg. Resp.: 200 kg.

Unidades de masa

- 0.035 kg ___ g. Resp.: 35 g.
- 15 600 g __ kg. Resp.: 15.6 kg.
- 0.445 t ___ kg. Resp.: 445 kg.
- 5 500 g ___ kg. Resp.: 5.5 kg.

Unidades de capacidad

- 5 kl ____ l. Resp.: 5 000 l.
- 30 hl ___ l. Resp.: 3 000 l.
- 2 000 l __ kl. Resp.: 2 kl.
- 5 000 ml __ l. Resp.: 5 l.

Ficha 30.

Aprender a aprender

Pregunte al grupo:

- *¿Qué utilidad para la cotidianidad tienen los conceptos estudiados en esta oportunidad?*
- *¿Podrían diseñar un ejemplo?*

Indicadores de logro

- **Identifica** unidades de tiempo.
- **Realiza** conversiones de unidades de tiempo.

Actividad interactiva

Transformación de magnitudes de tiempo

En esta actividad interactiva los estudiantes efectuarán las operaciones necesarias para transformar unidades de tiempo que involucran horas, minutos y segundos.

Otras sugerencias

A manera de repaso, muestre a sus estudiantes algunas de las unidades pequeñas y grandes de tiempo. Por ejemplo:

Unidades pequeñas:

- Un día = 24 horas.
- Una hora = 60 minutos.
- Un minuto = 60 segundos.

Unidades grandes:

- Una semana = 7 días.
- Un mes = 28, 30 o 31 días.
- Un bimestre = 2 meses.
- Un trimestre = 3 meses.
- Un cuatrimestre = 4 meses.
- Un semestre = 6 meses.
- Un año = 12 meses.
- Un lustro = 5 años.
- Una década = 10 años.
- Un siglo = 100 años.

RECUPERACIÓN

■ Responde.

- *¿Qué fenómenos naturales se toman como base para medir el tiempo en nuestro planeta?*

1 Unidades de tiempo

El paso del tiempo se mide con el reloj en horas (h), minutos (min) y segundos (s).

El segundo es la unidad de tiempo del Sistema Internacional de Magnitudes. La definición del segundo está basada en la duración de ciertos fenómenos atómicos de corta duración.

Para convertir medidas de tiempo de una unidad a otra utilizaremos las equivalencias siguientes:

1 h = 60 min; 1 min = 60 s; 1 h = 3 600 s.

EJEMPLOS RESUELTOS:

- Convertir 2.5 h en minutos: 2.5 h = 2.5 x 60 min = 150 min.
- Convertir 450 min en horas:
  450 min = 450 x 1/60 h = 7.5 h.
- Convertir 8 280 s en horas:
  8 280 s = 8 280 x 1/3 600 h = 2.3 h

2 Duración de un evento

La duración de un evento es el tiempo transcurrido entre su inicio y su terminación

Para determinar la duración de un fenómeno se hacen dos lecturas del reloj, $\mathbf{t_1}$ al inicio del fenómeno y $\mathbf{t_2}$ al término del fenómeno y, luego, se resta la primera lectura de la segunda:

Duración = $\mathbf{t_2} - \mathbf{t_1}$ (Siempre $\mathbf{t_2} > \mathbf{t_1}$).

EJEMPLOS RESUELTOS:

- Un autobús salió en la mañana de Santo Domingo hacia La Vega a las 8 horas, 15 minutos y 36 segundos. ¿Si el autobús llegó a su destino a las 10 horas, 14 minutos y 23 segundos, cuánto tiempo duró el viaje?

  Se resta la lectura inicial del reloj de la lectura final:

$$\begin{array}{rrrr} & 9 & 73 & 60 \\ & 10\text{ h} & 14\text{ min} & 23\text{ s} \\ - & 8\text{ h} & 15\text{ min} & 36\text{ s} \\ \hline & 1\text{ h} & 58\text{ min} & 47\text{ s} \end{array}$$

  El viaje del autobús duró 1 h, 58 min y 47 s.

Sugerencias didácticas

- **Inicio:** Oriente a sus estudiantes para que lean y respondan en el aula la pregunta vinculada a la recuperación de experiencias previas propuesta en el apartado *Recuperación*, relacionada con las medidas de tiempo.
- **Desarrollo:** Pídales que lean el contenido de la doble página, que observen los procedimientos aplicados en los ejemplos resueltos y las ilustraciones. Formúleles preguntas como, por ejemplo: *¿Cómo se expresa la duración de un evento? ¿Qué es el UTC?* Discuta las respuestas con el grupo.

3 Otras unidades de tiempo. El UTC

En el calendario se mide el tiempo en días, semanas, meses y años, unidades que se transforman como sigue:

1 día = 24 h; 1 semana = 7 días; 1 mes = 30 días.

1 año = 12 meses; 1 año = 365 días; 1 mes = 30 días.

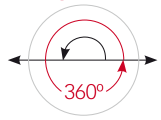
Otras unidades de tiempo son: bimestre (2 meses); el trimestre (3 meses); semestre (6 meses); bienio = 2 años; cuatrienio (4 años); lustro (5 años); década (10 años); siglo (100 años); milenio (1 000 años).

El tiempo universal coordinado (UTC) es el modo de coordinar los relojes en todo el mundo. Permite conocer la hora que marca un reloj en cualquier lugar del mundo.

MÁS INFORMACIÓN

Horas y ángulos

La representación angular de una circunferencia es un ángulo completo de 360º.



Una hora equivale a una medida angular de 15º, que es el resultado de dividir 360º por 24, el número de horas que tiene el día. Cada franja de 15º es un huso horario.

Mapamundi con los 24 husos horarios.

ACTIVIDADES

9 Convierte.

- 15 h a min. *900 min.*
- 480 min a h. *8 h.*
- 20 min a s. *1 200 s.*
- 12 h a s. *43 200 s.*
- 12 600 s a h. *3.5 h.*
- 114 meses a años. *9.5 años.*
- 75 días a meses. *2.5 meses.*
- 9 bienios a años. *18 años.*
- 3 milenios a siglos. *30 siglos.*

10 Resuelve el problema.

- Un velero hizo un recorrido en tres etapas. En la primera tardó 1 h, 35 min y 38 s; en la segunda, 3 h, 48 min y 12 s; y en la tercera, 5 h, 27 min y 51 s. ¿En qué tiempo hizo el recorrido completo? *10 h, 51 min y 41s.*

- **Desarrollo:** Muestre a sus estudiantes el proceso de solución de los ejemplos resueltos en el cálculo de las unidades de tiempo. Propóngales que lean y comenten el contenido del apartado *Más información,* sobre la equivalencia angular de la hora. Explique al grupo que mediante la UTC, tiempo universal coordinado, se programan las actividades de los puertos marítimos y aeropuertos, el funcionamiento de la Internet y se realizan las actualizaciones de los buscadores.
- **Cierre:** Motive a sus estudiantes a realizar los ejercicios propuestos en el apartado *Actividades*. En la actividad 9, realizarán conversiones de unidades de tiempo. En la actividad 10, resolverán un problema en el que calcularán la duración de un evento.

Atención a la diversidad

Actividades de refuerzo: Pídales que conviertan las siguientes unidades de tiempo.

- 6.30 h a min.
  Resp.: 378 min.
- 4 h a s.
  Resp.: 14 400 s.
- 57 600 s a h.
  Resp.: 16 h.
- 15 lustros a años.
  Resp.: 75 años.
- 10 décadas a años.
  Resp.: 100 años.
- 5 000 años a milenios.
  Resp.: 5 milenios.

Ficha 31.

Actividades de ampliación: Motive al grupo para que calculen la duración de los siguientes eventos:

- Cuántos años duró un evento que tiene un milenio, 6 siglos, 9 décadas, 8 lustros y 4 años.

  Resp.: 1 000 + 600 + 90 + 40 + 4 = 1 734 años.
- Una fiesta inicia a las 8 horas, 15 minutos y 30 segundos. Si terminó a las 12 horas, 20 minutos y 30 segundo, *¿qué tiempo duró la fiesta?*

  Resp.: Duró 4 horas, 5 minutos y 10 segundos.

Aprender a aprender

Pregunte al grupo:

- *¿Cuáles pasos dieron para resolver el problema propuesto en las actividades?*
- *¿Les resultó fácil?*
- *¿Por qué?*

Indicadores de logro

- **Identifica** distintas escalas de temperatura.
- **Convierte** diversas medidas de temperatura.

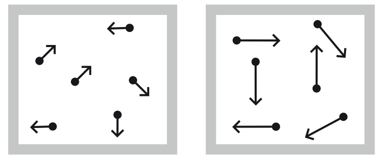
RECUPERACIÓN

■ Responde.

- *¿Cómo se toma la temperatura corporal con un termómetro?*
- *¿Con qué finalidad se toma?*

1 Concepto de temperatura

Si se transfiere calor, que es una forma de energía, al gas contenido en el recipiente cerrado, sus moléculas empezarán a moverse más y más rápido. Cuanto más calor absorben las moléculas del gas, mayor es la velocidad con que se mueven, aumentando su energía cinética.



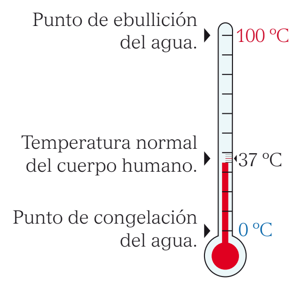
$T_2 > T_1$

> La temperatura de un cuerpo es una medida del promedio de la energía cinética de todas sus moléculas.

La temperatura se mide con el termómetro en grados Celsius (ºC) y grados Fahrenheit (ºF). Estas unidades no pertenecen al Sistema Internacional de Magnitudes.

2 Grados Celsius

Para medir la temperatura en grados Celsius se toman como puntos de referencia el punto de congelación del agua, al cual se le asigna una temperatura de 0 ºC, y el punto de ebullición del agua, al que se asigna una temperatura de 100 ºC.



Entre los puntos 0 ºC y 100 ºC del termómetro hay 100 grados Celsius o centígrados, de aquí este segundo nombre de la escala.

La temperatura normal del cuerpo humano es de 37 ºC; un pollo se hornea a 200 ºC y un jugo de naranja se conserva en buen estado a unos 4 ºC.

MÁS INFORMACIÓN

Comparación de las unidades de temperatura

Como entre los puntos de congelación y de ebullición del agua caben 100 grados Celsius o 180 grados Fahrenheit, las unidades de temperatura Fahrenheit son más pequeñas que las de temperatura Celsius.

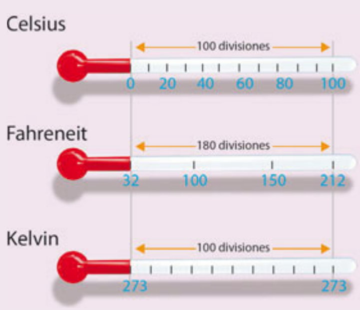
Cuando un termómetro en ºF sube un grado, un termómetro en ºC solo sube $\frac{5}{9}$ de 1 ºC.

Más información

Informe a sus estudiantes que el grado Celsius (ºC) no forma parte del Sistema Internacional de magnitudes. La escala Celsius se usa con frecuencia para expresar temperaturas de uso cotidiano como, por ejemplo, la temperatura del aire y el agua, electrodomésticos y experimentos científicos. La escala Celsius asigna 0º al nivel de congelación del agua y 100º al de ebullición.

El uso de las distintas unidades de medidas depende del lugar del mundo donde se aplican, generalmente, en los lugares cuyo idioma oficila es el español se utiliza el sistema métrico decimal y se mide la temperatura en grados Celsius.

Estas son las escalas Celsius, Fahrenheit y Kelvin.



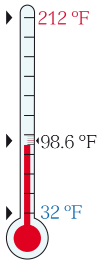
Sugerencias didácticas

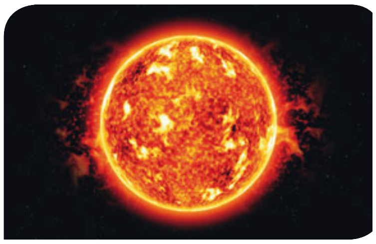
- **Inicio:** Oriente a sus estudiantes para que lean y respondan en el aula las preguntas vinculadas a la recuperación de experiencias previas propuestas en el apartado *Recuperación*, relacionadas con las medidas de temperatura.
- **Desarrollo:** Pida a sus estudiantes que lean cuidadosamente el contenido de la doble página, que observen las representaciones gráficas de cada concepto y los ejemplos resueltos. Pídales que lean el contenido del apartado *Más información*, sobre la comparación de las unidades de temperatura.

3 Grados Fahrenheit

Los termómetros de grados Fahrenheit y Celsius tienen los mismos puntos de referencia pero, al punto de congelación del agua se le asigna una temperatura de 32 °F y al punto de ebullición del agua, una temperatura de 212 °F.

Entre los puntos 32 °F y 212 °F del termómetro hay 180 grados Fahrenheit.





El Sol. La temperatura en la superficie solar se estima en unos 5 500 °C.

4 Conversiones de temperatura

Observa la siguiente tabla de conversiones de temperatura.

De °F a °C	$T_{°C} = \frac{5}{9} \times (T_{°F} - 32°)$.
De °C a °F	$T_{°F} = \frac{9}{5} \times T_{°C} + 32°$.

EJEMPLOS RESUELTOS:

- Convertir 40 °C en °F.

$$T_{°F} = \frac{9}{5} \times T_{°C} + 32 = \frac{9}{5} \times 40\ °C + 32 = 104\ °F.$$

- Convertir 125 °F en °C.

$$T_{°C} = \frac{5}{9} \times (T_{°F} - 32) = \frac{5}{9} \times (125\ °F - 32) = 51.67\ °C.$$

MÁS INFORMACIÓN

Escala Kelvin

La escala Kelvin o escala de temperaturas absolutas es la propia del Sistema Internacional. La temperatura se mide en Kelvin (K), que no son grados.

Para transformar temperaturas en grados Celsius a Kelvin y viceversa se usan las expresiones:

$$T_{°C} = T_k - 273°.$$

$$T_k = T_{°C} + 273.$$

ACTIVIDADES

11 Convierte las temperaturas siguientes de grados Celsius a grados Fahrenheit.

- 25 °C *77 °F*
- 64 °C *147.2 °F*
- 150 °C *302 °F*
- – 10 °C *14 °F*
- 2 000 °C *3 632 °F*
- 40 °C *– 40 °F*

12 Convierte las temperaturas siguientes de grados Fahrenheit a grados Celsius.

- 80 °F *26.6 °C*
- – 15 °F *– 26.11 °C*
- 12 °F *– 11.11 °C*
- 221 °F *105 °C*
- 8 000 °F *4 426.67 °C*
- – 4 °F *– 20 °C*

13 Resuelve el problema.

- Unas barras metálicas están originalmente a 400 °C y deben bajar su temperatura a 50 °C para una prueba de laboratorio. Si el único termómetro disponible está en grados Fahrenheit, ¿qué temperatura de las barras registrará el termómetro luego de enfriarse? *662 °F*

Atención a la diversidad

Actividades de refuerzo: Haga que conviertan las siguientes temperaturas de grados Celsius a grados Fahrenheit.

- 30 °C Resp.: 86 °F
- 84 °C Resp.: 183.2 °F
- – 8 °C Resp.: 17.6 °F
- 160 °C Resp.: 320 °F
- 1 000 °C Resp.: 81 832 °F

Haga que conviertan las siguientes temperaturas de grados Fahrenheit a grados Celsius.

- 90 °F Resp.: 32.22 °C
- – 35 °F Resp.: – 37.22 °C
- 18 °F Resp.: – 7.77 °C
- 225 °F Resp.: 107.22 °C
- 72 °F Resp.: 22.22 °C

Ficha 32.

- **Desarrollo:** Proponga a sus estudiantes que lean el contenido del apartado *Más información* acerca de la escala Kelvin. Muéstreles en la pizarra ejemplos de las conversiones de unidades de temperatura Celsius, Fahrenheit y Kelvin. Haga que memoricen las expresiones. Envíeles a la pizarra.
- **Cierre:** Motive a sus estudiantes a realizar los ejercicios del apartado *Actividades*. En la actividad 11, convertirán las temperaturas de grados Celsius a grados Fahrenheit. En la actividad 12, convertirán las temperaturas de grados Fahrenheit a grados Celsius. En la actividad 13, resolverán un problema que involucra convertir temperaturas en grados Celsius a grados Fahrenheit.

Aprender a aprender

Pregunte al grupo:

- *¿Cómo contribuyen en su formación educativa los temas estudiados en esta doble página?*
- *¿Podrían dar ejemplos que confirmen sus respuestas?*

Competencias

- Comunicativa.
- Uso de algoritmo.
- Resolución de problemas.

Indicadores de logro

- **Reconoce** sistemas de unidades angulares. **Convierte** medidas angulares de un sistema a otro. **Mide** ángulos y **los expresa** en grados, minutos y segundos. **Reconoce** unidades de masa, peso y capacidad.
- **Realiza** conversiones de unidades de masa, peso y capacidad. **Identifica** unidades de tiempo. **Realiza** conversiones de unidades de tiempo.
- **Identifica** escalas de temperatura. **Convierte** medidas de temperatura. **Resuelve** problemas del contexto donde aplica diversas unidades de medidas.

ACTIVIDADES

14 Lee y, luego, escribe cada medida angular como se te indica.

> La medida de un ángulo expresada en una sola unidad (grados, minutos o segundos) es una medida incompleja. En cambio, si está expresada en unidades distintas (grados, minutos y segundos), es una medida compleja.

- En forma compleja.
  - 12.625° *12° 37′ 30″*
  - 40.248° *40° 14′ 52.8″*
  - 60.045° *60° 2′ 42″*
  - 1 250′ *20° 50′*
  - 5 000″ *1° 23′ 20″*
  - 25 000″ *6° 56′ 40″*
- En forma incompleja.
  - 12° 37′ 30″, solo en grados. *12.625°*
  - 40° 32″, solo en minutos. *2 432′*
  - 25° 50′ 16″, solo en segundos. *93 016″*
  - 0° 45′ 50″, solo en grados. *0.763888…°*

15 Convierte en radianes.

- 4° *$\frac{2\pi}{15}$ rad*
- 125° *$\frac{25\pi}{36}$ rad*
- 15° *$\frac{\pi}{12}$ rad*
- 40° 30′ *$\frac{40.5\,\pi}{180} \approx 0.70686$ rad*

16 Convierte al sistema sexagesimal.

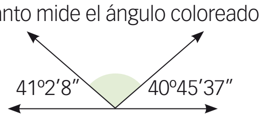
- $\frac{2\pi}{15}$ rad *24°*
- $\frac{\pi}{12}$ *15°*
- $\frac{25\pi}{36}$ *125°*
- $\frac{40.5\pi}{180}$ *40° 30′*

17 Responde.

- ¿A cuántos grados, minutos y segundos equivale un radián? *57° 17′ 44.8″*
- ¿A qué fracción decimal de un radián equivale un grado sexagesimal? *0.01745 rad.*

18 Observa y, luego, responde.

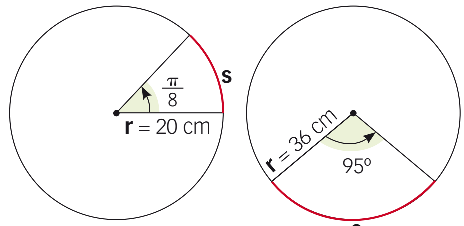
- ¿Cuánto mide el ángulo coloreado de la figura?



98° 12′ 15″

- Describe qué hiciste para responder.

19 Calcula la longitud, **s**, de cada uno de los arcos siguientes.



7.854 cm *59.69 cm*

20 Convierte.

- 12 lb a oz. *192 oz.*
- 156.8 oz a lb. *9.8 lb.*
- 1.25 lb a oz. *20 oz.*
- 4.5 kg a lb. *9.9 lb.*
- 400 oz a kg. *11.36 kg*
- 0.05 t a kg. *50 kg.*

21 Lee y, luego, responde.

- Un cuerpo de 8 kg está formado por dos piezas. ¿Si una pieza tiene una masa de 3.75 kg, 200 g, cuánto vale la masa de la otra pieza? *4 kg, 50 g.*

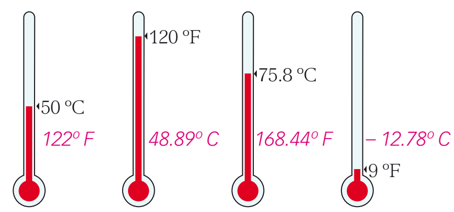
22 Resuelve el problema.

- Una piscina tiene inicialmente 1 200 galones. Se quieren completar sus 2 500 galones, llenándola con una manguera que le aporta 250 L cada minuto. ¿En cuánto tiempo se llena la piscina? *En 20 min y 38.88 s.*

23 Realiza las operaciones siguientes.

12 h 25 min 43 s	48 h 10 min 32 s
+ 15 h 9 min 27 s	− 22 h 45 min 58 s
27 h 35 min 10 s	*25 h 24 min 34 s*

24 Fíjate en las temperaturas marcadas por los termómetros y transfórmalas de grados Celsius a grados Fahrenheit o viceversa.



Competencias fundamentales

Comunicativa

Es necesario que los estudiantes adquieran las habilidades para identificar las unidades de medidas angulares y las medidas de masa, peso, capacidad, tiempo y temperatura y, al mismo tiempo, puedan desarrollar las competencias comunicativas que les permitan expresar y aplicar sus propiedades.

Uso de algoritmo

Las reglas y procedimientos en la resolución de operaciones aritméticas son vitales para la persecución de resultados correctos. Por ejemplo, en las operaciones que involucran las conversiones de las distintas unidades de medidas de peso, masa, capacidad, tiempo y temperatura.

Sugerencias didácticas

- Las actividades propuestas en esta página están estrechamente vinculadas a los conceptos y procedimientos desarrollados a lo largo de la unidad. Haga que lean cuidadosamente las instrucciones y, después, verifique las respuestas obtenidas.
- Es importante observar de cerca que los estudiantes siguen las instrucciones y los procedimientos para efectuar las conversiones de la unidad de medidas angulares y las unidades de masa, peso, capacidad, tiempo y temperatura.

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

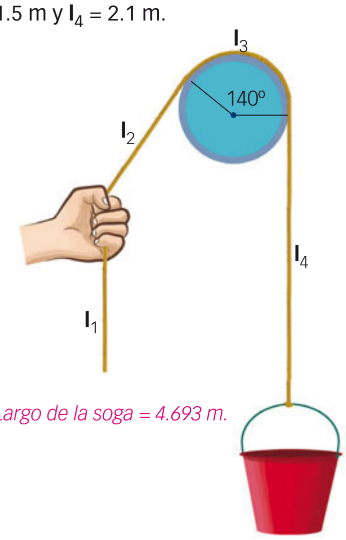
25 Analiza y, luego, responde.

La cisterna de un bloque de apartamentos fue vaciada para limpiarla. La capacidad de la cisterna es de 400 000 L. Para volver a llenarla, la administración consultó a dos empresas de camiones cisterna con el fin de conseguir la mejor de las opciones. Abajo se muestra la capacidad de los camiones de cada empresa y los precios por viaje de vaciado.

Empresa	Capacidad	Precio por viaje
Agua Pura	25 000 L	RD$ 5 000
El Manantial	33 333 L	RD$ 6 500

- **Responde**. ¿Cuál de las opciones es la más barata? *Conviene El Manantial. El costo de llenar la cisterna es de RD$ 2 000 menos.*
- **Describe** en el grupo, paso a paso, qué hiciste para tomar tu decisión.

26 Calcula el largo de la soga de la polea, si el radio del disco es de 12 cm, l_1 = 0.8 m, l_2 = 1.5 m y l_4 = 2.1 m.



Largo de la soga = 4.693 m.

27 Lee y, luego, haz lo que se te pide.

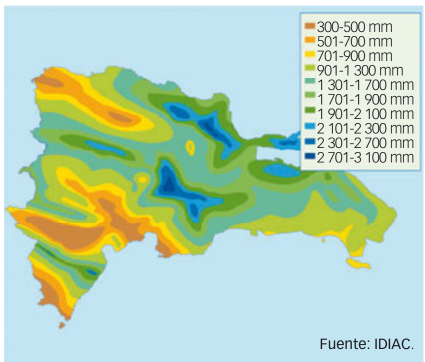
Si se tiene un recipiente de 1 metro cuadrado de área de su fondo y se vierte 1 litro de agua, esta alcanzará una determinada altura del recipiente.

- Calcula la altura que alcanza el agua.
- Escribe la altura en milímetros.

Responde.

- ¿Cuántos litros de agua caben en bandejas de 1 m^2 de área de fondo y 3 mm, 5 mm y 8 mm de altura?
- ¿A partir de los resultados anteriores, cómo definirías un litro?

28 Fíjate en el mapa pluviométrico y responde.



Fuente: IDIAC.

- ¿En qué lugares del país se registran las mayores y menores precipitaciones? Menciona tres lugares de cada una de estas regiones.
- ¿Si pudieras recolectar en un recipiente de 1 m^2 de fondo el promedio de la lluvia anual caída en una cualquiera de las regiones más lluviosas, cuántos metros de altura alcanzaría el agua? *Unos 3 metros, aproximadamente.*
- ¿Cuántos tanques de 55 galones podrías llenar con esa cantidad de agua? *Cerca de 14 tanques.*

Resolución de problemas

Las habilidades y destrezas adquiridas por los estudiantes son necesarias para identificar las alternativas más convenientes en la persecución de la solución de problemas que forman parte de su diario vivir. En este aspecto radica la importancia de que adquieran las destrezas necesarias en los aspectos relacionados con las unidades de medidas de los sistemas sexagesimal e Internacional de Magnitudes.

Criterios de evaluación

Competencia comunicativa:

- Adaptación a las representaciones gráficas, simbólicas y numéricas a la situación de comunicación.

Usa algoritmo:

- Seguimiento de las reglas, instrucciones y procedimientos.

Resolución de problemas:

- Adecuación de las estrategias y procedimientos al tipo de problema y al contexto.

Sugerencias didácticas

- Proponga a sus estudiantes que lean detenidamente las instrucciones de los problemas propuestos en las actividades 25, 26, 27 y 28. Estos problemas son aplicaciones cotidianas de las unidades de longitud y capacidad desarrolladas en la unidad.
- Acompañe a sus estudiantes en la realización de estas actividades y ofrézcales las orientaciones necesarias.

Aprender a aprender

Motive a sus estudiantes para que inventen ejemplos de las aplicaciones cotidianas de los conceptos desarrollados en la unidad. Por ejemplo, pregunte al grupo:

- *¿Qué importancia tiene conocer la masa y el peso de un cuerpo?*

Discuta las diversas respuestas con el grupo.

Indicadores de logro de la evaluación

- **Reconoce** sistemas de unidades angulares.
- **Convierte** medidas angulares de un sistema a otro.
- **Mide** ángulos y **los expresa** en grados, minutos y segundos.
- **Reconoce** unidades de masa, peso y capacidad.
- **Realiza** conversiones de unidades de masa, peso y capacidad. **Identifica** unidades de tiempo.
- **Realiza** conversiones de unidades de tiempo. **Identifica** escalas de temperatura.
- **Convierte** medidas de temperatura. **Resuelve** problemas del contexto donde **aplica** diversas unidades de medidas.
- **Utiliza** diversos recursos virtuales y electrónicos: computadora, softwares educativos, juegos interactivos y otros, en la búsqueda de información.

Competencias específicas

- Comunica.
- Modela.
- Usa algoritmos.
- Conecta.
- Resuelve problemas.

Aprender a aprender

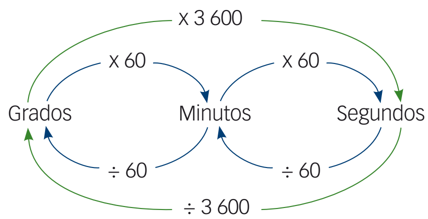
Plantear al grupo:

- Si reciben un paquete que pesa 25 kilogramos pero deben saber su peso equivalente en libras, *¿cuáles son los pasos para efectuar la conversión de las medidas? ¿Recuerdan cuántas libras tiene un kilogramo.*

EVALUACIÓN

Comunica

29 Describe con tus propias palabras los procedimientos de transformación de unidades angulares del siguiente esquema.



30 Encierra los resultados de medidas de temperatura que no están escritos correctamente.

- 25 ºC
- 18 ºc
- 100 F
- 64 ºF
- 5 K
- 32 k

Modela y representa

31 Convierte.

- 50º a radianes. $\frac{5\pi}{18}$ *rad.*
- 175º a radianes. $\frac{35\pi}{36}$ *rad.*
- $\frac{5\pi}{9}$ rad. *100º*
- $\frac{52.3\pi}{180}$ rad. *52º 18'*

32 Lee y, luego, haz lo que se te pide.

El Sistema Centesimal de medida angular, usado en agrimensura, utiliza como unidades el grado (1^g), el minuto (1^c) y el segundo (1^{cc}) centesimales.

$$\boxed{1^\circ = \frac{10}{9}^{\,g}} \qquad \boxed{1^g = \frac{10}{9}^{\,\circ}}$$

- Convierte al Sistema Centesimal.

25º	45º	90º	120º
27.77… g	*50 g*	*100 g*	*133.33… g*

- Convierte al Sistema Sexagesimal.

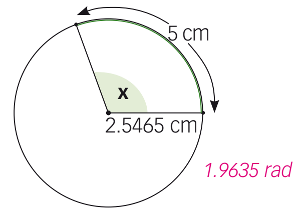
25^g	60^g	150^g	180^g
22.5º	*54º*	*135º*	*162º*

33 Expresa en grados, minutos y segundos sexagesimales.

- 35.325º *35º 19' 30"*
- 128.78º *28º 46' 48"*
- 98.75' *1º 38' 45"*
- 19 818" *5º 30' 18"*
- 0.18 rad *10º 18' 47.6"*
- 102.25^g *92º 1' 30"*

Usa algoritmos

34 Observa la figura y determina la medida del ángulo **x** en radianes.



35 Responde las preguntas.

- ¿Qué peso, en libras, tiene un furgón de 950 kg, 175 lb y 4 800 onzas? *2 565 lb.*
- ¿Qué masa, en kilogramos, tiene un elefante africano macho de 5.6 t, 250 kg y 9 000 g? *5 859 kilogramos.*
- ¿Qué capacidad, en galones, tiene una piscina de 30 kL, 12 daL y 250 L? *8 013.19 galones.*
- ¿Qué lapso de tiempo, en horas, hay entre dos eventos separados por 5 días, 18 h y 14 400 s? *142 horas.*

Conecta

36 Resuelve los problemas.

- Un ciclista salió a hacer un recorrido a las 9 horas, 55 minutos y 48 segundos. ¿Si tardó en llegar a su destino 2 horas, 17 minutos y 35 segundos, a qué hora, marcada por su reloj de precisión, llegó? *A las 12 horas, 13 minutos y 23 segundos.*
- La temperatura promedio de nuestro planeta crece a un ritmo de unos 0.14 ºF cada 10 años. En la actualidad, la temperatura media de la Tierra es de alrededor de 59 ºF. ¿Si continuara el actual ritmo de calentamiento, cuál sería la temperatura media global, en ºC, en 25 años? *T = 15.625 ºC*

Resolución de problemas

37 Resuelve el problema siguiendo dos procedimientos distintos.

- Un diseñador quiere dar una amplitud 3 veces mayor a un ángulo que mide originalmente 18º 37' 40". ¿Cuánto medirá el ángulo después de la transformación? *55º 53'*

Sugerencias didácticas para la evaluación

- Es importante verificar, antes de dar inicio a las actividades de evaluación, que sus estudiantes conocen los procedimientos para transformar las diversas unidades de medidas estudiadas en la unidad. Observe que efectúen de forma correcta el cálculo para determinar los intervalos de tiempo y las conversiones de las distintas escalas de temperatura.
- Si cuenta con tecnología como refuerzo, puede aplicar la prueba de la unidad que se encuentra en la plataforma didáctica Pleno.

38 **Debate**. Organicen una lectura del texto siguiente y, luego, expongan sus opiniones, valoraciones críticas y conclusiones. Finalmente, respondan en sus cuadernos.

El ser humano primitivo midió el mundo con su propio cuerpo. Para conocer las cosas independientes de sí mismo se sirvió de partes de su cuerpo: pie, brazo, dedo, mano, brazos abiertos, paso.

Desde el punto de vista de desarrollo del pensamiento, el momento decisivo ocurrió cuando se pasó de "mi dedo" o "tu dedo" a la noción de "el dedo" en general. Se establecía una noción abstracta; una longitud fija y atemporal."

(Adaptado de Witold Kula, *Las medidas y los hombres*).

- ¿Qué inconvenientes presentan las unidades de medida basadas en partes del cuerpo humano? *Estas unidades pueden variar de un sujeto a otro, de una región a otra y de una época a otra.*
- ¿Por qué la aparición de unidades fijas y permanentes en el tiempo significó un avance en el desarrollo de los procesos de medición? *Favorecenelacuerdo comunitario y las posibilidades de transformar unidades con seguridad.*
- ¿Cuáles unidades tradicionales y de uso en la cotidianidad popular conoces? Consulta con tus padres, familiares cercanos y relacionados.

39 Piensa y, luego, responde. *Respuestas libres.*

- ¿A tu juicio, por qué el establecimiento de sistemas de medidas es una valiosa contribución a las normas de la vida en común?
- ¿Qué relación puedes establecer entre el símbolo de la justicia, una balanza en equilibrio y la administración de justicia?
- ¿Por qué son importantes en los tratados internacionales de comercio los sistemas estandarizados de medidas?

APRENDIZAJE AUTÓNOMO

40 Marca según tus logros.

	Iniciado	En proceso	Logrado
• Reconozco sistemas de unidades angulares.			
• Convierto medidas angulares de un sistema a otro.			
• Reconozco y transformo unidades de masa, peso y capacidad.			
• Identifico unidades de tiempo y realizo conversiones.			
• Identifico escalas de temperatura y transformo de una a otra.			

41 Reflexiona sobre tu aprendizaje.

- ¿Qué importancia tiene para ti lo aprendido en esta unidad?
- ¿Te gustaría profundizar en los temas tratados? ¿Por qué?

Debate

- En la actividad 38, *Debate*, analizarán el contenido de un texto que trata sobre el uso de las partes del cuerpo para medir, utilizadas por el hombre primitivo. En este caso, expondrán sus opiniones, valoraciones críticas y sus conclusiones. Finalmente, responderán las preguntas en sus cuadernos.

Actitudes y valores

Convivencia

En la sección destinada a *Actitudes y valores*, actividad 39, responderán, a su juicio, por qué el establecimiento de sistemas de medidas es una valiosa contribución a las normas de la vida en común. Expresarán qué relación pueden establecer entre el símbolo de la justicia, una balanza en equilibrio y la administración de la justicia. Por último, dirán por qué son importantes en los tratados internacionales de comercio los sistema estandarizados de medidas.

Aprendizaje autónomo

- En el apartado *Aprendizaje autónomo*, actividad 40, evaluarán por ellos mismos si los conceptos y procedimientos que trabajaron en la unidad se encuentran en estado de iniciación, en proceso o logrados. En la actividad 41, reflexionarán sobre su proceso de aprendizaje.

Aprender a aprender

- Haga que sus estudiantes apliquen los conceptos aprendidos en la unidad en situaciones de la cotidianidad, por ejemplo, preguntar: *¿Cuáles son los pasos para determinar la duración de un determinado evento?*

Sugerencias didácticas para la evaluación

- Pregunte a sus estudiantes:
  — *¿Cuál es la unidad principal del sistema sexagesimal de medidas angulares?*
  — *¿Qué es la masa de un cuerpo?*
  — *¿Cuál es la unidad principal de medida de masa?*
  — *¿Qué es la capacidad y cuál es su principal unidad de medida?*

Competencias fundamentales

- **Competencia comunicativa**: Comprende y usa correctamente el lenguaje matemático.
- **Resolución de problemas**: Identifica y analiza los datos de un problema y traza estrategias para resolverlo.

Indicadores de logro

- **Sabe** en qué consisten los problemas de aligación o mezcla y aleaciones.
- **Reconoce** cómo se aborda un problema de aligación o mezcla y aleaciones.
- **Sigue** al pie de la letra los procedimientos para resolver un problema de aligación o mezcla y aleaciones.
- **Experimenta** en su hogar, con ayuda de sus padres, para obtener la solución de un problema de aligación o mezcla y aleaciones.

SABER HACER **Duración**: 2 sesiones de clase.

Proyecto

El empleo de proyectos en la enseñanza de las matemáticas favorece el desarrollo de las competencias fundamentales y propias del área del nuevo modelo curricular.

El trabajo con el proyecto podría ser desarrollado individual o grupalmente y discutido tras su realización en el aula.

Sugerencias didácticas

En este proyecto I, *Matemáticas, mezclas y aleaciones*, los estudiantes pondrán en práctica conocimientos adquiridos hasta ahora, en un contexto distinto vinculado a la vida cotidiana. Es importante acompañarles en el proceso y ofrecerles las orientaciones necesarias.

Matemáticas, mezclas y aleaciones

1 ¿En qué consisten los problemas de aligación?

En la naturaleza, el comercio y los procesos industriales usualmente las sustancias y metales, las materias primas y los productos se presentan o producen en forma de mezclas o aleaciones de componentes distintos. El término aligación significa mezcla o unión.

El conocimiento de la proporción de cada componente para conseguir una masa deseada o la determinación del precio de la mezcla son problemas de aligación.

Observa en el ejemplo cómo se aborda y se resuelve un problema de aligación.

- Un fabricante de especias usa cilantro, comino, cebolla seca y pimiento en la preparación de una mezcla. En la mezcla hay un 30 % de cilantro, un 12 % de comino, 40 % de cebolla seca y un 18 % de pimiento. Los precios por gramo de cada especia componente aparecen en la tabla siguiente. ¿Cuál es el precio de 250 gramos de la mezcla?

Especia	Cilantro	Comino	Cebolla	Pimiento
Precio, p($/g)	0.20	0.75	0.32	0.60

Primero, se determina la masa, m, de cada especia componente de la mezcla presente en **M** = 250 gramos:

$\mathbf{m}_{Cil}$ = 30 % de 250 g = 75 g. $\mathbf{m}_{Com}$ = 12 % de 250 g = 30 g.

$\mathbf{m}_{Ceb}$ = 40 % de 250 g = 100 g. $\mathbf{m}_{Pim}$ = 18 % de 250 g = 45 g.

Luego, se calcula el precio, **P**, de cada gramo de la mezcla utilizando la expresión:

$$\mathbf{P} = \frac{\mathbf{m}_{Cil} \times \mathbf{p}_{Cil} + \mathbf{m}_{Com} \times \mathbf{p}_{Com} + \mathbf{m}_{Ceb} \times \mathbf{p}_{Ceb} + \mathbf{m}_{pim} \times \mathbf{p}_{pim}}{\mathbf{M}}$$

Dando los valores correspondientes a las magnitudes presentes en la expresión anterior:

$$\mathbf{P} = \frac{75\text{ g} \times \$\,0.20 + 30\text{ g} \times \$\,0.75 + 100\text{ g} \times \$\,0.32 + 45\text{ g} \times \$\,0.60}{250\text{ g}} = \$0.386$$

Finalmente, el precio de 250 g de la mezcla de especias es: 250 g x $ 0.386 /g = $ 96.50

Sugerencias didácticas

- **Inicio:** Motivar al grupo para que lean y comenten en el aula el texto que expresa en qué consisten los problemas de aligación.
- **Desarrollo:** Pídales que lean el problema con el cual observarán cómo se aborda un problema de aligación. Escriba los datos del problema en la pizarra y los procedimientos requeridos para obtener la solución del mismo. Pídales que desarrollen los pasos en sus cuadernos. Formúleles preguntas vinculadas a los mismos a fin de verificar que han comprendido su solución.

SABER HACER

■ **Haz** lo que se te pide.

■ **Consigue** los precios por libra de tres clases de arroz de los que normalmente se ofertan en los supermercados y, luego, **llena** una tabla como la que se muestra a continuación.

Tipo de arroz	A	B	C
Precio por paquete (en $)	....	....	....
Precio por libra (en $)	....	....	....

■ Ahora, **imagínate** que vas a mezclar los tres tipos de arroz que elegiste de la siguiente manera: 28 lb del arroz tipo **A**; 32 lb del tipo **B** y 20 lb del tipo **C**. **Calcula** el precio, por libra, al que deberás vender el arroz conseguido con la mezcla.

■ **Responde** y **justifica** tu respuesta. ¿Si se mantiene el mismo peso de la mezcla, qué le ocurre a su precio si aumentamos la cantidad de libras del arroz más caro y bajamos igual número de libras al arroz más barato? **Comparte** y **comenta** tus resultados con el grupo.

2 Quilates y milésimas

La fracción de metal precioso, como el oro o la plata, que contiene una aleación, indica la ley o pureza de una joya. La ley de una aleación con un metal precioso se mide en quilates y, más recientemente, en milésimas (24 quilates = 1 000 milésimas).

Un quilate equivale a 1/24 de la masa de la joya. Una joya de oro de 14 quilates tiene 14/24 partes de su peso en oro y el resto de otros metales.

La masa de oro de la aleación con que está hecha una joya de este metal se consigue multiplicando su número de quilates por la masa de la aleación y dividiendo el resultado por 24.

■ **Resuelve el problema.**

Un joyero compra joyas deterioradas para extraer su parte de oro. Recibió en su establecimiento un viejo anillo de oro de 18 quilates con una masa de 10.4 g. El dueño del anillo le dijo al joyero que este tenía 8 g de oro. ¿Cómo ayudarías al joyero a saber si en verdad el anillo contiene esa cantidad de oro?

■ **Experimenta en tu hogar.**

Junto a tus padres, escoge algunas piezas de oro de las cuales se conozca su número de quilates y diseñen una estrategia para calcular la cantidad de oro de las piezas.

■ ¿Qué supuesto inicial o hipótesis es su punto de partida?

■ ¿Qué harían para someter su hipótesis a prueba?

■ Escribe las conclusiones a que llegaron.

- **Desarrollo:** Lean en el grupo los problemas propuestos en esta página y los procedimientos que deberán aplicar para alcanzar la solución de los mismos. Observe de cerca que realizan correctamente las operaciones en cada caso y motíveles a expresar los procedimientos seguidos.
- **Cierre:** En el último problema experimentarán en sus hogares con la colaboración de sus padres, tomando algunas piezas de oro, y diseñarán una estrategia para calcular la cantidad de oro de las piezas. Ofrézcales las orientaciones que sean necesarias.

Otras sugerencias

- Es importante explicar a los estudiantes en qué consiste el proyecto I, *Matemáticas, mezclas y aleaciones*. Hacer un breve comentario acerca de la presencia de la Matemática en la vida cotidiana y en aspectos relacionados con la Química, como es el caso de los problemas que resolverán en este proyecto.
- Pídales que lean y comenten el siguiente problema en el que mezclarán tres tipos de arroz para determinar el precio por libra. Para este fin, llenarán una tabla especificando el tipo de arroz, el precio por paquete y el precio por libra.
- Motíveles para que lean y comenten las informaciones sobre el último problema de aleación, *Quilates y milésimas*. Haga que presten atención a los procedimientos para determinar la masa de oro de una aleación. Motíveles para que lean el problema, realicen los cálculos necesarios y respondan las preguntas.
- Acompáñeles y oriénteles en el proceso de realización de las actividades involucradas en este proyecto.

Previsión de dificultades

- Durante el proyecto los estudiantes podrían encontrar dificultades. Hágales las precisiones y sugerencias que sean necesarias para su mejor desempeño en la realización de las actividades.

Aprender a aprender

Pregunte a sus estudiantes:

- *¿Les parecieron importantes para su vida personal los conceptos trabajados en este proyecto?*
- *¿Podrían dar un ejemplo de estas aplicaciones?*

A Las medidas en la historia

Propuesta de programación

ÁREAS	COMPETENCIAS ESPECÍFICAS	CONTENIDOS		
		Conceptuales	**Procedimentales**	**Actitudinales**
Matemática	■ **Comunica**: **Expresa** con la notación adecuada las experiencias con medidas que ha experimentado en su diario vivir. **Usa** los símbolos de las unidades de longitud, peso, masa, capacidad y tiempo. ■ **Modelar** y **representar**: **Usa** los símbolos de las unidades de longitud, peso, masa, capacidad y tiempo en diferentes sistemas de medidas. ■ **Usa algoritmo**: **Sigue** las reglas que les permiten obtener un resultado al resolver problemas que involucran unidades de medidas de longitud, peso, masa, capacidad y tiempo. ■ **Conecta**: **Aplica** las diferentes unidades de medidas de longitud, peso, masa, capacidad y tiempo para resolver problemas de situaciones del contexto, de otras ciencias y de la propia matemática.	■ Unidades de medidas de longitud, peso, masa, capacidad y tiempo. ■ Intervalos de tiempo entre dos acontecimientos. ■ Husos horarios y cálculo de la hora en lugares lejanos. ■ Conversiones de unidades de sistemas distintos.	■ Desarrollo de algoritmo de conversión de unidades de medidas antiguas y modernas. ■ Conversiones y estimaciones de unidades de medidas de longitud, peso, masa, capacidad y tiempo. ■ Cálculo de intervalos de tiempo entre dos acontecimientos. ■ Resolución de problemas que involucran conversiones de unidades de medidas de longitud, peso, masa, capacidad y tiempo.	■ Valoración del desarrollo del conocimiento. ■ Apreciación del uso de la tecnología en la vida.
Ciencias Sociales	■ **Interpreta** y **relaciona** los hechos históricos con los espacios geográficos y los cambios relacionados con los mismos.	■ Capitalismo.	■ Búsqueda de comparaciones, relaciones y diferencias de las realidades estudiadas con las condiciones específicas de su comunidad o nación.	■ Asunción de una actitud crítica en torno a las condiciones de vida de los seres humanos bajo el régimen colonialista.

INDICADORES DE LOGRO

- **Realiza** transformaciones de unidades de medidas antiguas y medidas utilizadas en la actualidad.
- **Construye** problemas ambientados en épocas pasadas.
- **Realiza** conversiones de unidades de longitud, peso, masa, capacidad y tiempo.
- **Resuelve** problemas de la cotidianidad que involucran unidades de longitud, peso, masa, capacidad y tiempo.
- **Identifica** unidades de tiempo equivalentes.
- **Determina** intervalos de tiempo entre acontecimientos.
- **Calcula** el tiempo total partiendo de tiempos transcurridos.
- **Calcula** la hora de otros lugares mediante los husos horarios.
- **Resuelve** problemas del contexto donde aplica diversas unidades de medidas de longitud, peso, masa, capacidad y tiempo.
- **Utiliza recursos virtuales y electrónicos**: computadora, softwares educativos, juegos interactivos y otros, en la búsqueda de información.

- **Argumenta** sobre los cambios experimentados por las sociedades europeas en la transición del mercantilismo hacia el capitalismo.

Competencias fundamentales

Resolución de problemas: **Plantea** y **resuelve** problemas sobre situaciones del entorno que involucran el uso de unidades de longitud, peso, masa, capacidad y tiempo.

Valor transversal

Ciencia y tecnología

Recursos digitales

Plataforma digital

CD

BIBLIOTECA DEL DOCENTE

- DOCUMENTOS PARA LA PLANIFICACIÓN
- GUÍA DE RECURSOS TIC

RECURSOS DE REFUERZO Y AMPLIACIÓN

LibroMedia

ACTIVIDAD INTERACTIVA

PÁGINA 103	Libertad, igualdad y fraternidad.

CD DE RECURSOS DIGITALES: PLAN REGULAR

Pleno — PRUEBA DE EVALUACIÓN FORMATIVA DE LA UNIDAD

Tiempo estimado de trabajo

Una semana.

Estrategias pedagógicas

- Recuperación de experiencias previas.
- Trabajo en equipo.
- Aprendizaje basado en problemas (ABP).

Unidad A

Competencias

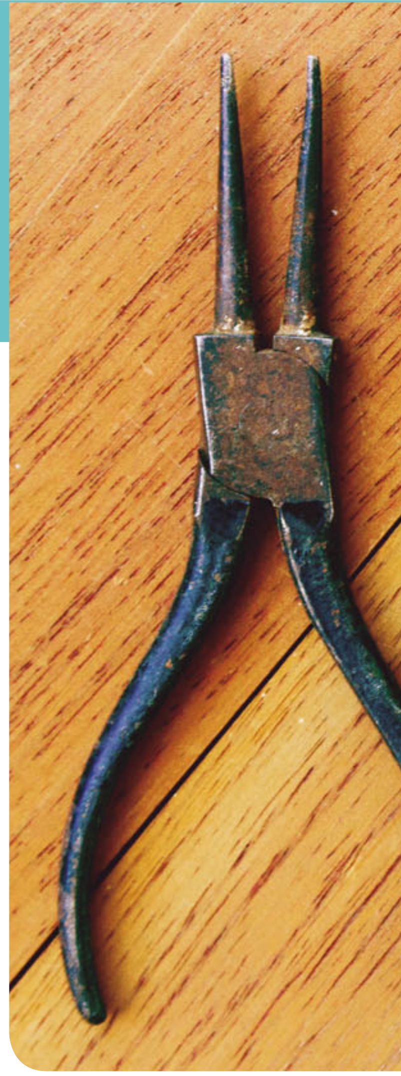
- **Lee** y **comenta** las informaciones expuestas en el apartado *Situación de aprendizaje*.
- **Responde** preguntas relacionadas con las informaciones expuestas en el apartado *Situación de aprendizaje*.
- **Recupera** experiencias vividas mediante la observación de las imágenes de la ilustración.
- **Responde** preguntas vinculadas a sus experiencias previas sobre los conceptos que desarrollarán en la unidad en el apartado *Recuperación de conocimientos*.
- **Responde** preguntas vinculadas a las aplicaciones cotidianas de los conceptos que desarrollarán en la unidad en el apartado *Observación*

Esquema de la unidad

Las medidas en la historia

- Las matemáticas, las medidas y la sociedad
  - Conversiones de medidas antiguas
  - Resolución de problemas con medidas antiguas
- Otras conversiones de medidas
  - Equivalencia de unidades de tiempo
  - Cálculo de intervalos de tiempo
    - Resolución de problemas
  - Cálculo de la hora mediante los husos horarios

A Las medidas en la historia



Situación de aprendizaje

Los procesos de medición acompañan a los seres humanos desde tiempos remotos –concluye el profesor de Ciencias Sociales, para dar paso a las intervenciones de los estudiantes–.

Sergio, que había levantado la mano para exponer sus consideraciones, opinó: *"Desde los inicios de la historia, los seres humanos han recurrido a las medidas para cuantificar bienes, productos agrícolas o unidades fabricadas, distancias de un lugar a otro y tiempos para iniciar o terminar una siembra"*.

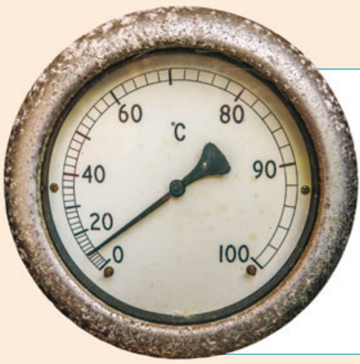
Tras el intercambio de ideas, los estudiantes acabaron por comprender que cualquier comunidad humana necesita prácticas de medición y que estas se hacen más rigurosas al tiempo que son más precisos los instrumentos de medida y las sociedades, más complejas y exigentes.

Conceptos y procedimientos

- Unidades de medidas de longitud, peso, masa, capacidad y tiempo.
- Intervalos de tiempo entre dos acontecimientos.
- Husos horarios y cálculo de la hora en lugares lejanos.
- Conversiones de unidades de sistemas distintos.

Actitudes y valores

- Valorar el papel de las medidas en la historia.
- Apreciar el rigor y la precisión de la vida.



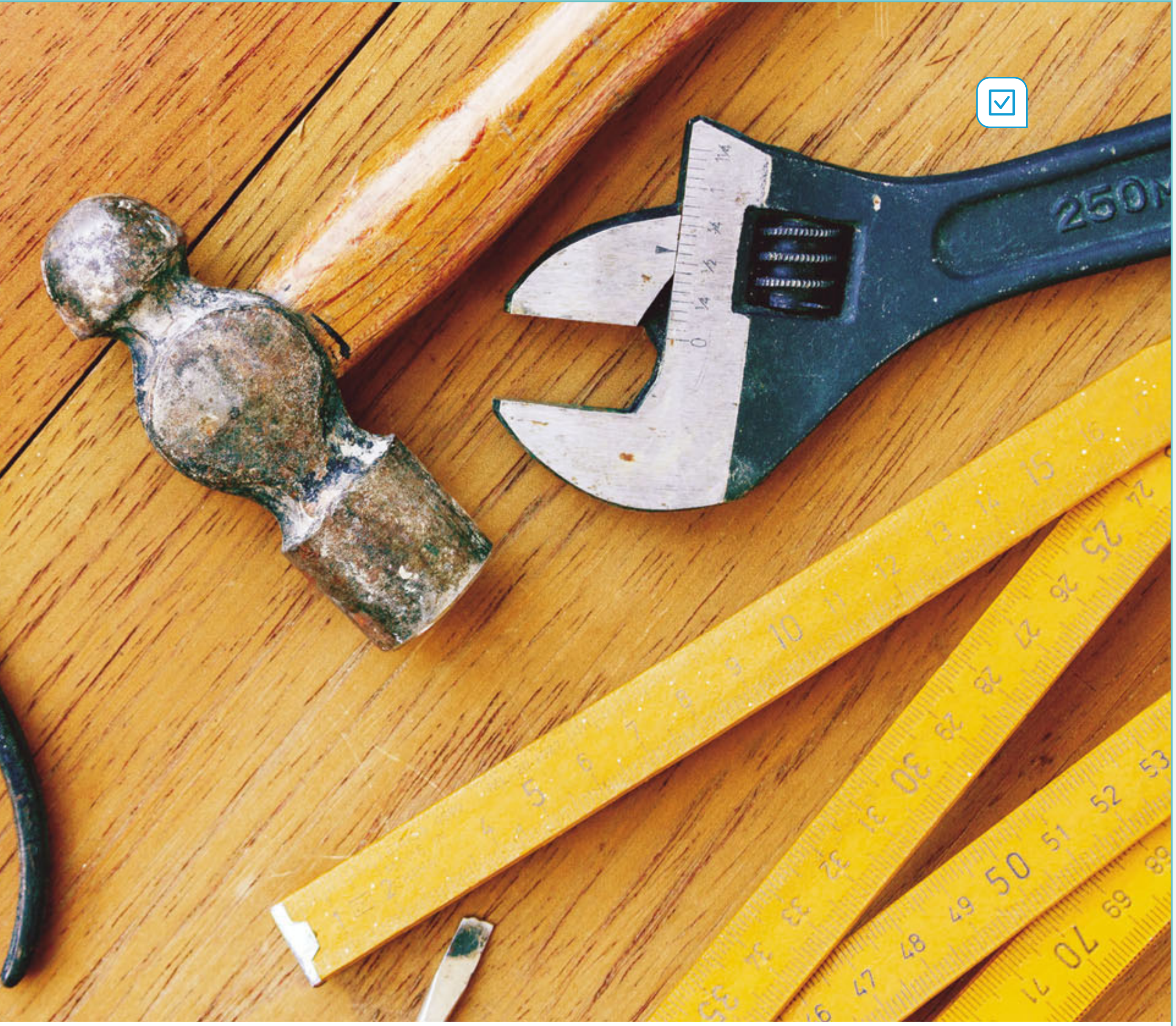
RECUPERACIÓN DE CONOCIMIENTOS

- ¿Qué relaciones puedes establecer entre el desarrollo social y los avances de las prácticas de medición?
- ¿Qué ejemplos podrías dar para apoyar tu respuesta?
- ¿Cómo cambian los procesos de medición con el avance de la tecnología? Pon tres ejemplos.
- ¿Cómo contribuye la precisión de los sistemas de unidades de medida con el desarrollo social?

102

Trabajo colectivo de apertura

- **Situación de aprendizaje:** Guíe a sus estudiantes a leer y comentar en el grupo las informaciones expuestas en el apartado *Situación de aprendizaje* relacionadas con la participación de los estudiantes en un salón de clase y su profesor de Ciencias Sociales en una discusión sobre la evolución y el uso de las unidades de medidas.
- **Recuperación de conocimientos:** Las preguntas de este apartado permiten hacer un diagnóstico de los conocimientos y las experiencias previas vinculados al impacto de las medidas en las sociedades.



OBSERVACIÓN

- ¿Cuáles instrumentos de medición identificas en las ilustraciones?
- ¿Qué magnitudes o cantidades físicas se miden con ellos?
- ¿Cómo son los instrumentos actuales que han sustituido a los que se muestran en estas ilustraciones?
- ¿Cuáles ventajas tienen los instrumentos de medición actuales respecto a los del pasado? Pon tres ejemplos.

- **Observación:** En este apartado se plantean preguntas relacionadas con los diversos instrumentos y herramientas que se observan en la ilustración.

Actividades de motivación

Pida a sus estudiantes que lean en la sección: *Conceptos y procedimientos*, los temas que trabajarán en esta unidad de aprendizaje y las actitudes y valores que estarán presentes en el desarrollo de la misma. Luego, para que interioricen la importancia de conocer cómo han evolucionado los mecanismos de medida con el paso del tiempo, formúleles preguntas como las siguientes: *¿Cómo se contaba el ganado y la producción agrícola en la antigüedad?¿Por qué se hizo necesario que las medidas fueran cada vez más precisas? ¿Qué ha hecho posible que las medidas sean más exactas? ¿Qué aspectos importantes de nuestra vida son medibles?*

Actividad interactiva

Libertad, igualdad y fraternidad

El recurso es un interesante video que desarrolla una escena del uso de la vara en una actividad comercial de la antigüedad y lo inexacta de la misma. Además, el surgimiento del metro como medida más precisa de longitud.

Cultivamos valores

Ciencia y tecnología

Aprovechar la situación planteada en el apartado *Situación de aprendizaje* y en las imágenes de la ilustración para conversar con sus estudiantes acerca de por qué las medidas están presentes en todos los aspectos de nuestra vida y del valor del conocimiento científico. Pregunte al grupo: *¿Creen que el conocimiento científico ha influido en el proceso de evolución de las unidades de medidas?*

Indicadores de logro

- **Realiza** transformaciones de unidades de medidas antiguas y medidas utilizadas en la actualidad.
- **Construye** problemas ambientados en épocas pasadas.
- **Realiza** conversiones de unidades de longitud, peso, masa, capacidad y tiempo.
- **Resuelve** problemas de la cotidianidad que involucran unidades de longitud, peso, masa, capacidad y tiempo.

Otras sugerencias

Converse con sus estudiantes sobre las primeras unidades de medidas utilizadas por el hombre. Estas unidades de medidas representaban partes del cuerpo humano. Por ejemplo:

Pulgada

Palmo

Braza

Pie

Codo

Paso

Esta medidas tienen el inconveniente que no son exactas, varían con el tamaño de quien las aplique. El incremento de las actividades comerciales generó la necesidad de usar unidades de medidas más precisas y exactas. Entre los instrumentos más antiguos de medidas se encuentran el metro, la vara, la romana, la balanza, etc.

1 Lee y, luego, haz lo que se te pide.

El desarrollo del mercantilismo en Europa estuvo precedido por la era de los grandes descubrimientos de fines del siglo XV. Quienes, como Vasco de Gama y Cristóbal Colón, se aventuraron a cruzar los océanos con el fin de buscar las fabulosas riquezas del Oriente, descritas por Marco Polo y otros viajeros, necesitaron no solo de audacia sino de instrumentos de medición que los guiaran en sus largas travesías alrededor del mundo.

La expansión del comercio, el desarrollo de la ciencia y la tecnología y la búsqueda de medidas precisas de distancias, tiempos y pesos, fueron procesos paralelos.

- **Investiga** y, luego, **haz** un listado de algunos procesos de medición asociados con los grandes descubrimientos y la era del mercantilismo.

2 Observa la tabla de unidades de medida antiguas y, luego, realiza las conversiones.

MAGNITUDES	Longitud	Peso	Capacidad
	Dedo = 1.80 cm	Arroba = 25 lb	Cuartilla = 4 L
UNIDADES	Vara = 0.84 m	Fanega = 32 kg	Cántara = 16 L
	Braza = 1.67 m	Carga de carreta = 3 875 lb	Tinaja = 128 L

- 15 dedos = ……2.7…… dm
- 15 cm = ……8.33…… dedos
- 0.40 arrobas = ……10…… lb
- 18 lb = ……0.26…… fanegas
- 0.25 vara = ……21…… cm
- 40 m = ……47.62…… varas
- 6.75 fanegas = ……475.2…… lb
- 0.20 cuartilla = ……800…… mL
- 20 brazas = ……3.34…… dam
- 8.5 m = ……5.09…… brazas
- 0.12 cargas = ……211.36…… kg
- 500 L = ……3.91…… tinajas

- **Responde** las preguntas.
- ¿Qué relaciones tienen las unidades de medida antiguas con los oficios y actividades cotidianas?
- ¿Por qué esas unidades fueron cayendo en desuso con el avance de la ciencia y la tecnología?

Sugerencias didácticas

- **Inicio:** Organice a sus estudiantes en grupos pequeños, luego, pídales que lean y comenten el texto relacionado con el desarrollo del mercantilismo y la expansión del comercio en la era de los grandes descubrimientos.
- **Desarrollo:** Motive a los grupos para que investiguen y, luego, realicen el listado de algunos de los procesos de medición asociados con los Grandes Descubrimientos, tal como se les indica. A continuación observarán la tabla de unidades de medidas antiguas y, luego, realicen las conversiones. Para concluir con esta primera parte, pídales que respondan las preguntas al final de la página.

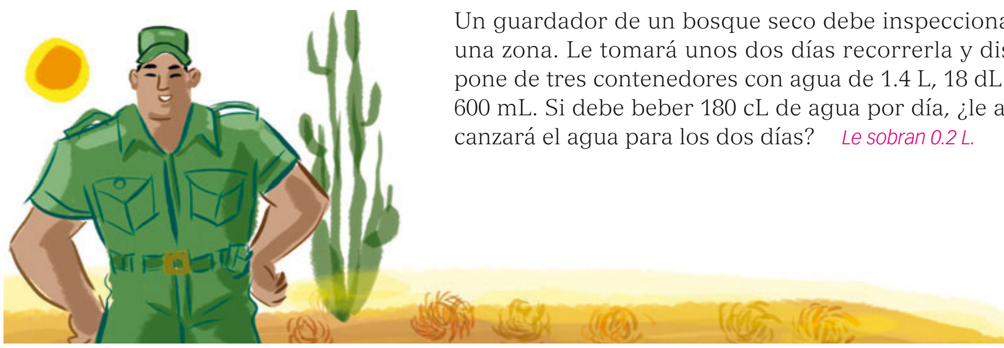
3 Une, mediante flechas, las masas que son equivalentes en las tres columnas.

5 kilogramos	0.4 hectogramos	5 decagramos
40 gramos	40 000 miligramos	5 000 gramos
500 decigramos	500 decagramos	0.04 kilogramos
4 000 centigramos	0.05 kilogramos	400 centigramos

4 Construye un problema, ambientado en la época correspondiente, que se asocia a cada una de las informaciones dadas.

- El hekat se utilizaba en Egipto como unidad de capacidad de contenedores de trigo. Su equivalencia actual es de 4.5 L.
- El estadio era una unidad de distancia de la antigua Grecia, equivalente a 174.125 metros.
- Un talento era en la antigua Grecia, una unidad de peso que era igual al de la cantidad de agua que llena un ánfora, unos 26 kg.
- En la antigua Roma, una yunta era la superficie agraria que requería de un día completo para ser trabajada. Equivale a cerca de 2 500 m^2.
- Los boticarios del siglo XVIII usaban el escrúpulo como unidad de peso para preparar medicinas. Equivale a 1.56 g.
- Una vez concluida esta actividad, **comparte** y **comenta** con tus compañeros de curso los problemas que construiste.

5 Lee y, luego, resuelve el problema.



Un guardador de un bosque seco debe inspeccionar una zona. Le tomará unos dos días recorrerla y dispone de tres contenedores con agua de 1.4 L, 18 dL y 600 mL. Si debe beber 180 cL de agua por día, ¿le alcanzará el agua para los dos días? *Le sobran 0.2 L.*

Atención a la diversidad

Refuerzo: Pida a sus estudiantes que utilicen la tabla que muestra algunas de la unidades de medidas antiguas para que realicen las conversiones siguientes:

- 20 dedos ______________ metros.
  Resp.: 0.36 metros.
- 36 cm ______________ dedos.
  Resp.: 20 cm.
- 500 lb ______________ arrobas.
  Resp.: 20 arrobas.
- 400 arrobas ______________ lb.
  Resp.: 10 000 lb.
- 150 cántaras ______________ L.
  Resp.: 2 400 L.
- 30.2 brazas ______________ m.
  Resp.: 50.43 metros.
- 5.04 varas ______________ m.
  Resp.: 4.23 metros.

- Motive a los grupos formados anteriormente para que lean las instrucciones de la actividad 3, donde relacionarán, mediante flechas, las masas que son equivalentes en las tres columnas. En la actividad 4, construirán un problema ambientado en la época correspondiente, asociado a cada una de las informaciones que leerán y comentarán en cada caso. Tomarán en cuenta las equivalencias de las medidas correspondientes.
- **Cierre:** En la actividad 5, determinarán si la cantidad de agua de que dispone un guardador de bosque seco le alcanzará durante los dos días en los que inspeccionará la zona asignada.

Aprender a aprender

Pregunte a sus estudiantes:

¿Necesitaron de ayuda adicional para realizar alguna de las actividades propuestas?

¿En qué consistió la ayuda?

Indicadores de logro

- **Identifica** unidades de tiempo equivalentes.
- **Determina** intervalos de tiempo entre acontecimientos.
- **Calcula** el tiempo total partiendo de tiempos transcurridos.
- **Calcula** la hora de otros lugares mediante los husos horarios.
- **Resuelve** problemas del contexto donde aplica diversas unidades de medidas de longitud, peso, masa, capacidad y tiempo.

Más información

Comentar a sus estudiantes, con relación a la actividad 5, que el huso horario es cada una de las 24 partes en que se divide la Tierra por medio de las líneas imaginarias llamadas meridianos, partiendo del meridiano de Greenwich, y que permite determinar las horas que forman un día.

Como el movimiento de rotación de la Tierra se produce de oeste a este en 24 horas, todos sus puntos, en este intervalo de tiempo, pasan uno detrás de otro frente al Sol.

El mediodía se produce mediante el paso del Sol por el meridiano de un determinado punto. En el momento preciso en que es mediodía en un lugar, el Sol habrá pasado ya por todos los puntos situados en el Oriente (este), y deberá pasar por todos los ubicados en el Occidente (oeste).

Cada huso horario representa una hora del día, y entre un huso y el siguiente existe la diferencia de una hora. Por lo tanto, solo los puntos que pertenezcan a un meridiano en el planeta tendrán la misma hora, cada huso horario al este de tu posición tiene una hora más tarde, y al oeste sería una hora más temprano.

1 Lee y, luego, haz lo que se te pide.

El tiempo, en las primeras civilizaciones sedentarias, estuvo asociado a las actividades agrarias. El ciclo anual de las estaciones guiaba la siembra y la cosecha. Por otro lado, la alternancia del día y la noche normaba la vida de las sociedades y durante el año se realizaban celebraciones periódicas diversas.

Los griegos y romanos establecieron calendarios para sus fiestas y rituales en homenaje a sus dioses y héroes. En la Edad Media el tiempo se asociaba a los oficios religiosos: las campanas de las iglesias y los llamados *Libros de horas* marcaban tiempos con alguna precisión. Alcanzado el siglo XIX el tiempo se convirtió en un protagonista de la vida social.

Libro de horas. Pautaba los momentos del día en que debían hacerse las oraciones.

- **Investiga** por qué la medida del tiempo adquiere importancia en la sociedad occidental moderna.

2 Aparea las medidas de tiempo que son equivalentes.

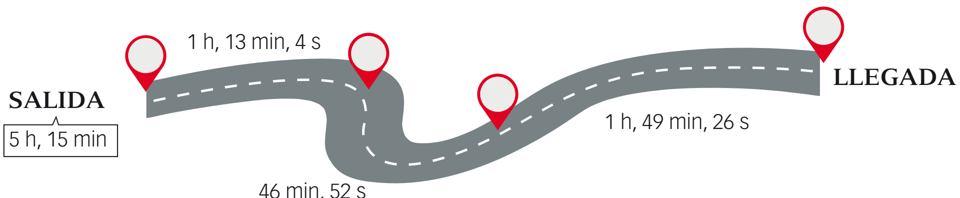
0.25 DÍA	10.15 H	15 S	72 MIN
0.05 DÍA	21 600 S	609 MIN	0.00417 H

Reloj de sol.

3 Determina el intervalo de tiempo entre los acontecimientos, uno anterior, A, y otro posterior, B.

- **A** ocurrió hace 8 h, 45 min y **B** ocurrió hace 1 h, 30 min. 7 h, 15 min.
- **A** ocurrió hace 12 h, 5 min, 43 s y **B** ocurrió hace 5 h, 18 min, 30 s. 6 h, 47 min, 13 s.
- **A** ocurrió hace 12 h, 48 min, 20 s y **B** ocurrió hace 4 h, 22 min, 12 s. 8 h, 26 min, 8 s.
- **A** ocurrió hace 18 h, 10 min, 25 s y **B** ocurrió hace 7 h, 50 min, 42 s. 10 h, 19 min, 43 s.

4 Calcula el tiempo total del viaje del autobús, conocidos los tiempos transcurridos para ir de una terminal a otra.



- **Responde**. ¿A qué hora llega el autobús a su destino? *Tiempo total = 3 h, 49 min, 22 s*
9 h, 4 min, 22 s

Sugerencias didácticas

- **Inicio:** Organice a sus estudiantes en grupos pequeños, luego, pídales que lean y comenten el texto relacionado con el tiempo en las primeras civilizaciones y los aportes de los griegos y los romanos. Formúleles alguna preguntas sobre el contenido del texto y, luego, pídales que lean el pie de la imagen del libro de horas.
- **Desarrollo:** Motive a los grupos para que investiguen por qué la medida del tiempo adquiere importancia en la sociedad occidental moderna. A continuación, aparearán las medidas de tiempo que son equivalentes, luego, determinarán intervalos de tiempo y, finalmente, calcularán el tiempo total del viaje de un autobús.

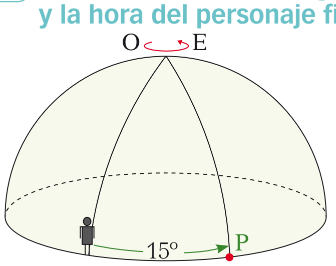
5 **Lee y, luego, investiga.**

La Revolución Francesa trajo el establecimiento de un sistema unificado de pesos y medidas, cuyo propósito era acabar con la multitud de unidades de medida locales, que dificultaban el avance del conocimiento científico y las actividades comerciales.

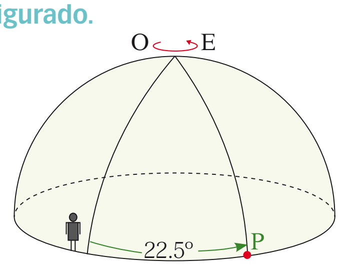
Con el industrialismo nacen el trabajo en las fábricas y las redes de comunicación ferroviarias. Ambas creaciones del siglo XIX condujeron a modificaciones profundas en la percepción y valor del tiempo: las fábricas empezaron a pagar a los operarios por el tiempo de trabajo en vez de por unidades producidas y, para buen el funcionamiento del sistema de trenes, se necesitó coordinar el tiempo entre las distintas estaciones. Estos cambios llevaron, posteriormente, a la invención del reloj de bolsillo como un instrumento para medir los tiempos por parte de las personas.

- **Averigua** cómo impactó sobre la percepción del tiempo la iluminación nocturna de las ciudades.

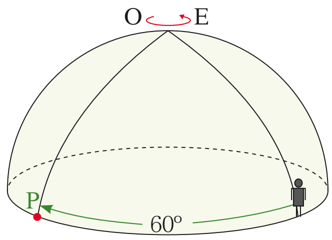
6 **Escribe la hora en el lugar P si te encuentras en el lugar y la hora del personaje figurado.**



10:30 a.m. *11:30 a.m.*



10:30 p.m. *12 medianoche.*



12:15 p.m. 4:15 p.m.

7 **Analicen y resuelvan los problemas. Luego, expliquen qué hicieron para resolverlos.**

Una piscina de 60 000 litros de capacidad fue vaciada para limpiarla. Después de limpiarla, se han colocado dos mangueras para llenarla. Una que aporta 200 litros de agua por minuto y otra, que aporta 100 litros por minuto.

- ¿En qué tiempo se llena la piscina? *3 h, 20 min.*
- Si comenzó a llenarse a las 6: 15 de la mañana, ¿a qué hora estará llena? *9: 35 de la mañana.*
- Si para llenar la mitad de la piscina se hubiera utilizado únicamente la manguera de mayor caudal e inmediatamente, una vez llena la mitad, se suma al llenado la otra manguera, ¿en qué tiempo se completa el llenado de la piscina? *4 h, 10 min.*

Atención a la diversidad

Refuerzo: Pida a sus estudiantes que realicen las operaciones correspondientes para determinar las medidas de tiempo equivalentes como se les indican:

- 20.5 días ____________ horas.
  Resp.: 492 horas.
- 49 meses __________ semanas.
  Resp.: 12.25 semanas.
- 6 años ____________ meses.
  Resp.: 72 meses.
- 40 lustros __________ años.
  Resp.: 200 años.
- 15 siglos ____________ años.
  Resp.: 1 500 años.
- 4 horas ____________ segundos.
  Resp.: 14 400 segundos.
- 5 minutos __________ segundos.
  Resp.: 300 segundos.

Motive a los grupos formados anteriormente para que lean y comenten el contenido del texto con las informaciones sobre la Revolución Francesa y surgimiento del industrialismo. Después, motíveles para que investiguen cómo impactó sobre la percepción del tiempo la iluminación nocturna de las ciudades. En la actividad 5, observarán la representación gráfica de los husos horarios, escribirán la hora **P** tomando como referencia la hora medida por el personaje figurado.

- **Cierre:** En la actividad 6, analizarán y resolverán problemas relacionados con el tiempo de llenado de una piscina de 60 000 litros de capacidad.

Aprender a aprender

Pregunte a sus estudiantes:

¿Cuáles son los pasos a dar para calcular intervalos de tiempo?

¿Qué procedimientos aplicaron para resolver la actividad 4?

Indicadores de logro

- **Realiza** transformaciones de unidades de medidas antiguas y medidas utilizadas en la actualidad. **Construye** problemas ambientados en épocas pasadas. **Realiza** conversiones de unidades de longitud, peso, masa, capacidad y tiempo. **Resuelve** problemas de la cotidianidad que involucran unidades de longitud, peso, masa, capacidad y tiempo. **Identifica** unidades de tiempo equivalentes. **Determina** intervalos de tiempo entre acontecimientos. **Calcula** el tiempo total partiendo de tiempos transcurridos. **Calcula** la hora de otros lugares mediante los husos horarios. **Resuelve** problemas del contexto donde aplica diversas unidades de medidas de longitud, peso, masa, capacidad y tiempo. **Utiliza** recursos virtuales y electrónicos: computadora, softwares educativos, juegos interactivos y otros, en la búsqueda de información.

Competencias específicas

- Comunica.
- Usa algoritmos.
- Resolución de problemas.

Competencias fundamentales

Competencia comunicativa

Es necesario que los estudiantes adquieran las habilidades necesarias para identificar las unidades de medidas básicas y, al mismo tiempo, puedan desarrollar las competencias comunicativas que les permitan expresar y aplicar sus propiedades.

Algoritmos

Las reglas y procedimientos en la resolución de operaciones aritméticas son vitales para la persecución de resultados correctos. Por ejemplo, en las operaciones que involucran las conversiones de las distintas unidades de medidas.

SABER HACER

Usa algoritmos

1 Comprueba las equivalencias y, si alguna no es correcta, corrígela.

25 km = 16 km, 78 hm, 1 200 m
Bien
1 800 mm = 0.12 dam, 4 dm, 20 cm
Bien
83 dam = 0.57 km, 220 m, 400 cm
Mal

15 hg = 0.8 kg, 30 dag, 400 g
Bien
7.25 dg = 45 g, 2.45 dg, 300 mg
Mal
0.42 t = 275 kg, 1 200 hg, 2 500 g
Mal

2 Observa la capacidad de cada recipiente y, luego, responde.

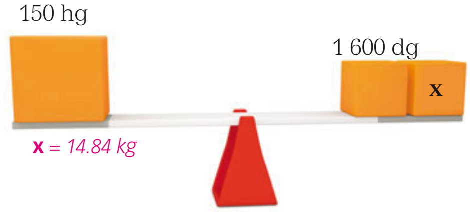
1.5 L 1.5 cL 1.25 dL 2.5 mL

- ¿Cuántas botellas iguales se pueden llenar con el contenido del jarrón? *2 botellas.*
- ¿En cuántos vasos se puede vaciar lo contenido en la botella? *En 6 vasos.*
- ¿Cuántas cucharas iguales se llenan con el contenido del vaso? *50 cucharas.*
- ¿Cuántas cucharas llenan el jarrón? *600 cuacharas.*

Razona y argumenta

3 Obtén la masa, **x**, del paquete, en kilogramos, en cada balanza. Las balanzas equilibradas.

x = *24.5 kg*



x = *14.84 kg*

Conecta

4 En la tabla se muestran los períodos de rotación, en segundos, de algunos planetas del sistema solar. Expresa esos períodos en días terrestres.

Marte	88 640 s *1.026 días*
Júpiter	35 430 s *0.41 día*
Saturno	30 360 s *0.35 día*
Urano	60 480 s *0.7 día*

Sugerencias didácticas para el *Saber hacer*

Las actividades propuestas en esta página están estrechamente vinculadas a los conceptos y procedimientos desarrollados a lo largo de la unidad. Haga que lean cuidadosamente las instrucciones y, después, verifique las respuestas obtenidas.

Es importante observar de cerca que los estudiantes siguen las instrucciones y los procedimientos para efectuar las conversiones de la unidades de masa, peso, capacidad y tiempo.

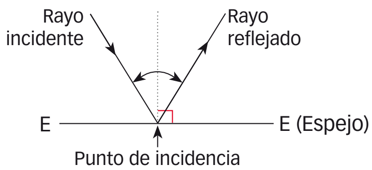
SABER HACER

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

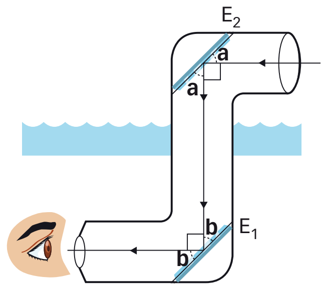
5 Lee y, luego, haz lo que se te pide.

Un espejo es una superficie lisa en la que un rayo de luz es desviado o reflejado luego de tocarlo. El rayo de luz reflejado sigue moviéndose en el mismo medio en el que se movía antes de tocar la superficie del espejo.

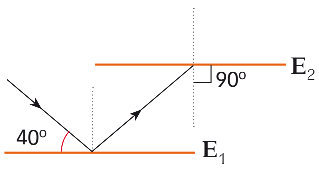
Un rayo de luz que choca con la superficie de un espejo cumple con la siguiente ley de la reflexión: *El rayo incidente forma con la línea perpendicular al espejo en el punto de incidencia, el mismo ángulo que el rayo reflejado forma con dicha línea.*



Periscopio. Dispositivo óptico usado por los submarinos para observar lo que ocurre en la superficie estando sumergidos.



- **Responde** las preguntas.
  - ¿Cuánto miden los ángulos **a** y **b** de la figura de la derecha?
  - ¿Qué hiciste para averiguar las medidas de los ángulos **a** y **b**?
- **Copia** la figura y, luego, **traza** el rayo reflejado en el segundo espejo, $\mathbf{E_2}$.



APRENDIZAJE AUTÓNOMO

6 Mide tu aprendizaje.

	Iniciado	En proceso	Logrado
Transformo medidas de longitud y tiempo.			
Transformo medidas de peso, masa y capacidad.			
Calculo intervalos de tiempo.			
Calculo medidas angulares a partir de la ley de la reflexión.			
Reconozco el papel de las medidas en el desarrollo.			

Competencias fundamentales

Resolución de problemas:

Las habilidades y destrezas adquiridas por los estudiantes son necesarias para identificar las alternativas más convenientes en la persecución de la solución de problemas que forman parte de su diario vivir. En este aspecto radica la importancia de que los estudiantes adquieran las destrezas necesarias en los asuntos relacionados con las transformaciones de las unidades de medidas desarrolladas en esta unidad de aprendizaje.

Criterios de evaluación

Competencia comunicativa:

- Adaptación a las representaciones gráficas, simbólicas y numéricas a la situación de comunicación.

Uso de algoritmos:

- Seguimiento de las reglas, instrucciones y procedimientos.

Resolución de problemas:

- Adecuación de las estrategias y procedimientos al tipo de problema y al contexto.

Resolución de problemas: Proponga a sus estudiantes que lean detenidamente las instrucciones y el planteamiento del problema que trata sobe la reflexión de un rayo de luz que choca sobre un espejo. Haga que observen y lean el pie de la imagen del periscopio que es una aplicación de la reflexión con varios espejos. Pídales que respondan las preguntas y, luego, copien la figura de la derecha de la página y tracen el rayo reflejado en el segundo espejo.

En el apartado *Aprendizaje autónomo* evaluarán por ellos mismos si el nivel de conocimiento de la unidad se encuentra en estado de iniciación, en proceso o logrado.

Aprender a aprender

Motive a sus estudiantes para que expresen la importancia de las aplicaciones cotidianas de los conceptos desarrollados en la unidad. Por ejemplo, pregunte al grupo:

- *¿Qué importancia tiene la transformación de unidades de medidas de tiempo y peso?*

Discuta las diversas respuestas con el grupo.

6 Polígonos. Construcciones geométricas

COMPETENCIAS	CONTENIDOS

COMPETENCIAS

Específicas

- **Comunica**: **Expresa** con la notación adecuada las experiencias con polígonos y sus clasificaciones.
- **Modelar y representar**: **Usa** los instrumentos adecuados para realizar construcciones geométricas.
- **Usa algoritmo**: **Sigue** las reglas que le permiten obtener un resultado al resolver problemas que involucran cálculo de perímetro y de área de polígonos.
- **Conecta**: **Aplica** los conceptos relacionados con polígonos para resolver problemas de situaciones del contexto, de otras ciencias y de la propia Matemática.
- **Resuelve problemas**: **Resuelve** problemas que involucran polígonos y construcciones geométricas.
- **Utiliza herramientas tecnológicas**: **Utiliza** soportes tecnológicos como la Internet, la calculadora científica y otros dispositivos.

Fundamentales

Resolución de problemas: **Plantea** y **resuelve** problemas sobre situaciones del entorno que involucran el uso de polígonos diversos y sus construcciones.

CONTENIDOS

Conceptos

- Concepto de polígono. Clasificación.
- Construcción de polígonos.
- Perímetro y área de polígonos.
- Perímetro y área del círculo. Figuras mixtilíneas.

Procedimientos

- Reconocimiento de los polígonos y su clasificación.
- Construcciones de figuras geométricas con la regla y el compás.
- Cálculo de perímetros y áreas de polígonos regulares e irregulares.

Actitudes y valores

- Apreciación de la capacidad inventiva del ser humano para enfrentar sus problemas.
- Valoración de la dedicación por el trabajo y el cuidado de los medios para conseguir un fin.

Tiempo estimado de trabajo: 2 semanas

INDICADORES DE LOGRO

- **Reconoce** polígonos diversos.
- **Identifica** los elementos de un polígono.
- **Clasifica** los polígonos por su contorno, por sus lados y ángulos y por su posición respecto a una circunferencia.
- **Identifica** los ángulos internos y externos de un polígono.
- **Construye** rectángulos y rombos de lados de longitudes conocidas, usando la regla y el compás.
- **Construye** triángulos equiláteros, cuadrados y hexágonos regulares de lados de longitudes conocidas, usando la regla y el compás.
- **Calcula** el perímetro de polígonos regulares e irregulares.
- **Calcula** el área de polígonos regulares e irregulares.
- **Resuelve** problemas del contexto que involucran las propiedades de los polígonos, el cálculo de su perímetro y su área.
- **Utiliza** recursos virtuales y electrónicos: computadora, softwares educativos, juegos interactivos y otros, en la búsqueda de información.

Valor transversal: Trabajo

Recursos digitales

Plataforma digital

CD

BIBLIOTECA DEL DOCENTE

- DOCUMENTOS PARA LA PLANIFICACIÓN
- GUÍA DE RECURSOS TIC

CUADERNO DE ACTIVIDADES

UNIDAD 6	Polígonos. Consrucciones geométricas

RECURSOS DE REFUERZO Y AMPLIACIÓN

LibroMedia

ACTIVIDADES INTERACTIVAS

PÁGINA 118	¿Se usa la apotema?
PÁGINA 118	Área de polígonos irregulares

RECURSOS MULTIMEDIA

PÁGINA 115	Presentación: Construcción de polígonos regulares

CD DE RECURSOS DIGITALES: PLAN REGULAR

Pleno online — PRUEBA DE EVALUACIÓN FORMATIVA DE LA UNIDAD

Estrategias pedagógicas

- Recuperación de experiencias previas.
- Trabajo en equipo.
- Aprendizaje basado en problemas (ABP).

Unidad 6

Competencias de la unidad

- **Lee** y **comenta** las informaciones expuestas en el apartado *Punto de partida*.
- **Responde** preguntas relacionadas con las informaciones expuestas en el apartado *Punto de partida*.
- **Recupera** experiencias vividas mediante la observación de las imágenes de la ilustración.
- **Responde** preguntas vinculadas a sus experiencias previas sobre los conceptos que desarrollarán en la unidad en el apartado *Recuperación de conocimientos*.
- **Responde** preguntas vinculadas a las aplicaciones cotidianas de los conceptos que desarrollarán en la unidad en el apartado *Observación*.

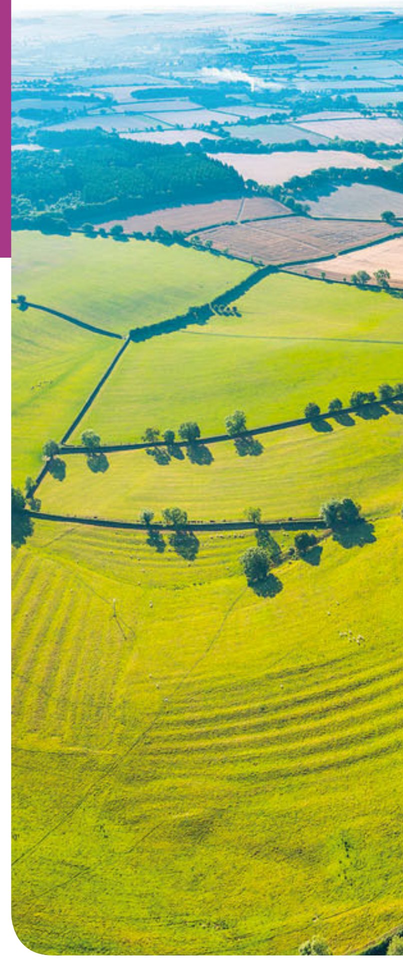
Apertura de la unidad

Dentro de los objetivos principales de la apertura de esta unidad se encuentran el plantear una situación de aprendizaje, una problemática o un texto que sirve para contextualizar el tema de la unidad. Todo esto con la finalidad de motivar y despertar la curiosidad de los estudiantes.

A partir de la situación o texto planteado y las imágenes de la ilustración se conecta al estudiante con el tema a tratar, a la vez que se vincula la realidad o cotidianidad con los temas que se van a desarrollar.

Todos los elementos que conforman la portada promueven la recuperación de experiencias o conocimientos previos y la motivación o el interés por los conocimientos que adquirirán en la unidad.

6 Polígonos. Construcciones geométricas



Punto de partida

Un día Willy vio a su tío, que es agrónomo, calcular el área de una plantación de maíz. Le chocó la manera tan poco usual que usaba para calcular el área de aquella figura de contorno irregular. Al preguntar Willy sobre aquel extraño método de cálculo, su tío le dijo: —*A fuerza de enfrentar sus problemas, los distintos oficios crean sus propias técnicas de cálculo.*

Willy recordó que había escuchado decir a su profesora de Geometría que los agricultores egipcios habían sido muy buenos en el cálculo del área de sus sembradíos a orillas del Nilo.

Tenía razón su tío, las necesidades prácticas son un estímulo para la invención no solo de técnicas sino de nociones matemáticas.

- ¿Cuáles métodos has utilizado para calcular el área de una figura?
- ¿Hay alguno en particular que te haya parecido más seguro? ¿Cuál?

Conceptos y procedimientos

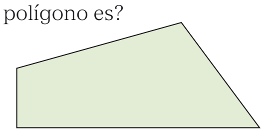
- Concepto de polígono. Clasificación.
- Construcción de polígonos.
- Perímetro y área de polígonos.
- Perímetro y área del círculo. Figuras mixtilíneas.

Actitudes y valores

- Apreciar la capacidad de inventiva del ser humano para enfrentar sus problemas.
- Valorar la dedicación al trabajo y el cuidado de los medios para conseguir un fin.

RECUPERACIÓN DE CONOCIMIENTOS

- ¿Cuántos lados y ángulos tiene el polígono siguiente? ¿Qué clase de polígono es?



- ¿Por qué el número de lados y de ángulos de un polígono siempre es el mismo?
- ¿Qué procedimiento usarías para calcular su área?
- ¿Puede haber un polígono distinto al de la figura que tenga su misma área?

Trabajo colectivo de apertura

- **Punto de partida:** Guíe a sus estudiantes a leer y comentar en el grupo las informaciones expuestas en el apartado *Punto de partida*, relacionadas con los métodos o técnicas utilizados para calcular áreas.
- **Recuperación de conocimientos:** Las preguntas de este apartado permiten hacer un diagnóstico de los conocimientos y las experiencias previas vinculados al impacto de las medidas en las sociedades.
- **Observación:** En este apartado se plantean preguntas relacionadas con los diversos paisajes que observan en la ilustración.

OBSERVACIÓN

- ¿Dónde has visto terrenos divididos en parcelas como el de la fotografía aérea de esta página?
- ¿Qué clase de figuras geométricas identificas en esta fotografía aérea?
- ¿Cuáles de esas figuras son poligonales?
- ¿Qué nombres reciben las figuras planas formadas por segmentos de recta y de curva?

Actividad de motivación

Pida a sus estudiantes que lean en la sección *Conceptos y procedimientos*, los temas que trabajarán en la unidad y las actitudes y valores que estarán presentes en el desarrollo de la misma. Luego, para que interioricen la importancia de las construcciones geométricas y los polígonos, formúleles preguntas tales como las siguientes:

- *¿En cuáles espacios de la cotidianidad pueden identificar polígonos?*
- *¿Qué presencia tienen las formas poligonales en las construcciones?*
- *¿Podrían mencionar elementos de la naturaleza en los que se identifiquen formas poligonales?*

Esquema conceptual de la unidad

Polígonos

se clasifican por:

- Su contorno
- Sus lados y ángulos
- Su posición respecto a una circunferencia

con la regla y el compás se construyen:

- Rectángulos
- Rombos
- Triángulos equiláteros
- Hexágonos regulares

y se utilizan fórmulas para calcular:

- Perímetros
- Áreas

Actitudes y valores

Trabajo

Aprovechar la situación planteada en el apartado *Punto de partida* y en las imágenes de la ilustración para conversar con sus estudiantes acerca de por qué el esfuerzo y la dedicación en el trabajo son importantes para el desarrollo y la formación de la sociedad. Pregunte al grupo:

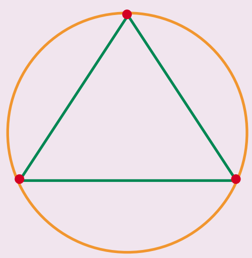
- *¿Qué beneficios recibirán por su dedicación y responsabilidad en el proceso de su formación estudiantil?*

Indicadores de logro

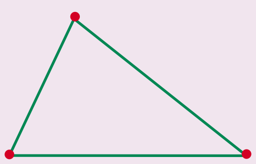
- **Reconoce** polígonos diversos.
- **Identifica** los elementos de un polígono.
- **Clasifica** los polígonos por su contorno, por sus lados y ángulos y por su posición respecto a una circunferencia.
- **Identifica** los ángulos internos y externos de un polígono.

Más información

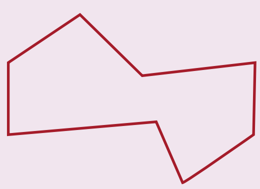
Comente a sus estudiantes que un polígono regular es aquel que tiene sus lados iguales y todos sus vértices pueden circunscribirse a una circunferencia.



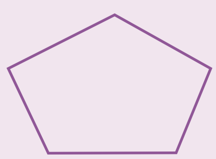
Un polígono irregular es aquel cuyos lados tienen longitudes distintas y sus vértices no pueden circunscribirse a una circunferencia.



Polígono cóncavo (ángulos que apuntan hacia adentro de la figura).



Polígono convexo



RECUPERACIÓN

■ Responde.

- *¿Qué diferencia a una línea recta de un segmento?*
- *¿Y a un rayo o semirrecta de un segmento?*

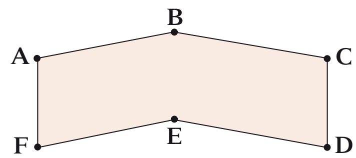
1 Concepto de polígono. Clasificación

Una línea poligonal es un conjunto de segmentos de recta de un plano unidos en forma sucesiva por sus extremos.

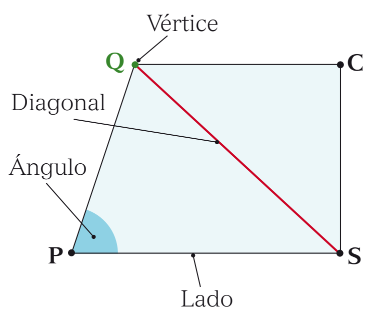
Los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ se unen en **B**, que es un extremo común a ambos segmentos.

Dos segmentos sucesivos de una línea poligonal no pertenecen a una misma línea recta.

Un polígono es una parte de un plano limitada por una línea poligonal cerrada.



El polígono **ABCDEF** es la región del plano encerrada por la línea poligonal y la propia línea poligonal, que pasa a ser su borde o frontera.



2 Elementos de un polígono

Un polígono está formado por un número limitado de lados, que son los segmentos de su borde, e igual número de ángulos, donde se unen dos lados consecutivos para formar un vértice.

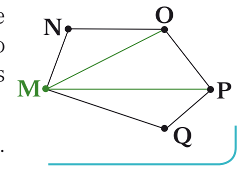
Cualquier segmento que una un vértice del polígono con otro no consecutivo, es una diagonal. El polígono **PQRS** tiene dos diagonales, $\overline{PR}$ y $\overline{QS}$.

Del vértice de un polígono de **n** lados, solo se pueden trazar **n** – 3 diagonales.

EJEMPLO RESUELTO:

- El número de diagonales que sale del vértice **M** del polígono **MNOPQ** que tiene **n** = 5 lados es: **n** – 3 = 5 – 3 = 2.

  Estas diagonales son $\overline{MO}$ y $\overline{MP}$.



Sugerencias didácticas

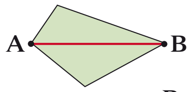
- **Inicio:** Oriente a sus estudiantes para que lean y respondan las preguntas vinculadas a la recuperación de experiencias previas propuestas en el apartado *Recuperación*, relacionadas con las rectas y sus clases.
- **Desarrollo:** Pida a sus estudiantes que lean cuidadosamente el contenido de la doble página, que observen las representaciones gráficas y el desarrollo de los ejemplos resueltos. Formúleles preguntas como, por ejemplo: *¿Cómo se define un polígono? ¿Cómo se clasifican los polígonos por su contorno?* Continúe con las preguntas.

3 Clasificación de los polígonos

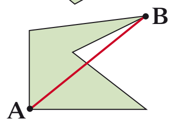
Los polígonos pueden agruparse:

Por su contorno:

- Son convexos, si el segmento que une dos puntos de cualquier par de lados está contenido en el polígono.

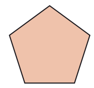


- Son cóncavos, si el segmento que une dos puntos de cualquier par de lados no está contenido en el polígono.

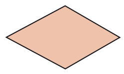


Por sus lados y ángulos:

- Son regulares, si todos sus lados y todos sus ángulos tienen igual medida o son congruentes.

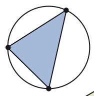


- Son irregulares, si alguno de sus lados o sus ángulos no es congruente con otro.

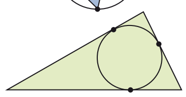


Por su posición respecto a una circunferencia:

- Son inscritos, si todos sus vértices son puntos de una circunferencia.

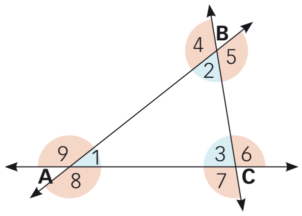


- Son circunscritos, si sus lados tienen un punto en común con la circunferencia.



MÁS INFORMACIÓN

Ángulos internos y externos de un polígono



Los ángulos 1, 2 y 3 son ángulos internos del polígono **ABC**.

Los pares de ángulos 4, 5; 6, 7 y 8, 9 son ángulos externos del polígono **ABC**.

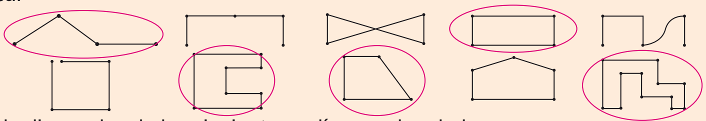
Cada uno de los ángulos internos de un polígono regular de **n** lados mide: 180º x (**n** – 2) ÷ **n**.

Cada uno de los ángulos externos de un polígono regular de **n** lados mide: 360º ÷ **n**.

ACTIVIDADES

1 Encierra lo que se te indica.

- Las líneas poligonales.
- Los polígonos.



2 Obtén el número total **N** de diagonales de los siguientes polígonos de **n** lados.
Nota: **N** = **n** x (**n** – 3) ÷ 2.

- Un polígono de **n** = 5 lados. *N = 5 diagonales.*
- Un polígono de **n** = 8 lados. *N = 20 diagonales.*
- Un polígono de **n** = 12 lados. *N = 54 diagonales.*

3 Dibuja lo que se te indica a continuación.

- Un polígono convexo de 6 lados.
- Un polígono cóncavo de 4 lados.
- Un polígono irregular de 5 lados.

Atención a la diversidad

Actividades de refuerzo: Pida a sus estudiantes que, utilizando la fórmula para obtener las diagonales de un polígono [**N** = **n** x (**n** – 3) ÷ 2], obtengan las de los siguientes polígonos cuyos lados se les indican a continuación:

Polígonos:

- **n** = 4 Resp.: 2 diagonales.
- **n** = 5 Resp.: 5 diagonales.
- **n** = 6 Resp.: 9 diagonales.
- **n** = 7 Resp.: 14 diagonales.
- **n** = 9 Resp.: 27 diagonales.
- **n** = 10 Resp.: 35 diagonales.
- **n** = 12 Resp.: 54 diagonales.
- **n** = 14 Resp.: 77 diagonales.
- **n** = 15 Resp.: 90 diagonales.

Ficha 33.

- **Desarrollo:** Muéstreles ejemplos de los conceptos desarrollados en la doble página. Pídales que lean y reproduzcan el contenido del apartado *Más información*, que trata sobre los ángulos internos y externos de un polígono. Haga que reproduzcan las informaciones en sus cuadernos y muéstreles algunos ejemplos en la pizarra.
- **Cierre:** Motive a sus estudiantes a realizar los ejercicios del apartado *Actividades*. En la actividad 1, encerrarán las líneas poligonales y los polígonos. En la actividad 2, obtendrán el número total **N** de diagonales de los polígonos de **n** lados indicados. En la actividad 3, dibujarán los polígonos que se les indican en cada caso.

Aprender a aprender

Pregunte a sus estudiantes:

- *¿Cómo pueden demostrar rápidamente que un polígono es cóncavo?*
- *¿En qué se diferencia un polígono cóncavo de uno convexo?*
- *¿Puede un polígono cóncavo circunscribirse a una circunferencia?*
- *¿Por qué?*

Indicadores de logro

- **Construye** rectángulos y rombos de lados de longitudes conocidas, usando la regla y el compás.

Presentación

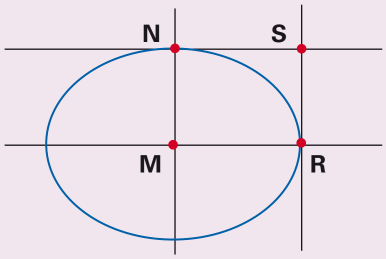
Construcción de polígonos regulares

Esta actividad es una presentación en la que se muestran los pasos para construir polígonos regulares usando el compás y el transportador.

Otras actividades

Trazado de un cuadrado con regla y compás

Se trazan los ejes cartesianos **x** e **y**. Se traza la circunferencia con centro en **M** (0, 0), la cual corta dos puntos de los ejes **x** e **y**, puntos **N** y **R**. Se traza la recta paralela que pase por el punto **N** y la perpendicular que pase por **R**, este corte será el punto **S**. De esta manera, con los segmentos **MN**, **NS**, **NR** y **MR** se forma el cuadrado **MNSR**.



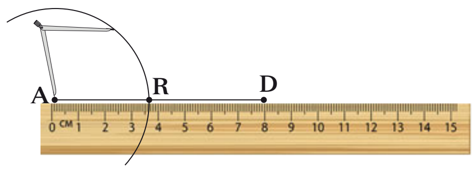
RECUPERACIÓN

- **Traza** con una regla los segmentos siguientes.
  - *Un segmento* $\overline{\mathbf{KL}}$ *de 6 cm de longitud.*
  - *Un segmento* $\overline{\mathbf{MN}}$ *de 9 cm de longitud.*
  - *Un segmento* $\overline{\mathbf{PQ}}$ *de 125 cm de longitud.*

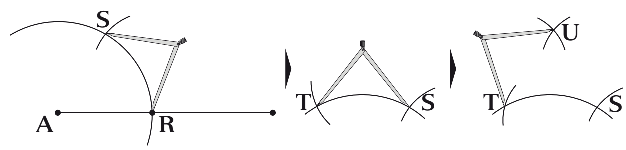
1 Construcción de un rectángulo de lados de longitudes conocidas

Sigue atentamente el procedimiento descrito a continuación para construir, con regla y compás, un rectángulo de base $\overline{\mathbf{AD}}$ = 8 cm y altura $\overline{\mathbf{AB}}$ = 4 cm.

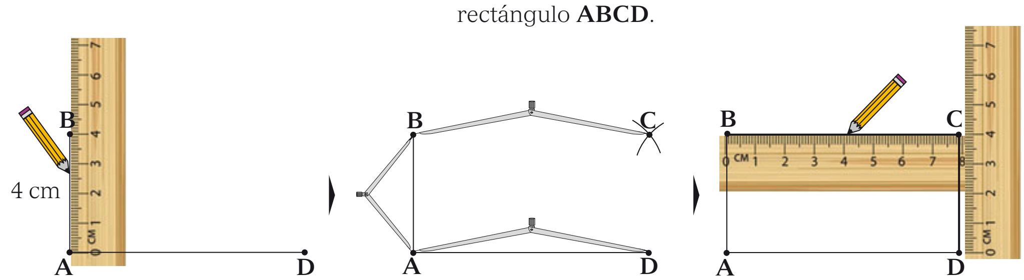
1.º Se traza con la regla un segmento $\overline{\mathbf{AD}}$, de 8 cm de largo y, apoyando el compás en el extremo **A**, se traza un arco que corte al segmento $\overline{\mathbf{AD}}$ en un punto **R**.



2.º Con la misma abertura del compás, y apoyándolo en **R**, se traza un segundo arco que corte al primero en el punto **S** y, sin cambiar la abertura, se traza un tercer arco con centro en **S** que corte al primer arco en el punto **T**. Con los puntos **S** y **T** como centros, se trazan dos arcos que se cortarán en **U**.



3.º Desde el punto **U**, se traza una perpendicular al segmento $\overline{\mathbf{AD}}$ y sobre esta perpendicular se miden 4 cm y se marca el punto **B**, quedando determinado el segmento $\overline{\mathbf{AB}}$. Con una abertura igual a $\overline{\mathbf{AB}}$ se apoya el compás en **D** y se traza un arco y con una abertura igual a $\overline{\mathbf{AD}}$, se apoya el compás en **B** y se traza otro arco que cortará al anterior en un punto **C**. Finalmente, se trazan los segmentos $\overline{\mathbf{BC}}$ y $\overline{\mathbf{CD}}$, obteniéndose el rectángulo **ABCD**.



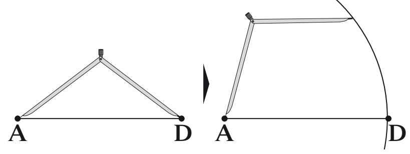
Sugerencias didácticas

- **Inicio:** Oriente a sus estudiantes para que lean y realicen en el aula la actividad vinculada a la recuperación de experiencias previas propuesta en el apartado *Recuperación*, en la que trazarán los segmentos descritos.
- **Desarrollo:** Pida a sus estudiantes que lean cuidadosamente el contenido de la doble página, que observen las representaciones gráficas y los procedimientos para realizar las construcciones del rectángulo y el rombo. Es necesario que lleven al aula su regla y su compás para que reproduzcan los gráficos correspondientes y, luego, desarrollen los ejemplos en sus cuadernos.

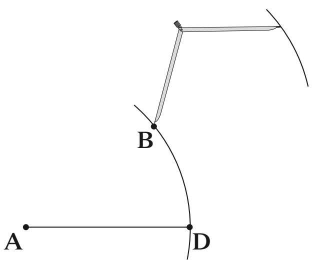
2 Construcción de un rombo de lados de longitud conocida

Fíjate cómo se construye con regla y compás un rombo de lados de longitud de 5 cm.

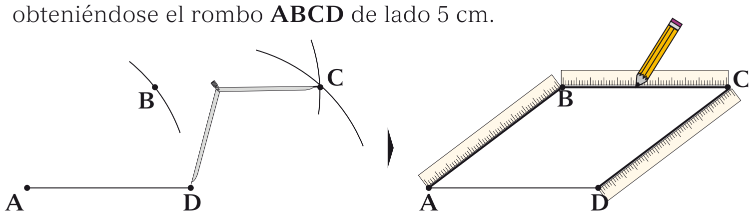
1.º Se traza con la regla el segmento $\overline{\mathbf{AD}}$ y, apoyando el compás en el extremo **A**, se traza un arco con una abertura igual a la longitud de $\overline{\mathbf{AD}}$, 5 cm.



2.º Se marca un punto **B** en cualquier lugar del arco trazado y apoyando el compás en **B** y, sin variar su abertura, se traza un segundo arco.



3.º Desde el punto **D**, sin modificar la abertura original, se traza un tercer arco que cortará al segundo en un punto **C**. Finalmente, se trazan los segmentos $\overline{\mathbf{AB}}$, $\overline{\mathbf{BC}}$ y $\overline{\mathbf{CD}}$, obteniéndose el rombo **ABCD** de lado 5 cm.



INTELIGENCIA COLABORATIVA

Construcción de rombos conocidas sus diagonales

Investiguen en la internet cómo se construye un rombo conocidas sus diagonales y, luego, **construyan** rombos de diagonales con las medidas siguientes:

- 6 cm y 8 cm.
- 10 cm y 5 cm.

ACTIVIDADES

4 Construye los rectángulos de dimensiones especificadas.

- Un cuadrilátero de 7 cm de base y 5 cm de altura.
- Un cuadrilátero de 6 cm de base y 8 cm de altura.

5 Construye los rombos de dimensiones especificadas.

- Un rombo cuyos lados midan 6.5 cm.
- Un rombo cuyos lados midan 55 mm.

- **Desarrollo:** Motive a sus estudiantes a realizar la investigación propuesta en el apartado *Inteligencia colaborativa*, acerca de la construcción de rombos, conocidas sus diagonales. Pídales que sigan las indicaciones y construyan los rombos de diagonales con las longitudes dadas. Envíeles a la pizarra. Ofrézcales las orientaciones necesarias.
- **Cierre:** Motive a sus estudiantes a realizar los ejercicios del apartado *Actividades*. En la actividad 4, construirán los rectángulos de dimensiones especificadas. En la actividad 5, construirán los rombos de dimensiones expresadas. Acompáñeles en el proceso de realización de los ejercicios.

Atención a la diversidad

Actividades de refuerzo: Forme varias agrupaciones de estudiantes con su regla y compás a la mano y, luego, pídales que construyan los polígonos que se especifican a continuación:

- Un rectángulo de 10 cm de base y 6 cm de altura.
- Un rectángulo de 8 cm de base y 4 cm de altura.
- Un rectángulo de 12 cm de base y 8 cm de altura.
- Un rombo cuyos lados miden 8 centímetros.
- Un rombo cuyos lados miden 7.5 centímetros.
- Un rombo cuyos lados miden 60 milímetros.
- Un rombo cuyos lados miden 5 centímetros.

Ficha 34.

Aprender a aprender

Pregunte a sus estudiantes:

- *¿Tuvieron alguna dificultad en el trazado de los cuadriláteros?*
- *¿En qué consistió el problema?*
- *¿Qué hicieron para resolverlo?*

Indicadores de logro

- **Construye** triángulos equiláteros, cuadrados y hexágonos regulares con lados de longitudes conocidas, usando la regla y el compás.

RECUPERACIÓN

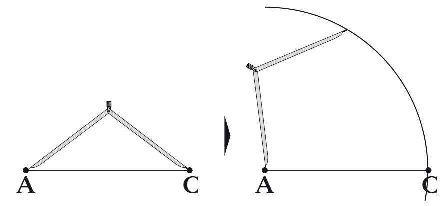
■ Responde.

- *¿Basta con que los tres lados de un triángulo sean de igual longitud para que sea un polígono regular?*
- *¿Y en el caso de un cuadrilátero de lados de igual longitud?*

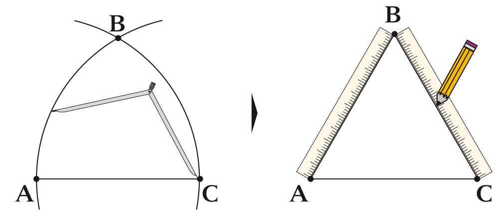
1 Construcción de un triángulo equilátero

Para construir un triángulo equilátero de lados de longitud 5 cm:

1.º Se traza con la regla un segmento $\overline{AC}$ de 5 cm de largo y, apoyando el compás en el extremo **A** y con abertura igual a $\overline{AC}$, se traza un arco.

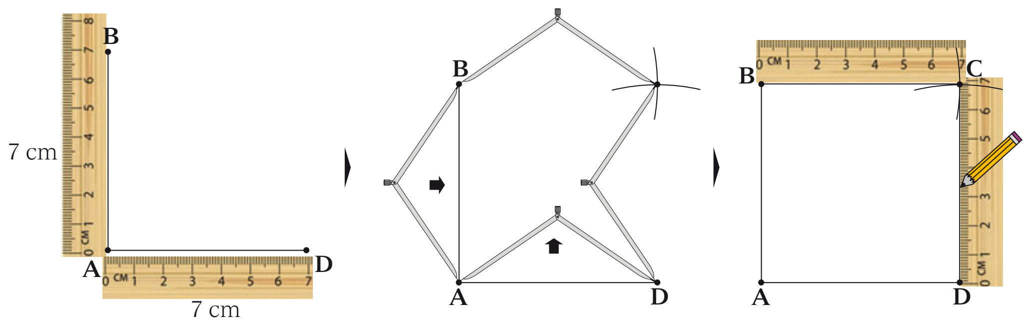


2.º Con la misma abertura $\overline{AC}$ del compás y, apoyándolo en **C**, se traza un segundo arco que corte al primero en el punto **B**. Se trazan los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$, que son los lados del triángulo equilátero.



2 Construcción de un cuadrado de lados de longitud conocida

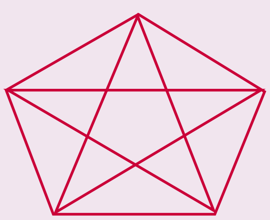
Para construir un cuadrado de lados de longitud 7 cm, se emplea el mismo procedimiento que para construir el rectángulo en la página 114 pero, en este caso, con lados de igual longitud $\overline{AD} = \overline{AB}$.

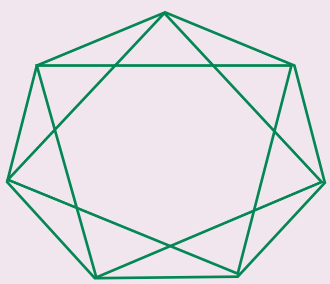


Más información

Polígonos regulares estrellados

Un polígono regular estrellado se construye a partir de un polígono regular convexo, uniendo dos vértices no consecutivos de manera continua.





Sugerencias didácticas

- **Inicio:** Oriente a sus estudiantes para que respondan en el aula las preguntas de recuperación de experiencias previas propuestas en el apartado *Recuperación*, relacionadas con polígonos.
- **Desarrollo:** Haga que lean cuidadosamente el contenido de la doble página, que observen las representaciones gráficas y los procedimientos para la construcción del triángulo equilátero y el hexágono. Motíveles para que dibujen estas figuras en sus cuadernos usando la regla y el compás.

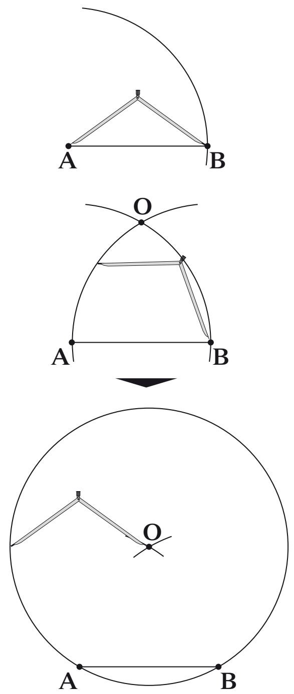
3 Construcción de un hexágono regular de lados de longitud conocida

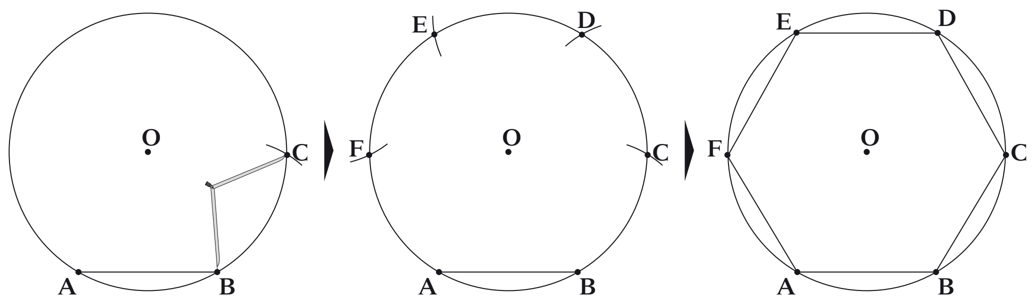
Para construir un hexágono regular de lados de longitud 5 cm:

1.º Se traza con la regla un segmento $\overline{AB}$ de 5 cm de largo y, apoyando el compás en el extremo **A** y con abertura igual a $\overline{AB}$, se traza un arco.

Luego, con la misma abertura $\overline{AB}$ del compás y, apoyándolo en **B**, se traza un segundo arco que corte al primero en el punto **O**. Sin cambiar la abertura, se apoya el compás en el punto **O** y se traza una circunferencia que pasará por los puntos **A** y **B**.

2.º Sin modificar la abertura del compás, este se apoya en **B** y se traza un arco que cortará a la circunferencia en el punto **C**. Apoyando de nuevo el compás en **C**, se traza otro arco que cortará a la circunferencia en **D** y así sucesivamente hasta obtener los puntos **E** y **F**. Se unen mediante segmentos los puntos **B** y **C**; **C** y **D**; **D** y **E**; **E** y **F** y **F** y **A**, obteniéndose un hexágono regular de lados de longitud 5 cm.





ACTIVIDADES

6 Construye triángulos equiláteros y cuadrados cuyos lados tengan las longitudes dadas.

- 7 cm.
- 11 cm.
- 12.5 cm.
- $3\frac{5}{8}$″.

7 Construye los hexágonos regulares de lados especificados.

- 6.8 cm.
- 75 mm.
- 10 cm.
- 5.5″.

- **Desarrollo:** Muestre a sus estudiantes, con ejemplos prácticos, los procedimientos para la construcción de triángulos equiláteros y hexágonos. Formúleles preguntas relacionadas con los pasos a seguir a fin de verificar que conocen el proceso.
- **Cierre:** Motive a sus estudiantes a realizar los ejercicios del apartado *Actividades*. En la actividad 6, construirán triángulos equiláteros y cuadrados cuyos lados tengan las longitudes dadas. En la actividad 7, construirán hexágonos regulares de lados especificados.

Atención a la diversidad

Actividades de refuerzo: Forme varios grupos de estudiantes que deben tener su regla y compás a la mano y, luego, pídales que construyan los polígonos que se especifican a continuación:

- Un triángulo equilátero de 10 cm de lados.
- Un triángulo equilátero de 8 cm de lados.
- Un triángulo equilátero de 12 cm de lados.
- Un cuadrado cuyos lados miden 8 centímetros.
- Un cuadrado cuyos lados miden 7.5 centímetros.
- Un cuadrado cuyos lados miden 60 milímetros.
- Un cuadrado cuyos lados miden 10 centímetros.
- Un hexágono regular cuyos lados miden 4 centímetros.
- Un hexágono regular cuyos lados miden 8 centímetros.
- Un hexágono regular cuyos lados miden 50 milímetros.

Ficha 35.

Aprender a aprender

Pregunte al grupo:

- *¿Les parecieron importantes los conceptos estudiados en esta oportunidad?*
- *¿Qué utilidad para la cotidianidad tienen estos conceptos?*

Indicadores de logro

- **Calcula** el perímetro de polígonos regulares e irregulares.
- **Calcula** el área de polígonos regulares e irregulares.

Actividad interactiva

¿Se usa la apotema?

En esta actividad interactiva identificarán los polígonos en los que se requiere la longitud de la apotema para calcular su área.

Actividad interactiva

Área de polígonos irregulares

En esta actividad interactiva los estudiantes calcularán en sus cuadernos el área de polígonos compuestos y, luego, seleccionarán, en cada caso, la respuesta correcta.

Competencia comunicativa

El lado **l** de un polígono regular de perímetro **P** conocido se obtiene de **P** = **N** x **l** mediante un despeje. El factor **l** es igual al producto **P** entre el otro factor, **N**: **l** = **P** ÷ **N**.

Pídales que despejen **x**, aplicando el mismo criterio.

P = **5** x **x** ; **P** = 8 x **x** ; **A** = **B** x **x**

Resp.: **x** = **P**/5 ; **x** = **P**/8 ; **x** = **A**/**B**

P = **x** x 7 ; **S** = **C** x **x** ; **T** = **x** x **D**

Resp.: **x** = **P**/7 ; **x** = **S**/**C** ; **x** = **T**/**D**

RECUPERACIÓN

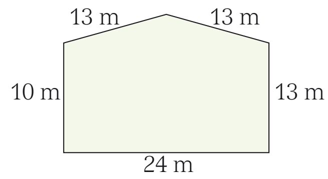
- Responde.
  - *¿En cuáles unidades medirías el perímetro de un libro?*
  - *¿Y el área de un solar?*
  - *¿Qué diferencia a las unidades de medida de un perímetro y de un área?*

1 Perímetro de un polígono

El perímetro de un polígono es la longitud de su borde o frontera. Se calcula sumando las longitudes de todos sus lados.

EJEMPLO RESUELTO:

- Calcular el perímetro de un parque con la forma y las dimensiones mostradas en la figura de la derecha.



P = 10 m + 13 m + 13 m + 10 m + 24 m = 70 m.

El parque tiene un perímetro de 70 metros.

En el caso de un polígono regular de **N** lados, todos de longitud **l**, su perímetro **P** se calcula multiplicando el número de lados por la longitud de cada lado: **P** = **N** x **l**.

EJEMPLO RESUELTO:

- Calcular el perímetro de la tapa de una caja hexagonal, **N** = 6, cuyos lados miden **l** = 16.8 cm.

P = **N** x **l** = 6 x 16.8 cm = 100.8 cm.

La caja tiene un perímetro de 100.8 centímetros.

Si se conoce el perímetro **P** de un polígono irregular y se desconoce la longitud de uno de sus lados, la longitud desconocida es la diferencia del perímetro y la suma de las longitudes conocidas de los lados restantes.

En el caso de que se conozca el perímetro **P** de un polígono regular de **N** lados y se desconozca la longitud **l** de sus lados, dicha longitud es el resultado de dividir el perímetro por el número de lados del polígono: **l** = **P** ÷ **N**.

EJEMPLO RESUELTO:

- El perímetro de un octágono regular, **N** = 8, es **P** = 50.4 dm. ¿Cuánto miden los lados del octágono?

l = **P** ÷ **N** = 50.4 dm ÷ 8 = 6.3 dm.

Los lados del octágono miden 6.3 decímetros.

Sugerencias didácticas

- **Inicio:** Oriente a sus estudiantes para que lean y respondan en el aula las preguntas vinculadas a la recuperación de experiencias previas propuestas en el apartado *Recuperación*, relacionadas con las unidades de medidas a utilizar al calcular perímetros.
- **Desarrollo:** Pídales que lean el contenido de la doble página, que observen los procedimientos aplicados en los ejemplos resueltos y las ilustraciones. Formúleles preguntas como, por ejemplo: *¿Cómo se define el perímetro de un polígono? ¿Qué es el área de un polígono?* Discuta las respuestas con el grupo.

2 Área de un polígono

El área **A** de un polígono regular es la mitad del producto de su perímetro **P** por la longitud de su apotema, **a**: **A** = (**P** x **a**) ÷ 2.

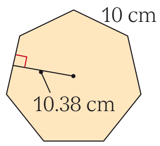
EJEMPLO RESUELTO:

- Calcular el área del polígono regular.

  P = **N** x **l** = 7 x 10 cm = 70 cm.

  Entonces:

  A = (70 cm x 10.38 cm) ÷ 2 = 363.3 cm^2.



Si el polígono es irregular, se descompone en triángulos, cuadrados y rectángulos y se suman sus áreas.

EJEMPLO RESUELTO:

- Calcular el área del polígono irregular.

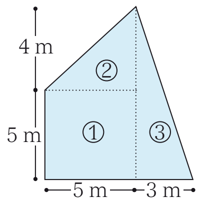
  El área es la suma de las áreas del cuadrado y los triángulos.

  A_1 = 5 m x 5 m = 25 m^2.

  A_2 = (4 m x 5 m) ÷ 2 = 10 m^2.

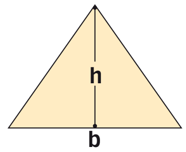
  A_3 = (9 m x 3 m) ÷ 2 = 13.5 m^2.

  A = 25 m^2 + 10 m^2 + 13.5 m^2 = 48.5 m^2.

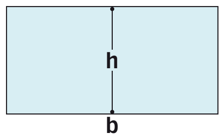


RECUERDA

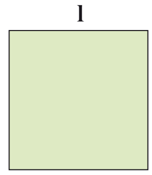
Áreas del triángulo, el rectángulo y el cuadrado



A = (Base x altura) ÷ 2.



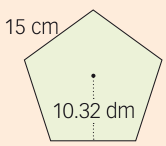
A = Base x altura.

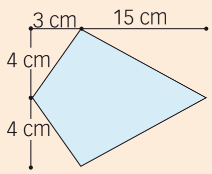


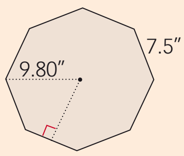
A = Lado^2.

ACTIVIDADES

8 Calcula el perímetro y el área de los polígonos siguientes. Usa tu calculadora.





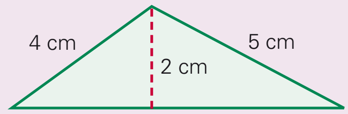


9 Resuelve los problemas.

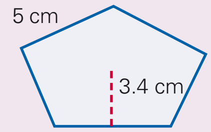
- Un terreno rectangular de área 784 m^2 tiene de largo 49 m. ¿Cuánto mide de ancho el terreno? *16 m*
- ¿Cuánto mediría de lado un terreno cuadrado que tenga la misma área del terreno rectangular del problema anterior? *28 m*

Atención a la diversidad

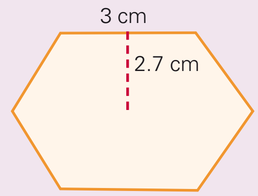
Actividades de refuerzo: Pídales que calculen el perímetro y el área de estos polígonos.



P = 17 cm **A** = 8 cm^2



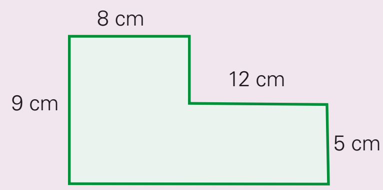
P = 25 cm **A** = 42.5 cm^2



P = 18 cm **A** = 24.3 cm^2

Ficha 36.

Actividades de ampliación: Motive al grupo para que calculen el perímetro y el área del siguiente polígono compuesto.



Perímetro: 58 cm

Área = 132 cm^2

- **Desarrollo:** Muestre a sus estudiantes el proceso de solución de los ejemplos resueltos en el cálculo de perímetro y área de polígonos. Propóngales que lean y comenten el contenido del apartado *Recuerda,* que muestra las fórmulas para calcular el área del triángulo, del rectángulo y el cuadrado. Haga que calculen el área de estas figuras en sus cuadernos.
- **Cierre:** Motive a sus estudiantes a realizar los ejercicios propuestos en el apartado *Actividades*. En la actividad 8, calcularán el perímetro y el área de los polígonos representados usando la calculadora. En la actividad 9, resolverán problemas vinculados a la cotidianidad que involucran áreas poligonales.

Aprender a aprender

- Pregunte a sus estudiantes:
- *¿Qué pasos deben dar para calcular el área y el perímetro de una figura plana compuesta?*

Competencias

- Comunicativa.
- Usa algoritmo.
- Resolución de problemas.

Indicadores de logro

- **Reconoce** polígonos diversos. **Identifica** los elementos de un polígono. **Clasifica** los polígonos por su contorno, por sus lados y ángulos y por su posición respecto a una circunferencia. **Identifica** los ángulos internos y externos de un polígono. **Construye** rectángulos y rombos de lados de longitudes conocidas, usando la regla y el compás. **Construye** triángulos equiláteros, cuadrados y hexágonos regulares de lados de longitudes conocidas, usando la regla y el compás. **Calcula** el perímetro de polígonos regulares e irregulares. **Calcula** el área de polígonos regulares e irregulares. **Resuelve** problemas del contexto que involucran las propiedades de los polígonos, el cálculo de su perímetro y su área.

Competencias fundamentales

Comunicativa

Es necesario que los estudiantes adquieran las habilidades necesarias para identificar y clasificar y, además, reconocer los procedimientos para calcular el perímetro y el área de polígonos, al mismo tiempo, puedan desarrollar las competencias comunicativas que les permitan expresar estos conocimientos.

Usa algoritmo

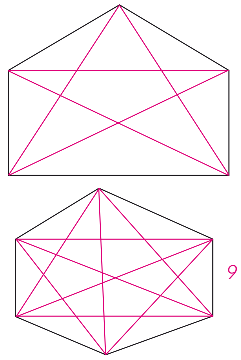
Las reglas y procedimientos en la resolución de operaciones aritméticas son vitales para la persecución de resultados correctos. Por ejemplo, en las operaciones que involucran los pasos para calcular el perímetro y el área de polígonos diversos.

ACTIVIDADES

10 Dibuja, en tu cuaderno, las figuras especificadas.

- Una línea poligonal abierta, formada por cuatro segmentos.
- Un polígono irregular convexo de cinco lados.
- Un polígono irregular cóncavo de seis lados.
- Un polígono de cuatro lados inscrito en una circunferencia de 5 cm de radio.

11 Copia los polígonos y, lego, traza todas sus diagonales. Comprueba tus resultados con la fórmula del número total de diagonales.

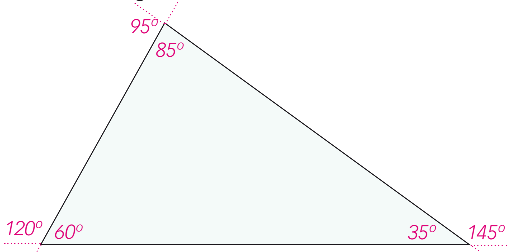


5 diagonales.

9 diagonales.

12 Colorea de rojo los ángulos internos, y de verde dos ángulos externos del triángulo siguiente.

- Mide los ángulos con un transportador y comprueba que un ángulo externo es el suplemento del ángulo interno consecutivo.

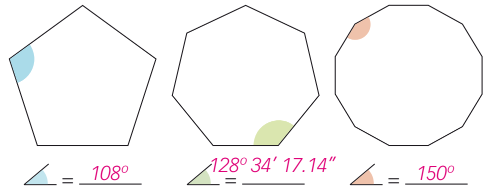


120º + 60º = 180º; 85º + 95º = 180º; 35º + 145º = 180º.

13 Explica.

- ¿Por qué un triángulo es siempre convexo? *Porque entre dos lados consecutivos sólo puede trazarse un tercer lado.*
- ¿Por qué un polígono inscrito no puede ser cóncavo? *Porque todos sus vértices deben estar sobre la circunferencia.*

14 Determina la medida de los ángulos internos de cada polígono regular.



= *108º* = *128º 34′ 17.14″* = *150º*

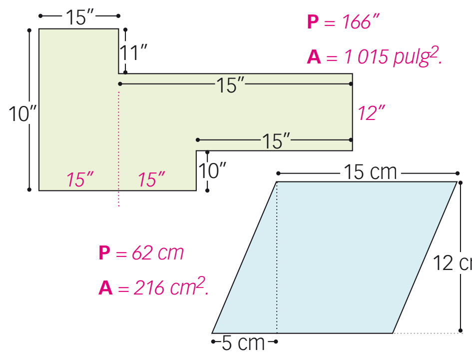
15 Observa el segmento $\overline{AB}$ y, luego, responde la pregunta.

- Una vez tengas el segmento $\overline{AB}$, ¿cuál es el paso con el que comenzarías a construir un rectángulo cuya base sea $\overline{AB}$? *Trazar un arco, desde el extremo **A**, que corte al segmento $\overline{AB}$ en un punto.*
- ¿Y el paso con el que comenzarías a construir un rombo de lados de longitud igual a la del segmento $\overline{AB}$? *Trazar un arco, desde el extremo **A** con una abertura del compás igual al segmento $\overline{AB}$.*

16 Construye sobre pliegos de cartulina.

- Un rectángulo de 15 cm de base y 6 cm de altura.
- Un rombo cuyos lados midan 10 cm.
- Un cuadrado cuyos lados midan 12.5 cm.
- Un triángulo equilátero cuyos lados midan 96 mm.

17 Obtén el perímetro y el área de las siguientes piezas metálicas poligonales



***P** = 166″*
***A** = 1 015 pulg².*

***P** = 62 cm*
***A** = 216 cm².*

- Di qué hiciste para obtener el perímetro de cada pieza.

Sugerencias didácticas

- Las actividades propuestas en esta página están estrechamente vinculadas a los conceptos y procedimientos desarrollados a lo largo de la unidad. Haga que lean cuidadosamente las instrucciones y, después, verifique las respuestas obtenidas.
- Es importante observar de cerca que los estudiantes calculan correctamente el perímetro de los polígonos y que utilizan adecuadamente las fórmulas correspondientes para determinar el área de los mismos.

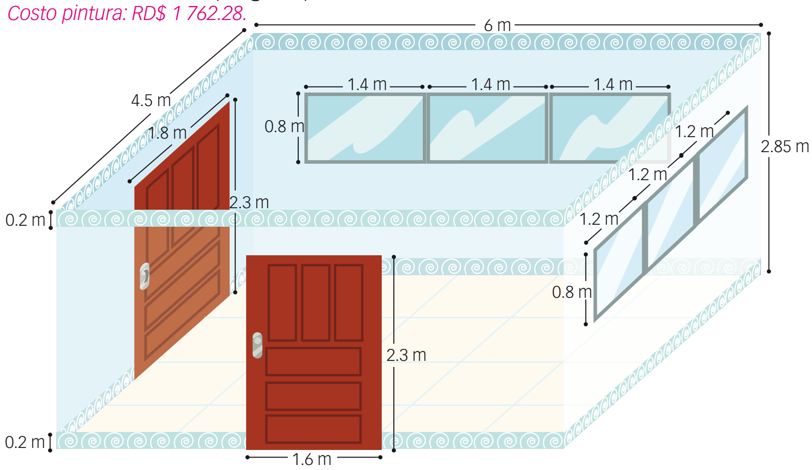
RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

18 Lee y, luego, calcula lo que se te pide.

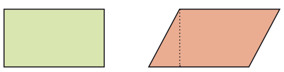
Se quieren realizar cambios en una sala de estar y se ha encargado a una compañía de diseñadores la elaboración del presupuesto. La compañía requirió la siguiente maqueta para determinar los costos en materiales.

- El costo de las cenefas. *RD$ 1 544.00*
- El costo del linóleo del piso y el de los cristales antirreflejo. *Linóleo: RD$ 29 025.00; cristales: RD$ 8 736.00.*
- El costo de la cantidad de galones necesarios para dar dos manos de pintura al techo y las paredes. **NOTA**: Se utilizará una pintura cuyo rendimiento es de 38 m² por galón por mano. *Costo pintura: RD$ 1 762.28.*

Precios de los materiales	
Cenefas	RD$ 200/m²
Linóleo	RD$ 1 075/m²
Cristales antirreflejo	RD$ 1 400/m²
Pintura	RD$ 520/galón

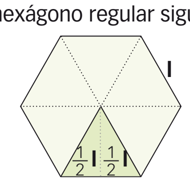


19 Observa los polígonos siguientes de igual base, haz lo que se te pide y, luego, responde.

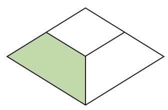


- ¿Si recortaras el triángulo de la izquierda del paralelogramo de la derecha y lo pegaras a su derecha, qué compruebas? ¿Qué conclusiones sacas sobre sus áreas? *Que tienen igual área. Se puede formar un rectángulo con el paralelogramo.*
- ¿Tienen el mismo perímetro? *No.*

20 Descubre un procedimiento para calcular el área del hexágono regular siguiente.



21 ¿Qué fracción del polígono representa su parte coloreada? $\frac{3}{8}$



Competencia fundamentales

Resolución de problemas

- Las habilidades y destrezas adquiridas por los estudiantes son necesarias para identificar las alternativas más convenientes en la persecución de la solución de problemas que forman parte de su diario vivir. En este aspecto radica la importancia de que los estudiantes adquieran las destrezas necesarias para resolver problemas que involucren el cálculo de perímetro y área de formas poligonales.

Criterios de evaluación

Competencia comunicativa:

- Adaptación a las representaciones gráficas, simbólicas y numéricas a la situación de comunicación.

Usa algoritmo:

- Seguimiento de las reglas, instrucciones y procedimientos.

Resolución de problemas:

- Adecuación de las estrategias y procedimientos al tipo de problema y al contexto.

Sugerencias didácticas

- Resolución de problemas
  — Proponga a sus estudiantes que lean detenidamente las instrucciones de los problemas propuestos en las actividades 18, 19, 20 y 21. Estos problemas son aplicaciones cotidianas del cálculo de perímetros y áreas poligonales. Acompañe a sus estudiantes en la realización de estas actividades y ofrézcales las orientaciones necesarias.

Aprender a aprender

Motive a sus estudiantes para que inventen ejemplos de las aplicaciones cotidianas de los conceptos desarrollados en la unidad. Por ejemplo, pregunte al grupo:

- *¿Qué pasos deben seguir para determinar perímetros y áreas de polígonos compuestos?*

Discuta las diversas respuestas con el grupo.

Indicadores de logro de la evaluación

- **Reconoce** polígonos diversos. **Identifica** los elementos de un polígono.
- **Clasifica** los polígonos por su contorno, por sus lados y ángulos y por su posición respecto a una circunferencia.
- **Identifica** los ángulos internos y externos de un polígono. **Construye** rectángulos y rombos de lados de longitudes conocidas, usando la regla y el compás.
- **Construye** triángulos equiláteros, cuadrados y hexágonos regulares de lados de longitudes conocidas, usando la regla y el compás.
- **Calcula** el perímetro de polígonos regulares e irregulares. **Calcula** el área de polígonos regulares e irregulares.
- **Resuelve** problemas del contexto que involucran las propiedades de los polígonos, el cálculo de su perímetro y su área.
- **Utiliza** diversos recursos virtuales y electrónicos: computadora, softwares educativos, juegos interactivos y otros, en la búsqueda de información.

Competencias específicas

- Comunica.
- Modela.
- Usa algoritmos.

Aprender a aprender

Plantear al grupo:

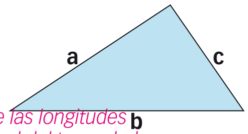
- Si tienen un terreno cuadrado que tiene 1 600 metros cuadrados de área y quieren saber la longitud de sus lados, *¿qué operación deben realizar para obtener la información?*

EVALUACIÓN

Comunica

22 Las letras **a**, **b** y **c** representan las longitudes de los lados de un triángulo cualquiera. Enuncia con una sola frase las siguientes desigualdades.

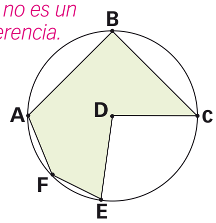
- **a** + **b** > **c**
- **a** + **c** > **b**
- **b** + **c** > **a**



En cualquier triángulo, la suma de las longitudes de dos lados es mayor que longitud del tercer lado.

23 Explica por qué el polígono siguiente no está inscrito en la circunferencia.

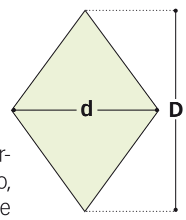
*Porque el vértice **D** no es un punto de la circunferencia.*



Razona y argumenta

24 Lee y, luego, haz lo que se te pide.

Las dos diagonales de un rombo se cortan en sus puntos medios.



- Demuestra, utilizando la fórmula del área del triángulo, que el área **A** del rombo se calcula con la expresión: **A** = (**D** x **d**) ÷ 2.

25 Piensa y, luego, haz lo que se te pide.

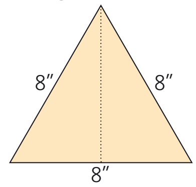
- ¿Cómo calculas el perímetro de un rectángulo de área y base conocidas? *En **A** = **b** x **h**, se despeja y calcula **h**. Luego, con **b** y **h** se obtiene el perímetro.*
- Obtén el perímetro de un rectángulo de área 495.30 cm^2 y de base de 25.40 cm. ***P** = 89.8 cm.*

26 Calcula el área de una lámina de forma cuadrada, cuya diagonal mide $10\sqrt{2}$ cm. ***A** = 100 cm^2.*

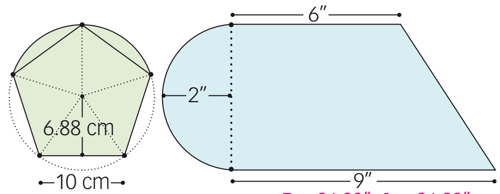
- Piensa. ¿Por qué no puedes aplicar el mismo procedimiento en caso de un rectángulo? *Porque un rectángulo tiene lados desiguales.*

Usa algoritmo

27 Si la altura de un triángulo equilátero divide a su base en dos partes iguales, calcula el área del siguiente triángulo.



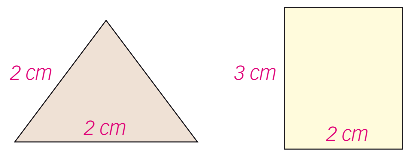
28 Si la circunferencia de un círculo de radio **r** es 2 x π x **r** y su área es π x **r**^{2}, calcula el perímetro y el área de las siguientes figuras mixtilíneas.



***P** = 51.35 cm; **A** = 194 cm* ***P** = 26.28″; **A** = 36.28″*

Modela y representa

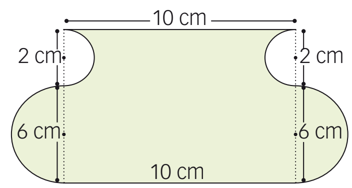
29 Traza las figuras sobre cartulina, con regla y compás y a una escala de 3 : 1.



Conecta

30 Calcula.

- Luisa llevó a la clase de Educación Artística la figura siguiente. ¿Qué cantidad de papel, en cm^2, tiene la figura construida por Luisa?



122

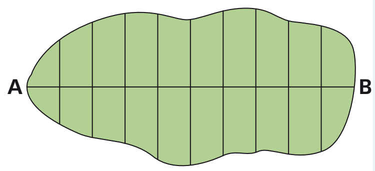
Sugerencias didácticas para la evaluación

- Es importante verificar, antes de dar inicio a las actividades de evaluación, que sus estudiantes identifican y clasifican los polígonos. Observe que efectúen de forma correcta el cálculo para determinar el perímetro y el área de un polígono.
- Si cuenta con tecnología como refuerzo, puede aplicar la prueba de la unidad que se encuentra en la plataforma didáctica Pleno.

31 **Debate**. Lean del texto y, luego, hagan lo que se les pide.

Los agrónomos suelen estimar el área de un terreno de forma irregular, trazando la línea **AB** horizontal de mayor longitud entre dos puntos de la periferia del terreno y, a seguidas, segmentos paralelos perpendiculares a la línea horizontal igualmente espaciados, 1, 2, 3,… que unan puntos opuestos de la periferia. Luego, calculan el promedio de las longitudes de los segmentos 1, 2, 3,… y lo multiplican por el largo de **AB**. El resultado obtenido es el área estimada del terreno, que será más exacta cuanto más segmentos paralelos se tracen.

- Midan las longitudes de **AB** y de 1, 2,… y calculen con el método descrito el área de la figura de la derecha.
- Organicen un debate acerca del método de los agrónomos, en busca de responder, ¿por qué funciona el método? ¿Qué ventajas tiene este método comparado con la descomposición del terreno en triángulos y rectángulos?
- Anoten y lean, al final de la actividad, las conclusiones de la discusión.



32 Piensa y, luego, responde las preguntas.

- ¿Cómo contribuyen los retos con el desarrollo personal y colectivo?
- ¿Cómo reaccionas ante las dificultades? ¿Te contrarían o te estimulan?
- ¿Qué valor das a la dedicación y el cuidado de tus trabajos?

APRENDIZAJE AUTÓNOMO

33 Marca según tus logros.

	Iniciado	En proceso	Logrado
• Reconozco y clasifico polígonos diversos.			
• Construyo figuras geométricas con regla y compás.			
• Calculo perímetros y áreas de polígonos.			
• Resuelvo problemas de contextos reales.			

34 Reflexiona sobre tu aprendizaje.

- ¿Cómo juzgas tu trabajo con los contenidos estudiados en la unidad?
- ¿Consideras que debes reforzar algunos de los temas tratados? ¿Por qué? ¿Cuáles temas?

Sugerencias didácticas para la evaluación

- Pregunte a sus estudiantes:
  — *¿Cuáles son los tres criterios con los que se clasifican los polígonos?*
  — *¿Cómo se clasifican los polígonos de acuerdo a su contorno?*
  — *¿Cómo se obtiene el perímetro de un polígono?*
  — *¿Cómo se obtiene el área de un pentágono?*

Debate

- En la actividad 49, *Debate*, analizarán el contenido de un texto que trata sobre cómo los agrónomos estiman el área de un terreno de forma irregular. En este caso, medirán los segmentos señalados en la figura y, luego, calcularán su área con el método descrito. Finalmente, organizarán un debate acerca de la funcionalidad o no de este método y, después, anotarán sus conclusiones.

Actitudes y valores

Trabajo

En la sección destinada a *Actitudes y valores*, actividad 50, responderán cómo contribuyen los retos con el desarrollo personal y colectivo. Expresarán cómo reaccionan ante las dificultades, si les contrarían o les estimulan. Por último, dirán qué valor dan a la dedicación y el cuidado de su trabajo.

Aprendizaje autónomo

- En el apartado *Aprendizaje autónomo*, actividad 51, evaluarán por ellos mismos si los conceptos y procedimientos que trabajaron en la unidad se encuentran en estado de iniciación, en proceso o logrados. En la actividad 52, reflexionarán sobre su proceso de aprendizaje.

Aprender a aprender

- Haga que sus estudiantes apliquen los conceptos aprendidos en la unidad en situaciones de la cotidianidad, por ejemplo, preguntar: *¿Cuáles son los pasos para determinar la duración de un determinado evento?*

7 Cuerpos geométricos. Áreas

COMPETENCIAS	CONTENIDOS

COMPETENCIAS

Específicas

- **Comunica**: **Expresa**, con la notación adecuada, las experiencias con el cálculo de área de cuerpos geométricos que ha experimentado en su diario vivir.
- **Modelar y representar**: **Aplica** adecuadamente los procedimientos para el cálculo de área de cuerpos geométricos.
- **Usa algoritmo**: **Sigue** las reglas que le permiten obtener un resultado al resolver problemas que involucran el cálculo de área de diversos cuerpos geométricos.
- **Conecta**: **Aplica** las diferentes unidades de área para resolver problemas de situaciones del contexto, de otras ciencias y de la propia Matemática.
- **Resuelve problemas**: **Resuelve** problemas que involucran el cálculo de área de diversos cuerpos geométricos.
- **Utiliza herramientas tecnológicas**: **Utiliza** soportes tecnológicos como la Internet, la calculadora científica y otros dispositivos.

Fundamentales

Resolución de problemas: **Plantea** y **resuelve** problemas sobre situaciones del entorno que involucran el cálculo de área de diversos cuerpos geométricos.

CONTENIDOS

Conceptos

- Poliedros.
- Prismas y pirámides.
- Área de poliedros.
- Área de cuerpos redondos.
- Proyecciones ortogonales.

Procedimientos

- Identificación y clasificación de poliedros diversos.
- Reconocimiento y clasificación de prismas y pirámides.
- Determinación del área de poliedros diversos.
- Identificación de cuerpos redondos y cálculo de sus áreas.
- Identificación de proyecciones ortogonales.

Actitudes y valores

- Valoración de los recursos naturales.
- Apreciación de la belleza de nuestros paisajes.

Tiempo estimado de trabajo: 2 semanas

INDICADORES DE LOGRO

- **Reconoce** poliedros diversos e **identifica** sus elementos.
- **Clasifica** poliedros diversos.
- **Reconoce** prismas y pirámides e **identifica** sus elementos.
- **Clasifica** prismas y pirámides.
- **Calcula** el área de poliedros diversos.
- **Identifica** los cuerpos redondos y **calcula** sus áreas.
- **Identifica** proyecciones ortogonales.
- **Resuelve** problemas del contexto donde interviene el cálculo de área de cuerpos geométricos diversos.
- **Utiliza** recursos virtuales y electrónicos: computadora, softwares educativos, juegos interactivos y otros, en la búsqueda de información.

Valor transversal: Medio ambiente

Recursos digitales

Plataforma digital

CD

BIBLIOTECA DEL DOCENTE

- DOCUMENTOS PARA LA PLANIFICACIÓN
- GUÍA DE RECURSOS TIC

CUADERNO DE ACTIVIDADES

UNIDAD 7	Cuerpos geométricos. Áreas

RECURSOS DE REFUERZO Y AMPLIACIÓN

LibroMedia

ACTIVIDADES INTERACTIVAS

PÁGINA 125	Poliedros y cuerpos redondos
PÁGINA 126	Sólidos geométricos
PÁGINA 128	Elementos del prisma rectangular

CD DE RECURSOS DIGITALES: PLAN REGULAR

Pleno — PRUEBA DE EVALUACIÓN FORMATIVA DE LA UNIDAD

Estrategias pedagógicas

- Recuperación de experiencias previas.
- Trabajo en equipo.
- Aprendizaje basado en problemas (ABP).

Unidad 7

Competencias de la unidad

- **Lee** y **comenta** las informaciones expuestas en el apartado *Punto de partida*.
- **Responde** preguntas relacionadas con las informaciones expuestas en el apartado *Punto de partida*.
- **Recupera** experiencias vividas mediante la observación de las imágenes de la ilustración.
- **Responde** preguntas vinculadas a sus experiencias previas sobre los conceptos que desarrollarán en la unidad en el apartado *Recuperación de conocimientos*.
- **Responde** preguntas vinculadas a las aplicaciones cotidianas de los conceptos que desarrollarán en la unidad en el apartado *Observación*.

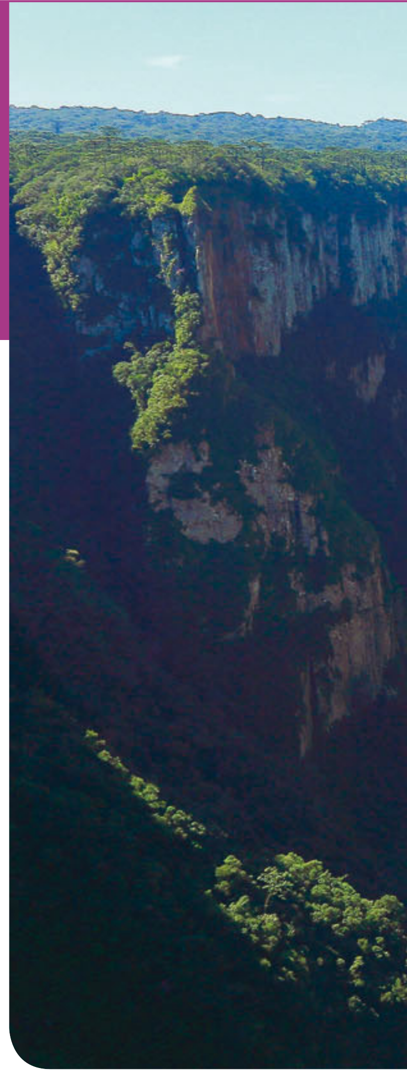
Apertura de la unidad

Dentro de los objetivos principales de la apertura de esta unidad se encuentran el plantear una situación de aprendizaje, una problemática o un texto que sirve para contextualizar el tema de la misma. Todo esto con la finalidad de motivar y despertar la curiosidad de los estudiantes.

A partir de la situación o texto planteado y las imágenes de la ilustración se conecta al estudiante con el tema a tratar, a la vez que se vincula la realidad o cotidianidad con los temas que se van a desarrollar.

Todos los elementos que conforman la portada promueven la recuperación de experiencias o conocimientos previos y la motivación o el interés por los conocimientos que adquirirán en la unidad.

7 Cuerpos geométricos. Área



Punto de partida

Nuestro planeta, que nos da una primera impresión de solidez y permanencia, está sometido a factores que lentamente y de manera sostenida lo modifican. Milena está sorprendida por lo que escucha decir a su profesora acerca de los cambios que ocurren en la Tierra, por acción de los vientos, las lluvias y el curso de los ríos, las mareas y los movimientos, a veces violentos, de la corteza terrestre.

El relieve de la Tierra sufre hundimientos o elevaciones, se alisa o se hace accidentado. Nuestra isla se elevó desde el océano. Los vientos van, grano a grano, cambiando la forma y el tamaño de las rocas y las corrientes de agua terminan por depositar el material de las montañas en los valles o en el mar.

- ¿Te causa asombro, como a Milena, el saber que nuestro planeta está sujeto a cambios?
- ¿Qué accidentes geográficos puedes identificar a tu alrededor?

Conceptos y procedimientos

- Poliedros.
- Prismas y pirámides.
- Áreas de poliedros.
- Áreas de cuerpos redondos.
- Proyecciones ortogonales.

Actitudes y valores

- Valorar los recursos naturales.
- Apreciar la belleza de nuestros paisajes.

RECUPERACIÓN DE CONOCIMIENTOS

- **Resuelve** los problemas.
- Un centímetro cúbico del material de que está hecha la corteza terrestre tiene cerca de 5 gramos. Es decir, la densidad promedio de la corteza terrestre es de unos 5 g/cm^3. ¿Cuál es la masa en kilogramos de un trozo de roca en forma de un cubo y cuya arista mide 10 cm? *5 kilogramos.*
- Una meseta rocosa tiene forma de un paralelepípedo. Se eleva unos 350 metros desde el suelo y su cara superior tiene cerca de 0.40 km de ancho por unos 0.70 km de largo. ¿Cuál es el área, en metros cuadrados, de la parte superior de la meseta? *280 000 m^2.*

124

Trabajo colectivo de apertura

- **Punto de partida:** Guíe a sus estudiantes a leer y comentar en el grupo las informaciones expuestas en el apartado *Punto de partida* relacionadas con los cambios que experimenta la Tierra producto de los fenómenos naturales.
- **Recuperación de conocimientos:** Las preguntas de este apartado permiten hacer un diagnóstico de los conocimientos y las experiencias previas vinculados al impacto de las medidas en las sociedades.
- **Observación:** En este apartado se plantean preguntas relacionadas con los paisajes que observan en la ilustración.

OBSERVACIÓN

- ¿Dónde has visto paisajes que sean similares a los de las ilustraciones?
- ¿A la acción de cuáles factores físicos atribuyes las características de estos paisajes?
- ¿Cuáles acciones de origen humano o antrópico modifican el paisaje natural?
- ¿Qué otros tipos de accidentes geográficos has observado en algunos lugares que hayas visitado? Describe sus características.

Esquema conceptual de la unidad

Cuerpos geométricos

se clasifican en:

- Cuerpos poliedros — *que pueden ser*
  - *Cóncavos y convexos.*
  - *Regulares e irregulares.*
- Cuerpos redondos — *como el*
  - *Cilindro, el cono y la esfera.*

Actividad de motivación

Pida a sus estudiantes que lean en la sección *Conceptos y procedimientos* los temas que trabajarán en la unidad y las actitudes y valores que estarán presentes en el desarrollo de la misma. Luego, para que interioricen la importancia de la utilidad de los cuerpos geométricos en la vida cotidiana, formúleles preguntas como las siguientes:

- *¿En qué construcciones arquitectónicas se pueden identificar formas poliédricas?*
- *¿Qué envases de uso cotidiano tienen forma de prisma?*
- *¿Qué formas tienen la presentación de los envases de leche, jugo y galletas?*

Actividad interactiva

Poliedros y cuerpos redondos

El recurso es una interesante actividad interactiva de recuperación de experiencias previas, en la que clasificarán los cuerpos geométricos en poliedros o cuerpos redondos.

Actitudes y valores

Medio ambiente

Aprovechar la situación planteada en el apartado *Punto de partida* y en las imágenes de la ilustración para conversar con sus estudiantes acerca de los fenómenos naturales y cómo estos eventos transforman el medio natural. Pregunte al grupo:

- *¿Cuáles han sido las consecuencias de la constante crecida del nivel del agua en el lago Enriquillo?*

Indicadores de logro

- **Reconoce** poliedros diversos e **identifica** sus elementos.
- **Clasifica** poliedros diversos.

Actividad interactiva

Sólidos geométricos

Esta actividad interactiva es una aplicación a la forma desarrollada de diversos cuerpos geométricos. En este caso, se fijarán a qué cuerpo corresponde la forma de cada chocolate para elegir su envoltura correspondiente.

Más información

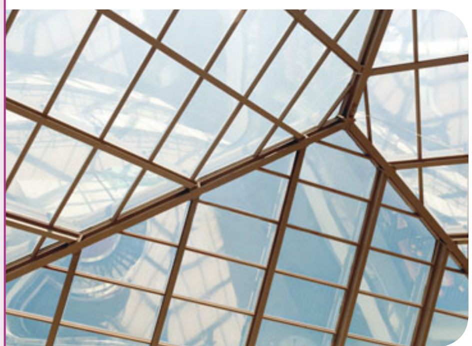
Comentar al grupo que etimológicamente la palabra poliedro significa: *cuerpo con muchas caras o bases*.

- Las caras de un poliedros son cada uno de los polígonos que lo conforman. Dos caras de un poliedro tienen una arista en común.
- Tres caras de un poliedro coinciden en un solo vértice.
- En los poliedros se forman ángulos diedros y poliédricos.
- Los ángulos diedros tienen una arista en común y están formados por dos caras del poliedro.
- Los ángulos poliédricos tienen un vértice en común y están formados por tres o más caras del poliedro.
- Un poliedro regular tiene sus caras, sus aristas, sus ángulos diedros y poliédricos iguales.

RECUPERACIÓN

■ Responde.

- *¿Cuántas son las caras de un cubo?*
- *¿Qué polígonos forman las caras de un cubo?*
- *¿Qué distingue a un cubo de un paralelepípedo?*

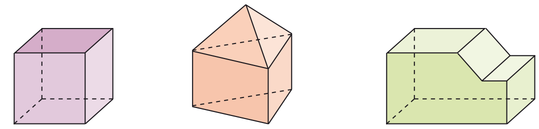


Cúpula de vidrio. Los poliedros son elementos con mucha presencia en la ingeniería y la arquitectura.

1 Concepto de poliedro

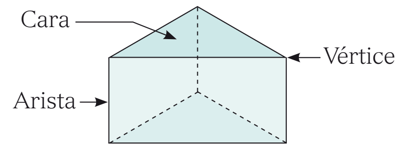
Un cuerpo poliedro es una porción del espacio limitada por polígonos regulares o irregulares.

Los siguientes son cuerpos poliedros. Observa que están limitados por distintas clases de polígonos.



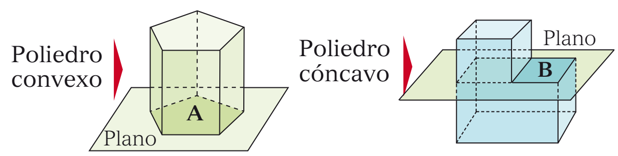
2 Elementos de un poliedro

Un poliedro está formado por los siguientes elementos:



El poliedro anterior tiene 5 caras, 6 vértices y 9 aristas.

Un poliedro es convexo cuando queda a un solo lado del plano en que descansa o contiene una cualquiera de sus caras. Si esto no ocurre, el poliedro es cóncavo.



El poliedro convexo está completamente por encima del plano en que descansa su cara **A**. En cambio, el poliedro cóncavo queda dividido en dos partes, una por encima y otra por debajo del plano que contiene a su cara **B**.

3 Fórmula de Euler

En todo poliedro convexo se verifica que la suma de su número de caras (**C**) y su número de vértices (**V**) es igual a su número de aristas (**A**) más 2: $\mathbf{C} + \mathbf{V} = \mathbf{A} + 2$.

La igualdad anterior se conoce como la **fórmula de Euler** que muestra que los números de caras, vértices y aristas de un poliedro no son independientes.

Sugerencias didácticas

- **Inicio:** Oriente a sus estudiantes para que lean y respondan las preguntas vinculadas a la recuperación de experiencias previas propuestas en el apartado *Recuperación*, relacionadas con el cubo o hexaedro.
- **Desarrollo:** Pida a sus estudiantes que lean cuidadosamente el contenido de la doble página y que observen detenidamente las representaciones gráficas de los distintos poliedros. Formúleles preguntas como, por ejemplo: *¿Cuáles son los elementos de un poliedro? ¿Cómo se clasifican los poliedros con relación a cómo son sus caras?* Continúe con las preguntas.

4 Clasificación de los poliedros

Los poliedros se clasifican en regulares o irregulares.

Un poliedro regular está formado por caras que son polígonos regulares congruentes. En cada uno de sus vértices concurre el mismo número de aristas.

Un poliedro irregular está formado por caras que son polígonos distintos.

Solo existen cinco poliedros regulares, sus caras son triángulos equiláteros, cuadrados y pentágonos regulares.

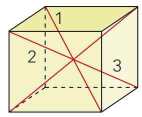
Los poliedros regulares se muestran en la siguiente tabla.

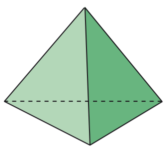
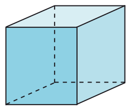
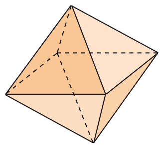
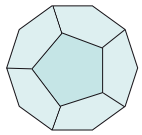
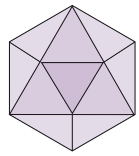
MÁS INFORMACIÓN

Diagonales de un poliedro

Una diagonal de un poliedro es un segmento que une dos vértices no pertenecientes a una misma cara.

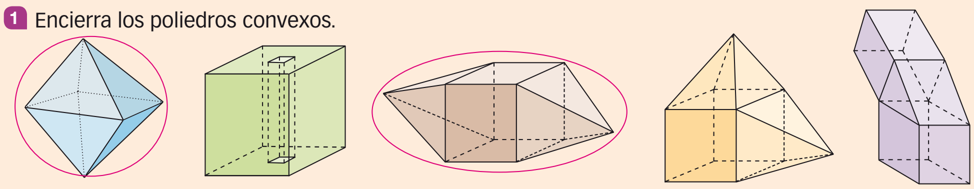
Observa las diagonales 1, 2 y 3 del paralelepípedo.



Nombre	Tetraedro	Cubo	Octaedro	Dodecaedro	Icosaedro
Figura					
Formado por ...	4 triángulos equiláteros	6 cuadrados	8 triángulos equiláteros	12 pentágonos regulares	20 triángulos equiláteros

ACTIVIDADES

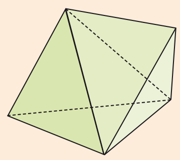
1. Encierra los poliedros convexos.



2. Comprueba la fórmula de Euler para tres cualesquiera de los poliedros regulares de la tabla anterior.

3. Determina el número de caras, vértices o aristas de los poliedros especificados.
   - Un poliedro de 4 caras y 4 vértices. *Tiene 6 aristas.*
   - Un poliedro de 15 aristas y 7 caras. *Tiene 10 vértices.*
   - Un poliedro de 10 vértices y 20 aristas. *Tiene12 caras.*

4. Observa el poliedro de la derecha y, luego, responde las preguntas.
   - Todas sus caras son triángulos congruentes, ¿es regular? *No es regular.*
   - ¿Por qué respondiste como lo hiciste? *El número de aristas que convergen en un vértice no es el mismo.*

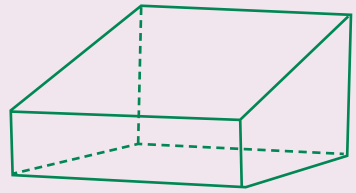


- **Desarrollo:** Muéstreles ejemplos de los conceptos desarrollados en la doble página. Pídales que lean y reproduzcan el contenido del apartado *Más información,* que trata sobre las diagonales de un poliedro. Haga que presten atención a la tabla que muestra los poliedros regulares y su clasificación.
- **Cierre:** Motive a sus estudiantes a realizar los ejercicios del apartado *Actividades.* En la actividad 1, encerrarán los poliedros convexos. En la actividad 2, comprobarán la fórmula de Euler para tres cualesquiera de los poliedros regulares de la tabla. En la actividad 3, determinarán el número de caras, vértices o aristas de los poliedros especificados. En la actividad 4, observarán el poliedro de la derecha y, luego, responderán las preguntas.

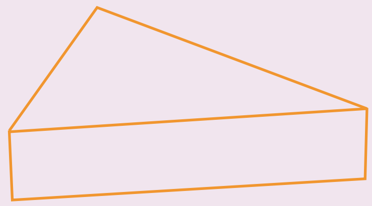
Atención a la diversidad

Actividades de refuerzo: Pida a sus estudiantes que comprueben la fórmula de Euler en los siguientes poliedros.

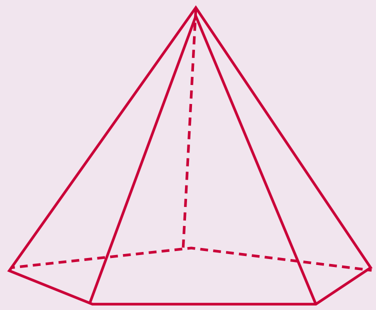
C + **V** = **A** + 2



Resp.: 6 + 8 = 12 + 2.



Resp.: 5 + 6 = 9 + 2.



Resp.: 6 + 6 = 10 + 2.

Ficha 37.

Aprender a aprender

Pregunte a sus estudiantes:

- *¿Cómo diferencian un poliedro regular de un poliedro irregular?*
- *¿Qué clase de poliedro es la pirámide pentagonal?*

Indicadores de logro

- **Reconoce** prismas y pirámides e **identifica** sus elementos.
- **Clasifica** prismas y pirámides.

Actividad interactiva

Elementos del prisma rectangular

Esta actividad interactiva es una aplicación a la identificación de los elementos de un cuerpo geométrico, en este caso seleccionarán, entre varias opciones, los elementos de un prisma rectangular.

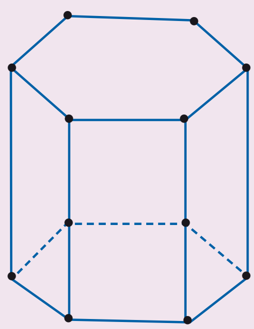
Más información

Comente al grupo que se puede determinar el número de aristas de un poliedro convexo, en este caso, un prisma o una pirámide, despejando la fórmula de Euler.

C + **V** = **A** + 2

A = **C** + **V** – 2

Por ejemplo, para calcular el número de arista de este prisma, aplicamos la fórmula.



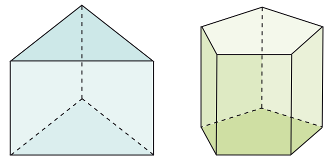
A = 8 + 12 – 2

A = 18

Motive al grupo para que calculen las aristas de diversos prismas y pirámides en sus cuadernos y, después, invíteles a la pizarra.

RECUPERACIÓN

■ **Observa** los poliedros siguientes y **di** cuántas caras, vértices y aristas tienen.



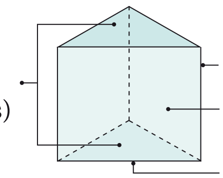
5 caras, 6 vértices, 9 aristas. *7 caras, 10 vértices, 15 aristas.*

1 Concepto de prisma. Elementos

Un prisma es el poliedro limitado por dos caras paralelas, llamadas bases, que son polígonos congruentes y las demás caras son paralelogramos.

El poliedro siguiente es un prisma.

Un prisma está formado por los siguientes elementos:



Si **n** es el número de lados del polígono de su base, el prisma tiene **n** + 2 caras; 2 x **n** vértices y 3 x **n** aristas.

EJEMPLO RESUELTO:

■ ¿Cuántas caras, vértices y aristas tiene un prisma cuyas bases son hexágonos?

Como **n** = 6, el prisma de base hexagonal tendrá:

n + 2 = 6 + 2 = 8 caras. 2 x **n** = 2 x 6 = 12 vértices.

3 x **n** = 3 x 6 = 18 aristas.

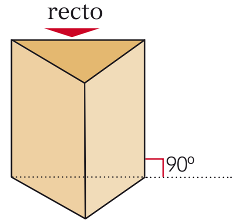
2 Clasificación de los prismas

Los prismas se clasifican en rectos y oblicuos.

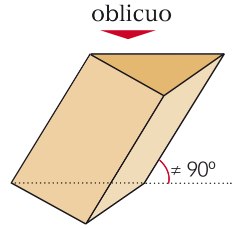
En un prisma recto, todas sus caras laterales son rectángulares.

En un prisma oblicuo, sus caras laterales no son rectángulos sino rombos o romboides.

Prisma recto



Prisma oblicuo



Cristales. Muchos minerales cristalizan formando poliedros de gran belleza.

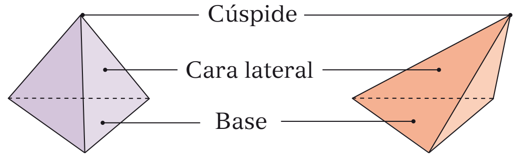
Sugerencias didácticas

- **Inicio:** Oriente a sus estudiantes para que lean y respondan en el aula la actividad vinculada a la recuperación de experiencias previas propuesta en el apartado *Recuperación*, relacionada con los poliedros. Motive al grupo a justificar sus respuestas.
- **Desarrollo:** Pida a sus estudiantes que lean cuidadosamente el contenido de la doble página y que observen las representaciones gráficas de los prismas y las pirámides y los ejemplos resueltos. Haga que observen los cristales con formas poliédricas y expresen sus comentarios.

3 Concepto de pirámide. Elementos

Una pirámide es el poliedro limitado por una cara poligonal y cuyas otras caras son triángulos con un vértice común.

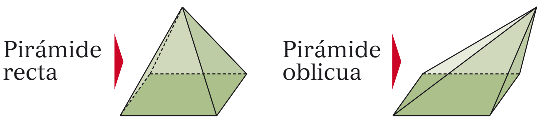
Observa las siguientes pirámides y sus elementos.



4 Clasificación de las pirámides

Las pirámides se clasifican en rectas y oblicuas.

Las caras laterales de una pirámide recta son todas triángulos equiláteros o isósceles. La pirámide oblicua tiene caras laterales que no son triángulos equiláteros o isósceles.



Si **n** es el número de lados de la base de una pirámide, dicha pirámide tiene **n** + 1 caras; **n** + 1 vértices y 2 x **n** aristas.

EJEMPLOS:

- ¿Cuántas caras, vértices y aristas tiene una pirámide cuya base es un octágono?

  Como **n** = 8, la pirámide de base octagonal tendrá:

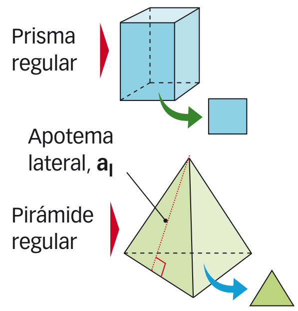
  n + 1 = 8 + 1 = 9 caras. **n** + 1 = 8 + 1 = 9 vértices.

  2 x **n** = 2 x 8 = 16 aristas.

MÁS INFORMACIÓN

Prismas y pirámides regulares

Un prisma y una pirámide son regulares si son rectos y el polígono de la base es regular.



El segmento perpendicular que une las aristas de la base de una pirámide regular con su cúspide es una apotema lateral, $\mathbf{a_l}$.

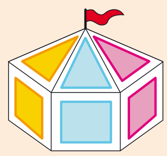
ACTIVIDADES

5 Determina lo que se te pide.

- El número de caras de un prisma pentagonal. *Tiene 7 caras.*
- El número de aristas de una pirámide heptagonal. *Tiene 14 aristas.*
- El número de vértices de un prisma octagonal. *Tiene 16 vértices.*

6 Resuelve el problema.

- Se quiere construir una carpa con forma de prisma pentagonal con un tope en forma de pirámide. ¿Cuántas piezas laterales de lona rectangulares y triangulares se necesitarán? *Se necesitarán 10 piezas.*



- **Desarrollo:** Pida a sus estudiantes que comenten el contenido del apartado *Más información* acerca de los prismas y las pirámides regulares. Recuerde al grupo que los prismas y las pirámides se nombran por el polígono de sus bases. Hay prismas o pirámides triangulares, cuadrangulares, pentagonales, hexagonales, etc., cuyas bases son triángulos, cuadrados, pentágonos, hexágonos, etc.
- **Cierre:** Motive a sus estudiantes a realizar los ejercicios del apartado *Actividades*. En la actividad 5, determinarán el número de caras, aristas y vértices de los prismas y pirámides que se les indiquen. En la actividad 6, resolverán un problema cotidiano vinculado con el prisma y la pirámide.

Atención a la diversidad

Actividades de refuerzo: Pida al grupo que determinen cuántas caras, vértices y aristas tienen los siguientes prismas.

- Prisma pentagonal:
  n = 5.
  Caras = 5 + 2 = 7.
  Vértices = 2 x 5 = 10.
  Aristas = 3 x 5 = 15.
- Prisma octagonal:
  n = 8.
  Caras = 8 + 2 = 10.
  Vértices = 2 x 8 = 16.
  Aristas = 3 x 8 = 24.
- Prisma cuadrangular:
  n = 4.
  Caras = 4 + 2 = 6.
  Vértices = 2 x 4 = 8.
  Aristas = 3 x 4 = 12.

Pida al grupo que determinen cuántas caras, vértices y aristas tienen las siguientes pirámides.

- Pirámide hexagonal:
  n = 6.
  Caras = 6 + 1 = 7.
  Vértices = 6 + 1 = 7.
  Aristas = 2 x 6 = 12.
- Pirámide triangular:
  n = 3.
  Caras = 3 + 1 = 4.
  Vértices = 3 + 1 = 4.
  Aristas = 2 x 3 = 6.

Ficha 38.

Aprender a aprender

Pregunte a sus estudiantes:

- *¿Qué pasos dieron para resolver el ejercicio 6 de las* Actividades*?*
- *¿Necesitaron alguna ayuda?*
- *¿En qué consistió esta ayuda?*

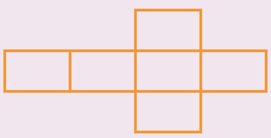
Indicadores de logro

- **Calcula** el área de poliedros diversos.

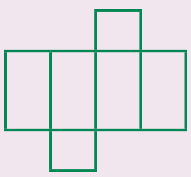
Previsión de dificultades

Para facilitar a los estudiantes el cálculo de área de los poliedros, es importante que identifiquen las formas desarrolladas de los mismos, como por ejemplo:

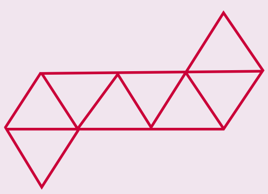
El cubo



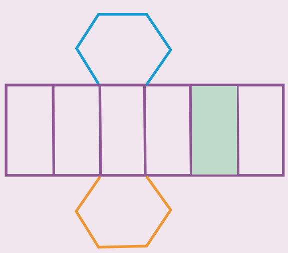
El prisma recto



El octaedro

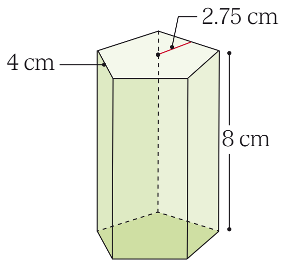


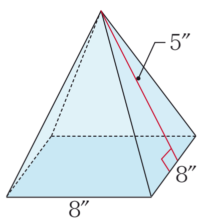
Prisma recto de base hexagonal



RECUPERACIÓN

- **Resuelve** el problema.
  - *Un prisma tiene por base un octágono de 15 cm de lado y 18.11 cm de apotema. ¿Cuál es el área de la base del prisma octagonal?* *1 086.6 cm².*

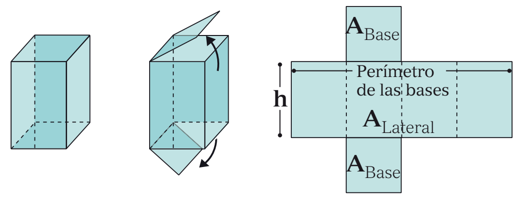




1 Áreas de poliedros

El área total de un prisma es la suma de las áreas de sus bases y de sus caras laterales: $\mathbf{A}_{\text{Prisma}} = 2 \times \mathbf{A}_{\text{Base}} + \mathbf{A}_{\text{Lateral}}$.

Observa la malla o plantilla de un prisma recto de base cuadrada:



Al desplegar el prisma, su parte lateral es un rectángulo de base igual al perímetro $\mathbf{P}_{\text{Base}}$ del polígono de la base (polígono basal) y de altura **h** igual a la altura el prisma. Así, el área total del prisma es: $\mathbf{A}_{\text{Prisma}} = 2 \times \mathbf{A}_{\text{Base}} + \mathbf{P}_{\text{Base}} \times \mathbf{h}$.

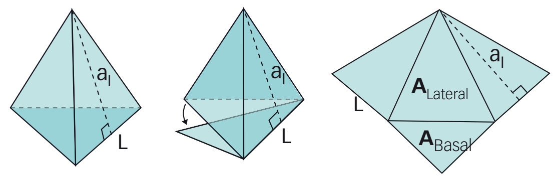
EJEMPLO RESUELTO:

- Calcular el área total del prisma de la izquierda.

  $\mathbf{A} = 2 \times (5 \times 4 \text{ cm} \times 2.75 \text{ cm} \div 2) + 5 \times 4 \text{ cm} \times 8 \text{ cm} = 215 \text{ cm}^2$.

2 Área de una pirámide recta

El área total de una pirámide recta es la suma de las áreas de su base y de sus caras laterales: $\mathbf{A}_{\text{Pirámide}} = \mathbf{A}_{\text{Base}} + \mathbf{A}_{\text{Lateral}}$.



Si $\mathbf{P}_{\text{Base}}$ es el perímetro de la base de la pirámide, entonces, al desplegarla como una malla, su área se calcula como sigue:

$$\mathbf{A}_{\text{Pirámide}} = \mathbf{A}_{\text{Base}} + \mathbf{n} \times [(\mathbf{L} \times \mathbf{a}_1) \div 2] = \mathbf{A}_{\text{Base}} + (\mathbf{P}_{\text{Base}} \times \mathbf{a}_1) \div 2.$$

EJEMPLO RESUELTO:

- El área total de la pirámide de la izquierda es:

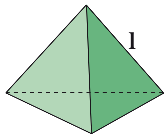
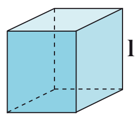
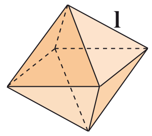
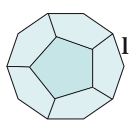
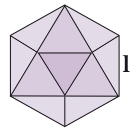
  $\mathbf{A} = (8'')^2 + (4 \times 8'' \times 5'') \div 2 = 144$ pulgadas².

Sugerencias didácticas

- **Inicio:** Oriente a sus estudiantes para que lean y resuelvan en el aula el problema de recuperación de experiencias previas propuesto en el apartado *Recuperación*, relacionado con el cálculo del área de la base de un prisma octagonal.
- **Desarrollo:** Haga que lean cuidadosamente el contenido de la doble página, que observen el desarrollo de los ejemplos resueltos y sus representaciones gráficas correspondientes. Formúleles preguntas como, por ejemplo: *¿Cómo se define el área total de un prisma recto? ¿Y el área de la pirámide recta?* Continúe con las preguntas.

3 Áreas de poliedros regulares

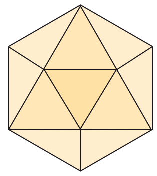
Para determinar el área total de los cinco poliedros regulares de aristas, **l**, se usan las expresiones siguientes:

Nombre	Tetraedro	Cubo	Octaedro	Dodecaedro	Icosaedro
Figura					
Área	$1.73 \times l^2$	$6 \times l^2$	$3.46 \times l^2$	$20.65 \times l^2$	$8.66 \times l^2$

EJEMPLO RESUELTO:

- Determinar el área total del icosaedro de la derecha.

  $A = 8.66 \times l^2 = 8.66 \times (5 \text{ cm})^2 = 216.50 \text{ cm}^2$.



4 Área de poliedros compuestos

El área total de un poliedro compuesto de poliedros distintos se calcula sumando las áreas de los poliedros componentes sin tomar en cuenta las áreas que se superponen.

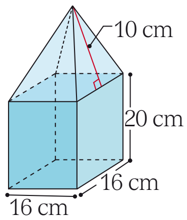
EJEMPLO RESUELTO:

- Calcular el área total del poliedro de la derecha.

  Como el área basal del tope piramidal se superpone a la cara superior del prisma, se eliminan estas caras:

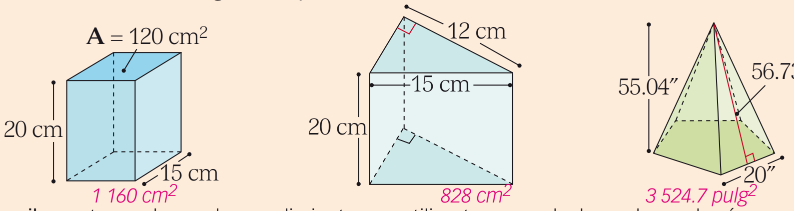
  $A = (16 \text{ cm})^2 + 4 \times 16 \text{ cm} \times 20 \text{ cm} + 4 \times 16 \text{ cm} \times 10 \text{ cm}$.

  $A = 256 \text{ cm}^2 + 1\,280 \text{ cm}^2 + 640 \text{ cm}^2 = 2\,176 \text{ cm}^2$.



ACTIVIDADES

7 Obtén el área total de los siguientes poliedros.



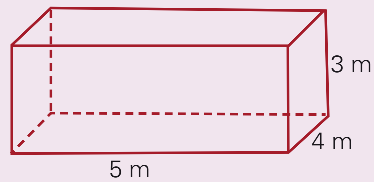
- **Describe** en tu cuaderno el procedimiento que utilizaste para calcular cada una las áreas anteriores y, luego, **comparte** tus descripciones con tus compañeros de curso.

- **Desarrollo:** Muestre a sus estudiantes, en la pizarra, ejemplos diversos sobre el cálculo de área de poliedros regulares y compuestos. Envíeles a la pizarra y motíveles para que describan los pasos a seguir en cada caso.
- **Cierre:** Motive a sus estudiantes a realizar los ejercicios del apartado *Actividades*. En la actividad 7, obtendrán el área total de los poliedros representados. Después describirán, en sus cuadernos, el procedimiento que utilizaron para calcular cada una de las áreas anteriores. Finalmente, compartirán con sus compañeros de curso sus descripciones.

Atención a la diversidad

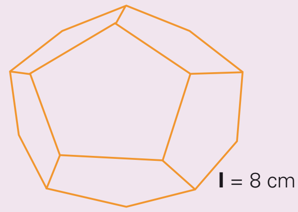
Actividad grupal: Organice a sus estudiantes en grupos de 3 o 4 integrantes. Luego, pídales que calculen el área lateral y el área total de los siguientes poliedros.

Prisma recto



Resp.: **AL** = 54 m². **AT** = 74 m².

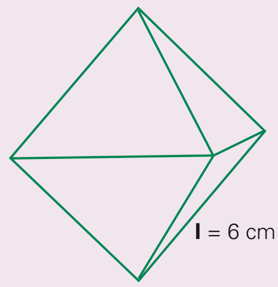
Dodecaedro



Resp:

AT = 20.65 x 82 = 1 321.60 c m².

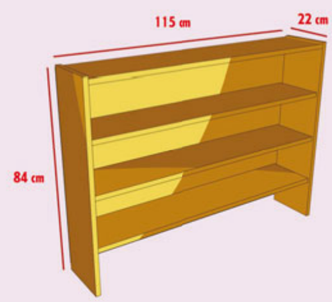
Octaedro



Resp.: **AT** = 3.46 x 62 = 124.56 cm².

Ficha 39.

Actividades de ampliación: Haga que calculen el área lateral y total de este librero.



Resp.: **AL** = 3 696 cm2.

AT = 8 756 cm2.

Indicadores de logro

- **Identifica** los cuerpos redondos y **calcula** sus áreas.

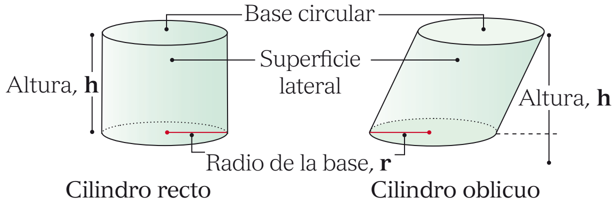
RECUPERACIÓN

- Responde.
  - *¿Qué diferencia hay entre un cuerpo redondo y un cuerpo poliedro?*

1 El cilindro

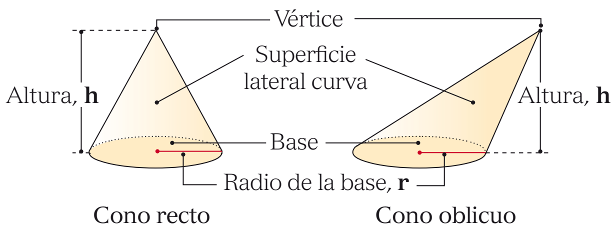
El cilindro es un cuerpo redondo con dos bases que son círculos paralelos y congruentes.

Los cuerpos siguientes son cilindros con sus elementos.



2 El cono

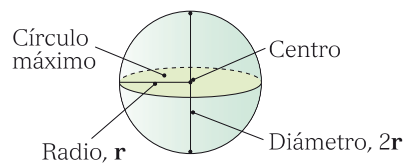
El cono es un cuerpo redondo con una sola base que es un círculo y un vértice. Los cuerpos siguientes son conos con sus elementos.



3 La esfera

La esfera es un cuerpo redondo tal que cualquier punto de su superficie es equidistante de un punto interior que es su centro.

El cuerpo siguiente es una esfera con sus elementos.



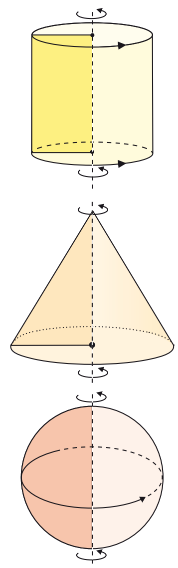
El segmento que une dos puntos de la superficie de una esfera y tal que su punto medio es el centro de la esfera es un diámetro.

Un círculo máximo de la esfera tiene el mismo radio y el mismo centro de la esfera.

MÁS INFORMACIÓN

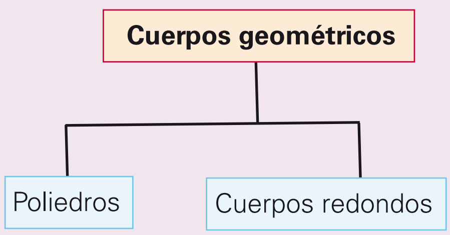
Cuerpos de revolución.

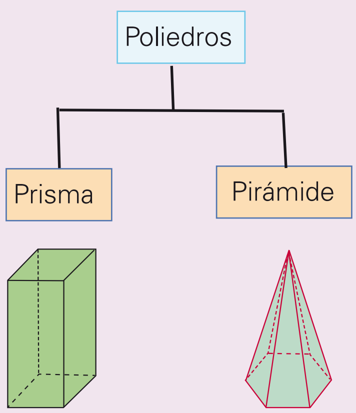
El cilindro y el cono rectos y la esfera son cuerpos de revolución porque se generan por la rotación de figuras planas.

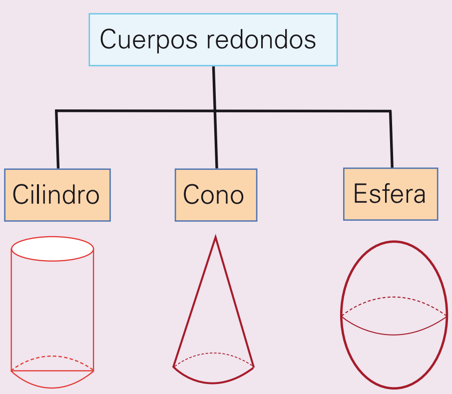


Otras sugerencias

Para que sus estudiantes vean con claridad la clasificación de los cuerpos geométricos, muéstreles el esquema siguiente:





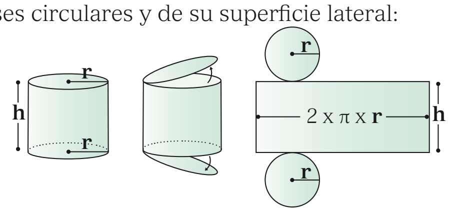


Sugerencias didácticas

- **Inicio:** Oriente a sus estudiantes para que lean y respondan en el aula la pregunta vinculada a la recuperación de experiencias previas propuesta en el apartado *Recuperación*, relacionada con los conceptos de cuerpos poliedros y cuerpos redondos.
- **Desarrollo:** Pídales que lean el contenido de la doble página, que observen los procedimientos aplicados en los ejemplos resueltos y las representaciones gráficas de los cuerpos redondos. Motíveles para que lean y comenten el contenido del apartado *Más información*, sobre los cuerpos de revolución. Pregunte al grupo: *¿Por qué el cilindro, el cono recto y la esfera son cuerpos de revolución?*

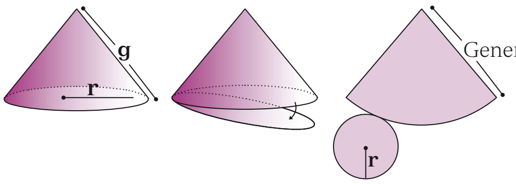
4 Áreas del cilindro, el cono y la esfera

El área total de un cilindro recto es la suma de las áreas de sus bases circulares y de su superficie lateral:



De la figura se infiere que: $\mathbf{A}_{\text{Cilindro}} = 2 \times \pi \times \mathbf{r}^2 + 2 \times \pi \times \mathbf{r} \times \mathbf{h}$.

El área total de un cono es la suma del área de su base y de su superficie lateral:



El área total del cono se calcula con: $\mathbf{A}_{\text{Cono}} = \pi \times \mathbf{r}^2 + \pi \times \mathbf{r} \times \mathbf{g}$.

El área de una esfera se obtiene con: $\mathbf{A}_{\text{Esfera}} = 4 \times \pi \times \mathbf{r}^2$.

EJEMPLOS RESUELTOS:

- Determinar el área de un cilindro, de radio basal de 6 cm y altura 4 cm.

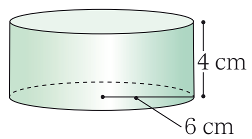
  $\mathbf{A} = 2 \times 3.14 \times (6 \text{ cm})^2 + 2 \times 3.14 \times 6 \text{ cm} \times 4 \text{ cm} = 376.8 \text{ cm}^2$.

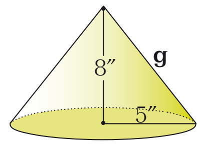
- Obtener el área del cono, de radio basal de 5″ y altura 8″.

  $\mathbf{A} = 3.14 \times (5'')^2 + 3.14 \times 5'' \times 9.43'' = 226.55 \text{ pulg}^2$.

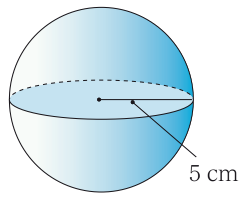
- Calcular el área de la esfera, de radio 5 cm.

  $\mathbf{A} = 4 \times 3.14 \times (5 \text{ cm})^2 = 314 \text{ cm}^2$.



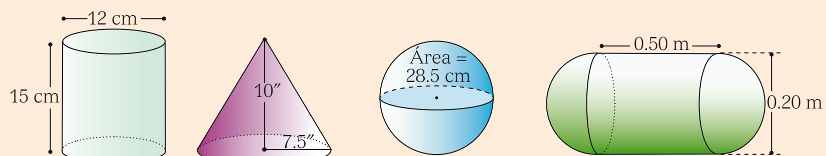


$\mathbf{g} = \sqrt{(8'')^2 + (5'')^2} = 9.43''$



ACTIVIDADES

8 **Obtén el área total de los siguientes cuerpos redondos** y, luego, **describe** el procedimiento que usaste.

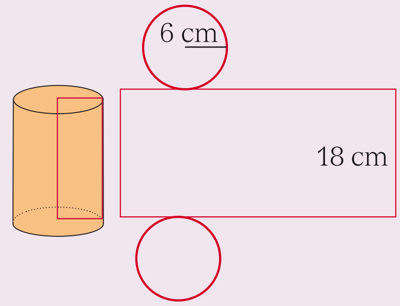


791.28 cm² | *472 pulg²* | *114 cm²* | *0.4396 m²*

- **Desarrollo:** Muestre a sus estudiantes el proceso de solución de los ejemplos resueltos en el cálculo del área de los cuerpos redondos. Explique al grupo que, en el caso del cono, cuando desconozcan longitud de la generatriz, deben determinarla mediante el teorema de Pitágoras con la longitud del radio y la altura del mismo, ya que forman un triángulo rectángulo. Desarrolle algunos ejemplos similares en la pizarra.
- **Cierre:** Motive a sus estudiantes a realizar los ejercicios propuestos en el apartado *Actividades*. En la actividad 8, obtendrán el área total de los cuerpos redondos representados. Después, describirán en sus cuadernos el procedimiento que utilizaron para calcular cada una de las áreas anteriores y compartirán sus descripciones con sus compañeros de curso.

Atención a la diversidad

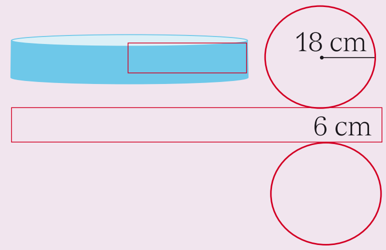
Actividades de refuerzo: Pídales que determinen el área de los siguientes cuerpos redondos.



Resp.: **Al** = 678.24 cm².

Ab = 226.08 cm².

AT = 904.32 cm².



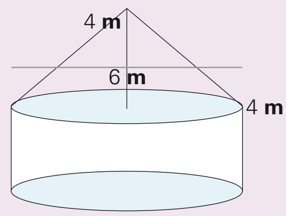
Resp.: **Al** = 678.24 cm².

Ab = 2 034.72 cm².

AT = 2 712.96 cm².

Ficha 40.

Actividades de ampliación: Motive al grupo para que calculen el área total de esta pieza de metal.



Resp.: Generatriz = 5

Cono: **AT** = 75.36 m².

Cilindro: **AT** = 131.88 m². 22*3.14

Área de la pieza = 207.24 m².

Aprender a aprender

Pregunte al grupo:

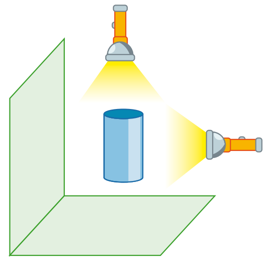
- *¿Qué procedimientos tuvieron que ejecutar para determinar el área del cuerpo compuesto del ejercicio 8 de las* Actividades.

Indicadores de logro

- **Identifica** proyecciones ortogonales diversas.

RECUPERACIÓN

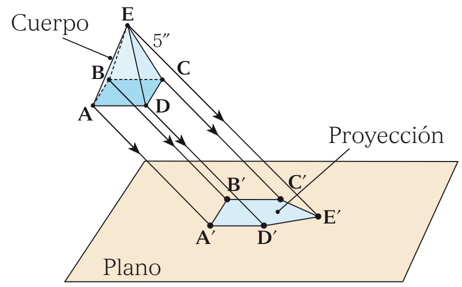
■ **Observa** la figura y, luego, **responde**.



- *¿Qué figura forma la sombra del cilindro en el piso?*
- *¿Y en la pared?*

1 Proyección de un cuerpo sobre un plano

Observa la figura siguiente.



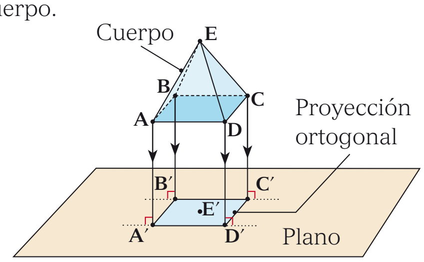
Cada punto de la pirámide **ABCDE** se hace corresponder con un punto del plano que se encuentra debajo.

La figura plana **A′B′C′D′E′** es una proyección de la pirámide **ABCDE** sobre el plano.

Las líneas paralelas que llevan hasta el plano a cada punto de la pirámide se llaman líneas proyectantes. En la figura anterior hay representadas cinco líneas proyectantes, correspondientes a los cinco vértices de la pirámide: **AA′**||**BB′**||**CC′**||**DD′**||**EE′**.

2 Proyecciones ortogonales

Cuando las líneas proyectantes son perpendiculares al plano, mediante ellas se consigue una proyección ortogonal del cuerpo.



La proyección ortogonal de la pirámide de base cuadrada **ABCDE** es el cuadrado **A′B′C′D′**. El vértice **E** de la pirámide proyectada es el punto **E′** del interior del cuadrado **A′B′C′D′**.

Fíjate en la figura anterior que las rectas proyectantes son perpendiculares a las rectas **A′B′**, **B′C′**, **C′D′** y **A′D′**:

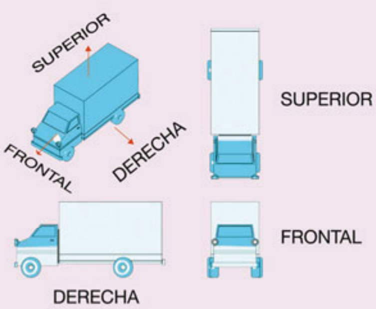
$$AA' \perp A'D' \;;\; BB' \perp B'C' \;;\; CC' \perp B'C' \text{ y } DD' \perp A'D'.$$

Más información

Aclare a sus estudiantes que las proyecciones ortogonales permiten tener dos o más puntos de vista de un mismo objeto. Hay tres planos de proyección: vertical, horizontal y de perfil. La proyección de estos planos se produce en ángulos de 90° o rectos, de esto viene el nombre de ortogonal.

Las proyecciones ortogonales son de gran importancia porque permiten mostrar características de los objetos que no pueden identificarse con otras proyecciones, por ejemplo, el ancho, altura, la profundidad, etc.

Muéstreles la proyección ortogonal de este camión:



Sugerencias didácticas

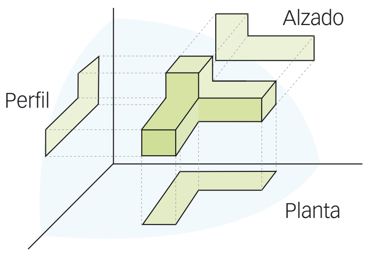
- **Inicio:** Oriente a sus estudiantes para que observen y describan en el aula el experimento vinculado a la recuperación de experiencias previas propuesta en el apartado *Recuperación,* relacionado con las proyecciones ortogonales, luego, haga que respondan las preguntas.
- **Desarrollo:** Pida a sus estudiantes que lean cuidadosamente el contenido de la doble página y que observen las representaciones gráficas de proyecciones ortogonales que muestran los ejemplos. Motíveles para que reproduzcan estas proyecciones en hojas blancas usando sus reglas.

3 Vistas ortogonales de un cuerpo

Las vistas ortogonales son proyecciones ortogonales de un cuerpo sobre tres planos perpendiculares.

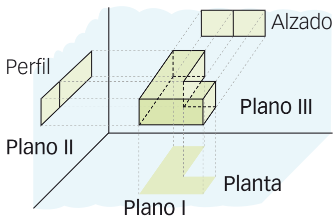
Hay tres vistas ortogonales: la planta, el perfil y el alzado.

La planta es la proyección ortogonal sobre el plano horizontal, I; el perfil, la proyección sobre el plano vertical izquierdo, II; y el alzado, la proyección vertical sobre el plano vertical de fondo, III.



EJEMPLO:

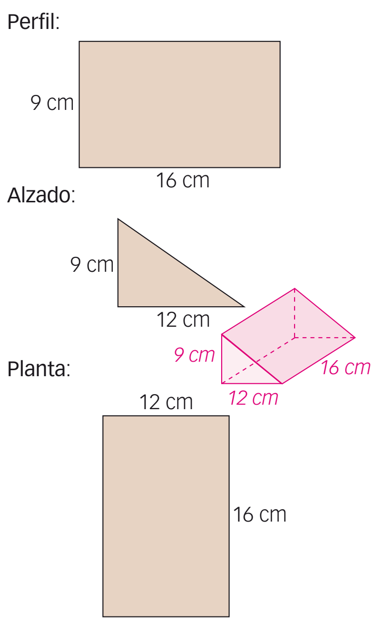
- Observa las tres vistas del poliedro cóncavo siguiente.



INTELIGENCIA COLABORATIVA

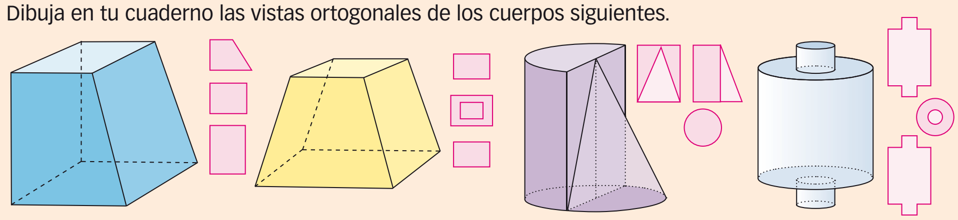
Construcción de un cuerpo a partir de sus vistas

- **Observen** las tres vistas de un cuerpo geométrico y **construyan** el cuerpo, usando cartulina, a partir de ellas.



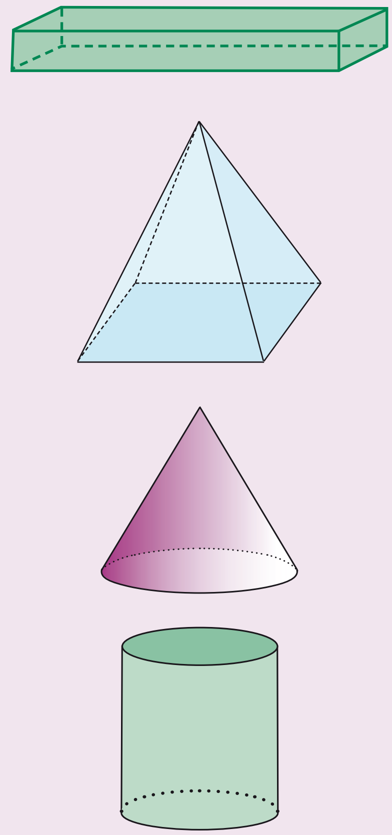
ACTIVIDADES

9 Dibuja en tu cuaderno las vistas ortogonales de los cuerpos siguientes.



Atención a la diversidad

Actividades de refuerzo: Haga que dibujen en sus cuadernos las proyecciones ortogonales de los siguientes cuerpos geométricos.



Ficha 41.

- **Desarrollo:** Muéstreles algunas proyecciones ortogonales en la pizarra y haga que las reproduzcan en sus cuadernos. Proponga a sus estudiantes que lean el contenido del apartado *Inteligencia colaborativa*, que trata sobre la construcción de un cuerpo a partir de sus vistas. Haga que construyan estos cuerpos usando cartulina y la regla graduada en centímetros.
- **Cierre:** Motive a sus estudiantes a realizar los ejercicios del apartado *Actividades*. En la actividad 9, dibujarán en sus cuadernos las vistas ortogonales de los cuerpos representados. Ofrézcales las orientaciones que sean necesarias y acompáñeles en la realización de esta actividad.

Aprender a aprender

Pregunte al grupo:

- *¿Hubo alguna dificultad que debiera superarse al trazar las figuras ortogonales?*
- *¿Necesitaron ayuda adicional para hacerlo?*
- *¿Qué pasos dieron para superarlo?*

Competencias

- Comunicativa.
- Usa algoritmos.
- Resolución de problemas.

Indicadores de logro

- **Reconoce** poliedros diversos e **identifica** sus elementos.
- **Clasifica** poliedros diversos.
- **Reconoce** prismas y pirámides e **identifica** sus elementos.
- **Clasifica** prismas y pirámides.
- **Calcula** el área de poliedros diversos.
- **Identifica** los cuerpos redondos y **calcula** sus áreas.
- **Identifica** diferentes proyecciones ortogonales.
- **Resuelve** problemas del contexto donde interviene el cálculo de área de cuerpos geométricos diversos.

ACTIVIDADES

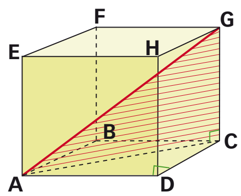
10 Completa la tabla relativa a prismas.

Número de lados de la base, **N**	3	5	9	12
Número de caras, **N** + 2	5	7	11	14
Número de vértices, 2**N**	6	10	18	24
Número de aristas, 3**N**	9	15	27	36

11 Di si con el número de caras, vértices y aristas dado puedes construir un poliedro.

- 7 caras, 10 vértices y 15 aristas. *Sí.*
- 8 caras, 7 vértices y 12 aristas. *No.*
- 12 caras, 9 vértices y 20 aristas. *No.*
- 12 caras, 20 vértices y 30 aristas. *Sí.*

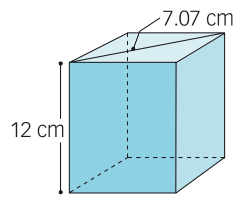
12 Determina la longitud de la diagonal **AG** del siguiente prisma de base rectangular. NOTA: Los triángulos **ACD** y **AGC** son rectángulos.



AG = *134.61 cm.*

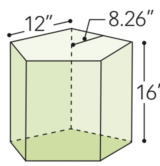
13 Obtén el área total de los siguientes prismas.

- Un prisma de altura 12 cm y cuya base es un cuadrado de diagonal de 7.071 cm.



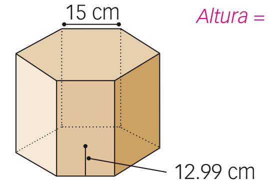
290 cm².

- Un prisma de altura 16" y cuya base es un pentágono regular de 8.26".



1 455.6 pulg².

14 Calcula la altura de un prisma regular hexagonal siguiente, si su área total es de 5 219.1 cm².



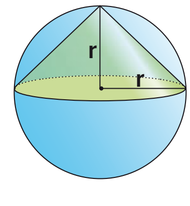
Altura = 45 cm.

15 Resuelve los problemas.

- ¿Cuántos metros cuadrados de lona tiene una casa de campaña en forma de pirámide de base cuadrada de 3.2 m de lado y cuya apotema lateral mide 4.31 m? *37.82 m²*
- Se quiere colocar una etiqueta que rodee a un pote de tomates en conserva de forma cilíndrica de diámetro 11.4 cm y 15 cm de altura. ¿Cuánto papel se usará en la etiqueta? *536.94 cm²*

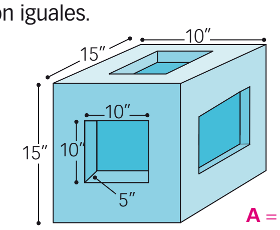
16 Lee con detenimiento y, luego, responde.

- El radio de la esfera es de 15 cm. El cono tiene una base y una altura de igual longitud que el radio de la esfera en que está contenido. ¿Qué porcentaje del área de la esfera representa el área del cono?



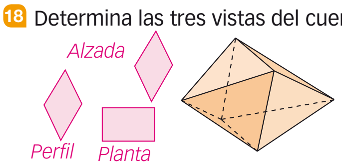
El 60.36%. El porcentaje es el mismo para cualquier radio.

17 Calcula el área del poliedro, si los huecos de cada cara son iguales.



A = *2 550 pulg²*

18 Determina las tres vistas del cuerpo.



Competencias fundamentales

Competencia comunicativa

Es importante que los estudiantes adquieran las habilidades necesarias para identificar y diferenciar los poliedros y los cuerpos redondos y su clasificación, al mismo tiempo, puedan desarrollar las competencias comunicativas que les permitan expresar y aplicar sus características y propiedades.

Usa algoritmos

Las reglas y procedimientos en la resolución de operaciones aritméticas son vitales para la persecución de resultados correctos. Por ejemplo, en las operaciones que involucran el cálculo del área lateral, basal y total de los diversos poliedros y cuerpos redondos.

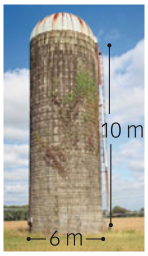
Sugerencias didácticas

- Las actividades propuestas en esta página están estrechamente vinculadas a los conceptos y procedimientos desarrollados a lo largo de la unidad. Haga que lean cuidadosamente las instrucciones y, después, verifique las respuestas obtenidas.
- Es importante observar de cerca que los estudiantes siguen las instrucciones y aplican en forma correcta las fórmulas correspondientes para calcular el área de los poliedros y los cuerpos redondos.

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

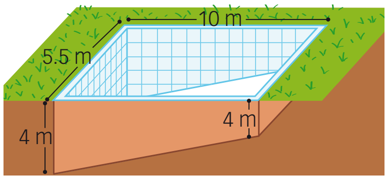
19 Lee y, luego, responde.

- Se quiere empañetar el exterior de un silo cilíndrico de 10 m de altura y 6 m de diámetro. El costo de empañete es de RD$ 295.00 por metro cuadrado, ¿cuánto costará empañetar la superficie lateral del silo?



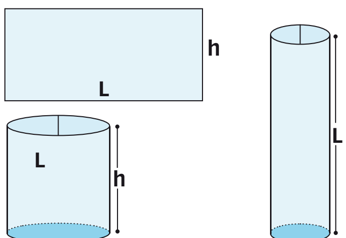
Costo del empañetado: RD$ 55 578.00

20 Calcula el número total de azulejos de dimensiones 10 cm x 10 cm necesarios para cubrir las paredes interiores y el fondo de la piscina siguiente. *14 800 azulejos.*



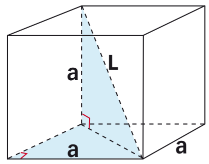
21 Lee y, luego, responde.

- Se enrolla por el lado más largo una hoja de papel de 8 ½" x 11" para formar la superficie lateral de un cilindro. Si la superficie lateral del cilindro se forma enrollando por el lado menos largo, ¿cambia el área lateral de la superficie cilíndrica? *No cambia.*
- Si completáramos los cilindros con sus bases, ¿cuáles serán sus superficies totales?



112.77 $pulg^2$ y 105 $pulg^2$.

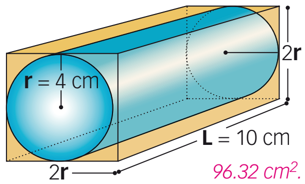
22 Fíjate en el cubo siguiente y descubre un camino para determinar que la longitud **L** de cualquiera de sus diagonales es: $L = a\sqrt{3}$.



La hipotenusa del triángulo rectángulo de la base es $\sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$, que es un cateto de otro triángulo rectángulo. Entonces:

$L = \sqrt{(a\sqrt{2})^2 + a^2} = \sqrt{2a^2 + a^2} = \sqrt{3a^2} = a\sqrt{3}$.

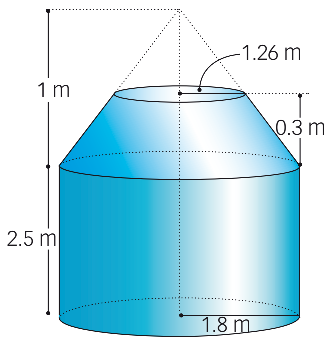
23 La figura representa un estuche de plástico que encierra un tubo cilíndrico del mismo material encajado por completo en el primero. Calcula cuántos cm^2 más de material plástico tiene el estuche que el tubo cilíndrico.



96.32 cm^2.

24 Lee y, luego, responde.

¿Cuál es el costo del material plástico utilizado en la construcción de un tinaco como el de la figura, si el precio del plástico es de RD$ 320 el metro cuadrado? *RD$ 14 201.60*



- Explica en el grupo qué hiciste para resolver el problema del fabricante.

Competencias fundamentales

Resolución de problemas

- Las habilidades y destrezas adquiridas por los estudiantes son necesarias para identificar las alternativas más convenientes en la persecución de la solución de problemas que forman parte de su diario vivir. En este aspecto radica la importancia de que los estudiantes adquieran las destrezas necesarias en los aspectos relacionados con la identificación y clasificación de los poliedros y los cuerpos redondos y el cálculo de sus áreas.

Criterios de evaluación

Competencia comunicativa:

- Adaptación a las representaciones gráficas, simbólicas y numéricas a la situación de comunicación.

Algoritmo:

- Seguimiento de las reglas, instrucciones y procedimientos.

Resolución de problemas:

- Adecuación de las estrategias y procedimientos al tipo de problema y al contexto.

Sugerencias didácticas

Resolución de problemas

- Proponga a sus estudiantes que lean detenidamente las instrucciones de los problemas propuestos en las actividades 19, 20, 21, 22, 23 y 24. Estos problemas son aplicaciones cotidianas de los cuerpos geométricos poliédricos y redondos y el cálculo de sus áreas. Acompañe a sus estudiantes en la realización de estas actividades y ofrézcales las orientaciones necesarias.

Aprender a aprender

Motive a sus estudiantes para que inventen ejemplos de las aplicaciones cotidianas de los conceptos desarrollados en la unidad. Por ejemplo, pregunte al grupo:

- *¿Qué importancia tiene calcular en forma correcta el área de una pieza de madera compuesta por un prisma y una esfera?*

Discuta las diversas respuestas con el grupo.

Indicadores de logro de la evaluación

- **Reconoce** poliedros diversos e **identifica** sus elementos.
- **Clasifica** poliedros diversos.
- **Reconoce** prismas y pirámides e **identifica** sus elementos.
- **Clasifica** prismas y pirámides.
- **Calcula** el área de poliedros diversos.
- **Identifica** los cuerpos redondos y **calcula** sus áreas.
- **Identifica** diversas proyecciones ortogonales.
- **Resuelve** problemas del contexto donde interviene el cálculo de área de cuerpos geométricos diversos.
- **Utiliza** recursos virtuales y electrónicos: computadora, softwares educativos, juegos interactivos y otros, en la búsqueda de información.

Competencias específicas

- Comunica.
- Modela.
- Usa algoritmos.
- Conecta.
- Resuelve problemas.

Aprender a aprender

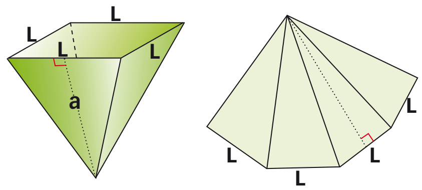
Plantear al grupo:

- *Si debe determinar el área que ocupará un adorno en madera, formado por un prisma rectangular recto y una semiesfera, ¿cuáles son los pasos que darían para calcular dicha área?*

EVALUACIÓN

Comunica

25 Fíjate en la superficie lateral de una pirámide regular. ¿Cómo enunciarías la expresión para calcular su área?



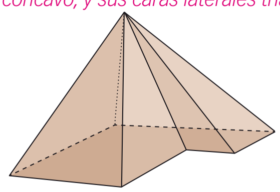
A = (4 x **L**) x **a** ÷ 2.

El área lateral de la pirámide regular es la mitad del producto del perímetro de su base por su apotema lateral.

Razona y argumenta

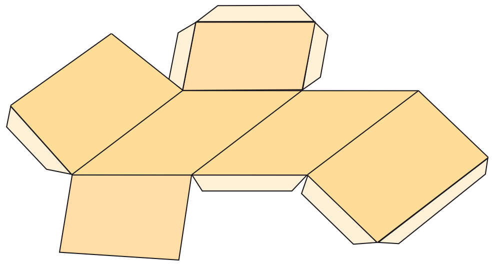
26 Piensa y, luego, responde justificando tu respuesta.

- ¿Cuál es el número mínimo de caras laterales que puede tener un prisma? *Tres caras. Porque el triángulo es el polígono de menor número de lados.*
- ¿Con cuál argumento podrías asegurar que el cuerpo siguiente es una pirámide? *Su base es un polígono, convexo o cóncavo, y sus caras laterales triángulos.*



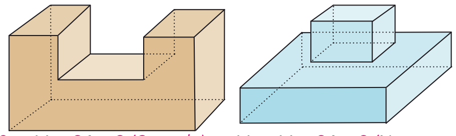
Modela y representa

27 Amplía en una fotocopiadora y, luego, calca las mallas siguientes. Finalmente, construye los cuerpos geométricos que les corresponden. Comprueba que cumplen con la fórmula de Euler.



Usa algoritmos

28 Identifica el poliedro que no cumple con la fórmula de Euler.

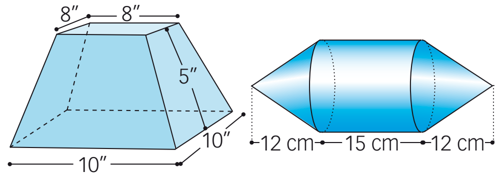


10 + 16 = 24 + 2 (Cumple)　*11 + 16 ≠ 24 + 2 (No cumple)*

29 Resuelve el problema.

- Manuel construye un paralelepípedo de cartulina de 40 cm de largo, 20 cm de ancho y 15 cm de altura. Si la cartulina tiene un gramaje de 250 gramos /m^2, ¿cuántos gramos tiene el paralelepípedo construido? *Resp.: 85 g.*

30 Calcula el área total de los cuerpos geométricos siguientes.



Conecta

31 Resuelve el problema.

- En la tabla se muestran los tres tipos de lata que produce un fabricante, sus dimensiones en cm y los precios del material de que están hechas, en RD$/cm^2.

Una empresa envasadora de atún quiere saber cuál de las latas le sale más barata para reducir los costos. ¿Por cuál clase de lata debería decidirse la envasadora?

Clase de lata	A	B	C
Radio de la lata	12	10	8
Altura de la lata	3	5	6
Precio del material	0.020	0.023	0.032

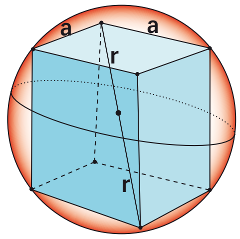
Sale más barata la lata tipo ***B****: RD$ 21.67.*

Sugerencias didácticas para la evaluación

- Es importante verificar, antes de dar inicio a las actividades de evaluación, que sus estudiantes conocen cómo se clasifican los cuerpos geométricos. Observar que utilizan correctamente las fórmulas para determinar el área de los diversos cuerpos poliédricos y redondos y, además, que pueden vincular estos conceptos a elementos propios de la cotidianidad.
- Si cuenta con tecnología como refuerzo, puede aplicar la prueba de la unidad que se encuentra en la plataforma didáctica Pleno.

32 **Resolución de problemas**. Lee el texto y, luego, explora la solución del problema.

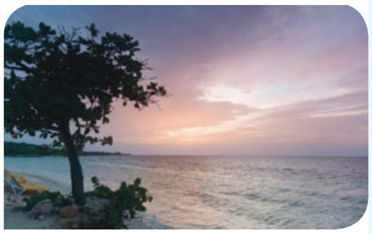
El astrónomo, físico y matemático alemán Johannes Kepler (1571-1630), en una obra temprana, creyó que las órbitas planetarias estaban encajadas en los cinco poliedros regulares, llamados también **sólidos platónicos**. Esta creencia fue más tarde considerada por él como un error y abandonada cuando dispuso de datos astronómicos más precisos.



- Observa la figura que muestra al mayor cubo capaz de ser contenido en una esfera de radio **r**. Cualquiera de las diagonales de este cubo de arista **a**, pasa por el centro de la esfera y su longitud es igual al diámetro de la esfera. **Expresa** la relación de igualdad entre las longitudes del diámetro y la diagonal. *$2 \times \mathbf{r} = \mathbf{a}\sqrt{3}$*
- Si el radio de la esfera mide 3.4641 cm, ¿cuánto mide la arista del cubo máximo? ***a** = 4 cm.*
- ¿Cuántas veces más grande es el área de la esfera que el área del cubo? 1.57 veces. *1.57 veces.*

33 **Medio ambiente**. Piensa y, luego, responde.

- ¿Qué entiendes tú por paisaje?
- ¿Qué relaciones estableces entre paisaje y medio ambiente?
- ¿Qué clase de paisaje te llama más la atención?
- ¿Por qué debemos proteger nuestros paisajes?



APRENDIZAJE AUTÓNOMO

34 Marca según tus logros.

	Iniciado	En proceso	Logrado
• Reconozco y clasifico diversos cuerpos geométricos.	☐	☐	☐
• Calculo áreas de poliedros y cuerpos redondos.	☐	☐	☐
• Identifico las proyecciones ortogonales de un cuerpo.	☐	☐	☐
• Resuelvo problemas relativos a áreas de cuerpos.	☐	☐	☐

35 Reflexiona sobre tu aprendizaje.

- ¿Cuáles de los contenidos tratados en la unidad podrían serte más útiles? ¿Por qué?
- ¿En cuáles situaciones cotidianas los aplicarías?

Resolución de problemas

- En la actividad 32, *Resolución de problemas*, analizarán el contenido de un texto que trata sobre la teoría del físico alemán Kepler, el cual creyó que las órbitas planetarias estaban encajadas en cinco poliedros regulares. En este caso, basados en dicha teoría desestimada, expresarán las relaciones de igualdad que se les indican utilizando las fórmulas de área correspondientes, a fin de que puedan responder las preguntas propuestas.

Actitudes y valores

Medio ambiente

En la sección destinada a *Actitudes y valores*, actividad 33, responderán qué relaciones establecen entre paisaje y medio ambiente. Expresarán qué clase de paisaje les llama más la atención. Por último, dirán por qué debemos proteger nuestros paisajes.

Aprendizaje autónomo

- En el apartado *Aprendizaje autónomo*, actividad 34, evaluarán si los conceptos y procedimientos que trabajaron en la unidad se encuentran en estado de iniciación, en proceso o logrados. En la actividad 35, reflexionarán sobre su proceso de aprendizaje.

Sugerencias didácticas para la evaluación

- Pregunte a sus estudiantes:
  — *¿Cómo se clasifican los cuerpos geométricos?*
  — *¿Qué es un cuerpo poliedro?*
  — *¿Qué es un cuerpo redondo?*
  — *¿Por qué se dice que los cuerpos redondos son de revolución?*
  — *¿Cómo se calcula el área de un prisma regular recto?*

Aprender a aprender

Haga que sus estudiantes apliquen los conceptos aprendidos en la unidad en situaciones de la cotidianidad, por ejemplo, preguntar:

- *¿Cuáles son los pasos para realizar una proyección ortogonal de un edificio con forma de prisma de base cuadrada?*

8 Cuerpos geométricos. Volumen

COMPETENCIAS

Específicas

- **Comunica**: **Expresa**, con la notación adecuada, las experiencias con el cálculo de volumen de cuerpos geométricos que ha experimentado en su diario vivir.
- **Modelar y representar**: **Aplica** adecuadamente los procedimientos para el cálculo de volumen de cuerpos geométricos.
- **Usa algoritmo**: **Sigue** las reglas que le permiten obtener un resultado al resolver problemas que involucran el cálculo de volumen de diversos cuerpos geométricos.
- **Conecta**: **Aplica** las diferentes unidades de volumen para resolver problemas de situaciones del contexto, de otras ciencias y de la propia Matemática.
- **Resuelve problemas**: **Resuelve** problemas que involucran el cálculo de volumen de diversos cuerpos geométricos.
- **Utiliza herramientas tecnológicas**: **Utiliza** soportes tecnológicos como la Internet, la calculadora científica y otros dispositivos.

Fundamentales

Resolución de problemas: **Plantea** y **resuelve** problemas sobre situaciones del entorno que involucran el cálculo de volumen de diversos cuerpos geométricos.

CONTENIDOS

Conceptos

- El cubo, el paralelepípedo y la pirámide.
- Prismas y pirámides regulares.
- Cuerpos redondos.
- Simetría de los cuerpos geométricos.

Procedimientos

- Determinación del volumen del cubo, el paralelepípedo y la pirámide.
- Determinación del volumen de prismas y pirámides regulares.
- Determinación del volumen de cuerpos redondos.
- Identificación de planos y ejes de simetría de cuerpos geométricos.

Actitudes y valores

- Valoración crítica de nuestro entorno.
- Apreciación de la creatividad de las diversas comunidades humanas.

Tiempo estimado de trabajo: 2 semanas

INDICADORES DE LOGRO

- **Calcula** volúmenes del cubo, el paralelepípedo y la pirámide.
- **Establece** la relación entre los volúmenes de un prisma y de una pirámide de iguales base y altura.
- **Calcula** los volúmenes de prismas y pirámides regulares.
- **Calcula** el volumen de cuerpos compuestos por prismas y pirámides.
- **Calcula** los volúmenes de cuerpos redondos.
- **Calcula** el volumen de cuerpos compuestos por cilindros, conos y esferas.
- **Identifica** planos de simetría.
- **Identifica** planos de simetría de poliedros y cuerpos redondos.
- **Resuelve** problemas del contexto donde interviene el cálculo de volúmenes de cuerpos geométricos diversos.
- **Utiliza** recursos virtuales y electrónicos: computadora, softwares educativos, juegos interactivos y otros, en la búsqueda de información.

Valor transversal: Identidad

Recursos digitales

Plataforma digital

CD

BIBLIOTECA DEL DOCENTE

- DOCUMENTOS PARA LA PLANIFICACIÓN
- GUÍA DE RECURSOS TIC

CUADERNO DE ACTIVIDADES

UNIDAD 8	Cuerpos geométricos. Volumen

RECURSOS DE REFUERZO Y AMPLIACIÓN

LibroMedia

ACTIVIDADES INTERACTIVAS

PÁGINA 141	Volumen de un cubo
PÁGINA 142	Volumen de un ortoedro I
PÁGINA 144	Volúmenes de los poliedros

CD DE RECURSOS DIGITALES: PLAN REGULAR

Pleno — PRUEBA DE EVALUACIÓN FORMATIVA DE LA UNIDAD

Estrategias pedagógicas

- Recuperación de experiencias previas.
- Trabajo en equipo.
- Aprendizajes basados en problemas (ABP).

Unidad 8

Competencias de la unidad

- **Lee** y **comenta** las informaciones expuestas en el apartado *Punto de partida*.
- **Responde** preguntas relacionadas con las informaciones expuestas en el apartado *Punto de partida*.
- **Recupera** experiencias vividas mediante la observación de las imágenes de la ilustración.
- **Responde** preguntas vinculadas a sus experiencias previas sobre los conceptos que desarrollarán en la unidad en el apartado *Recuperación de conocimientos*.
- **Responde** preguntas vinculadas a las aplicaciones cotidianas de los conceptos que desarrollarán en la unidad en el apartado *Observación*.

8 Cuerpos geométricos. Volumen

Punto de partida

La profesora de Ciencias Sociales muestra a los estudiantes cartelones con imágenes de distintas clases de vivienda típicas de cada uno de los continentes. Destaca que la arquitectura vernácula de los diferentes pueblos presenta formas geométricas, colores, maneras de decorar y materiales de construcción ajustados a sus entornos naturales y socioculturales.

Al término de la exposición de la profesora, Alfredo levantó la mano para destacar el carácter amigable de la arquitectura vernácula, su adaptabilidad al ambiente y su apoyo en herencias comunitarias.

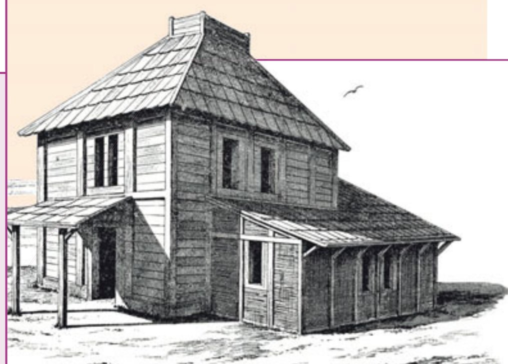
- ¿Cómo están relacionadas las viviendas con el entorno físico en los que se construyen?
- ¿Y con las tradiciones y las creencias comunitarias?
- ¿Qué consideraciones te merecen las afirmaciones que hace Alfredo?

Conceptos y procedimientos

- El cubo, el paralelepípedo y la pirámide.
- Prismas y pirámides regulares.
- Cuerpos redondos.
- Simetrías de los cuerpos geométricos.

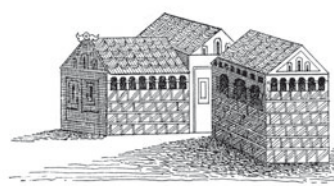
Actitudes y valores

- Valorar críticamente nuestro entorno.
- Apreciar la creatividad de las diversas comunidades humanas.



RECUPERACIÓN DE CONOCIMIENTOS

- **Observa** estas viviendas de la Edad Media temprana y, luego, **responde**.
- ¿Qué clase de cuerpo geométrico se muestra en el grabado?
- ¿Qué poliedros puedes identificar en estas edificaciones?
- ¿Cuántas caras, vértices y aristas tiene una cualquiera de estas viviendas?



Apertura de la unidad

Dentro de los objetivos principales de la apertura de esta unidad se encuentran el plantear una situación de aprendizaje, una problemática o un texto que sirve para contextualizar el tema de la unidad. Todo esto con la finalidad de motivar y despertar la curiosidad de los estudiantes.

A partir de la situación o texto planteado y las imágenes de la ilustración se conecta al estudiante con el tema a tratar, a la vez que se vincula la realidad o cotidianidad con los temas que se van a desarrollar.

Todos los elementos que conforman la portada promueven la recuperación de experiencias o conocimientos previos y la motivación o el interés por los conocimientos que adquirirán en la unidad.

Trabajo colectivo de apertura

- **Punto de partida:** Guíe a sus estudiantes a leer y comentar en el grupo las informaciones expuestas en el apartado *Punto de partida*, relacionadas con la presencia de las formas geométricas en la arquitectura vernácula.
- **Recuperación de conocimientos:** Las preguntas de este apartado permiten hacer un diagnóstico de los conocimientos y las experiencias previas vinculados a la presencia de los cuerpos geométricos en las viviendas de la Edad Media.
- **Observación:** En este apartado se plantean preguntas relacionadas con las construcciones que observan en la ilustración.

OBSERVACIÓN

- ¿En cuáles lugares has visto edificaciones iguales o parecidas a las que se muestran en las ilustraciones?
- ¿De qué clase de materiales han sido construidas estas edificaciones?
- ¿Qué relaciones descubres entre la forma de las edificaciones y las características de su medio ambiente natural?
- ¿Por qué este tipo de edificación es calificado como amigable con su entorno natural?

Esquema conceptual de la unidad

Volumen de los cuerpos geométricos

que se calcula en los casos de:

- Cuerpos poliedros *que son* el cubo, el paralelepípedo, el prisma y las pirámides regulares.
- Cuerpos redondos *que son* el cilindro, el cono y la esfera.

en los que se identifican sus

Planos y ejes de simetría

Actividad de motivación

Pida a sus estudiantes que lean en la sección: *Conceptos y procedimientos*, los temas que trabajarán en la unidad y las actitudes y valores que estarán presentes en el desarrollo de la misma. Luego, para que interioricen la importancia de la utilidad de los cuerpos geométricos en la vida cotidiana, formúleles preguntas como las siguientes:

- *¿Qué relación existe entre las formas geométricas y las construcciones arquitectónicas?*
- *¿Qué formas geométricas se identifican en un edificio?*
- *¿Qué formas geométricas se pueden observar en un polideportivo?*

Actividad interactiva

Volumen de un cubo

El recurso es una interesante actividad interactiva de recuperación de experiencias previas, en la que determinarán el volumen de varias construcciones diseñadas con cubos de un centímetro de arista.

Actitudes y valores

Identidad

Aproveche la situación planteada en el apartado *Punto de partida* y en las imágenes de la ilustración para conversar con sus estudiantes acerca de la importancia de conservar la estructura de construcciones que forman parte de nuestra historia. Pregunte al grupo:

- *¿Qué importancia histórica tienen las edificaciones de la Zona Colonial?*

Indicadores de logro

- **Calcula** volúmenes del cubo, el paralelepípedo y la pirámide.
- **Establece** la relación entre los volúmenes de un prisma y de una pirámide de iguales base y altura.

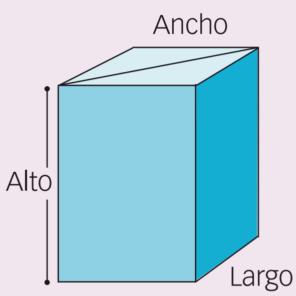
Actividad interactiva

Volumen de un ortoedro I

Esta actividad interactiva muestra diversos poliedros con sus dimensiones correspondientes, en cada caso, determinarán el volumen en sus cuadernos y, luego, seleccionarán la respuesta correcta.

Más información

Comente al grupo que el volumen de un cuerpo involucra tres dimensiones o longitudes: el ancho, el largo y la altura. Las fórmulas que se utilizan para determinar el volumen de un cuerpo depende de la forma del mismo. Los cuerpos geométricos son figuras tridimensionales o de tres dimensiones formadas por superficies planas o curvas.



RECUPERACIÓN

Responde.

- *¿Cómo son las unidades utilizadas para medir el volumen de un cuerpo?*
- *¿Cómo defines un centímetro cúbico?*

1 Volumen de un cuerpo

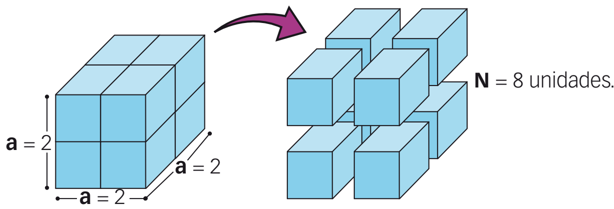
El volumen, **V**, es una medida de la cantidad de espacio ocupado por un cuerpo.

El procedimiento para medir el volumen de un cuerpo consiste en contar el número **N** de partes iguales o unidades en que pudiera ser descompuesto dicho cuerpo.

2 Volumen de un cubo

El cubo de la figura siguiente puede ser descompuesto en **N** = 8 partes iguales.

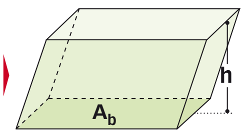
El volumen de un cubo de arista **a** se obtiene con: $\mathbf{V} = \mathbf{a}^3$.



3 Volumen de un paralelepípedo

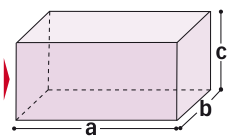
El volumen de un paralelepípedo se obtiene multiplicando el área de su base o área basal, $\mathbf{A_b}$, por su altura, **h**: $\mathbf{V} = \mathbf{A_b} \times \mathbf{h}$.

Paralelepípedo



Si las aristas de un paralelepípedo que convergen en un vértice forman tres ángulos rectos, el paralelepípedo es un ortoedro.

Ortoedro



El volumen de un ortoedro se determina con: $\mathbf{V} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} \times \mathbf{c}$.

Un cubo es un caso particular de ortoedro en el que las tres aristas que convergen en uno cualquiera de sus vértices tiene longitud **a**.

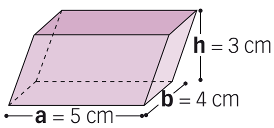
EJEMPLOS RESUELTOS:

- ¿Cuál es el volumen de un cubo cuya arista mide 5 cm?

  Aquí, **a** = 5 cm:

  $V = \mathbf{a}^3 = (5\text{ cm})^3 = 125\text{ cm}^3$.

- Determinar el volumen del paralelepípedo siguiente, si su base es un rectángulo.



  Aquí, **a** = 5 cm, **b** = 4 cm y **h** = 3 cm:

  $\mathbf{A_b} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = 5\text{ cm} \times 4\text{ cm} = 20\text{ cm}^2$.

  Entonces:

  $\mathbf{V} = \mathbf{A_b} \times \mathbf{h} = 20\text{ cm}^2 \times 3\text{ cm} = 60\text{ cm}^3$.

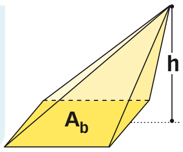
Sugerencias didácticas

- **Inicio:** Oriente a sus estudiantes para que lean y respondan las preguntas vinculadas a la recuperación de experiencias previas propuestas en el apartado *Recuperación*, relacionadas con las unidades utilizadas para medir volumen.
- **Desarrollo:** Pida a sus estudiantes que lean cuidadosamente el contenido de la doble página y que observen detenidamente las representaciones gráficas del cubo, el paralelepípedo y la pirámide y el desarrollo de los ejemplos resueltos con sus fórmulas correspondientes. Formúleles preguntas como, por ejemplo: *¿Cómo se obtiene el volumen del paralelepípedo?* Continúe con las preguntas.

4 Volumen de una pirámide

El volumen de una pirámide es una tercera parte del producto de la multiplicación de su área basal, $\mathbf{A_b}$, por su altura, **h**:

$$\mathbf{V} = (\mathbf{A_b} \times \mathbf{h}) \div 3.$$



EJEMPLO RESUELTO:

- Determinar el volumen de una pirámide cuya base es un cuadrado de lado $\ell = 15$ cm y de altura $\mathbf{h} = 18$ cm.

  El área basal de la pirámide es: $\mathbf{A_b} = l2 = (15\text{ cm})^2 = 225\text{ cm}^2$.

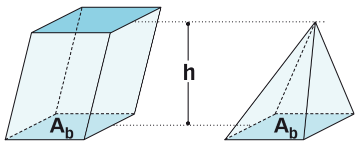
  El volumen buscado es:

  $\mathbf{V} = (\mathbf{A_b} \times \mathbf{h}) \div 3 = (225\text{ cm})^2 \times 18\text{ cm}) \div 3 = 1\,350\text{ cm})^3$.

5 Relación entre los volúmenes de un prisma y de una pirámide de igual base e igual altura

Observa el prisma y la pirámide, ambos de igual área basal, $\mathbf{A_b}$, e igual altura, **h**.

El volumen de un prisma es tres veces el volumen de una pirámide.



MÁS INFORMACIÓN

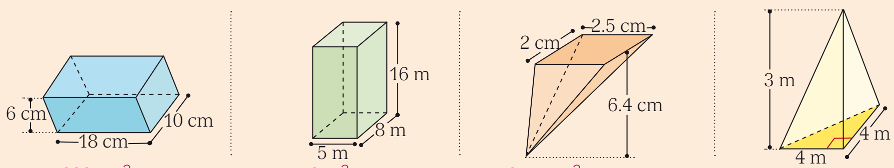
Paralelepípedos y prismas

Un paralelepípedo es un caso particular de prisma, con seis caras y cuya base es un paralelogramo.

Techo a cuatro aguas. Las pirámides son muy utilizadas por arquitectos y diseñadores.

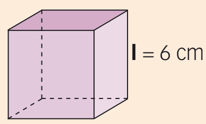
ACTIVIDADES

1 Calcula el volumen de cada uno de los poliedros siguientes.



1 080 cm³ — *640 m³* — *10.67 cm³* — *8 m³*

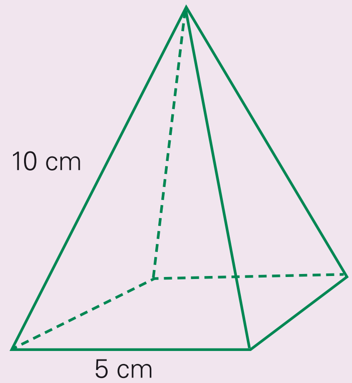
2 Escribe, en tu cuaderno, las dimensiones de tres ortoedros de volúmenes iguales al del cubo de la figura. NOTA: Las dimensiones son largo x ancho x alto.



Ejemplos: 4 cm x 6 cm x 9 cm, 8 cm x 3 cm x 9 cm, 27 cm x 4 cm x 2 cm.

Atención a la diversidad

Actividades de refuerzo: Pida a sus estudiantes que calculen el volumen de la siguiente pirámide:



Resp.: **V**= 83.33 cm^3.

Ficha 42.

Actividades de ampliación: Pida a sus estudiantes que calculen el volumen de la siguiente edificación:

Resp.: **V**= 297.5 m^3.

- **Desarrollo:** Muéstreles ejemplos de los conceptos desarrollados en la doble página. Pídales que lean y comenten el contenido del apartado *Más información*, que trata sobre los paralelepípedos y los prismas. Haga que presten atención a las imágenes de los techos de cuatro aguas, que son un ejemplo del uso de las pirámides en las construcciones arquitectónicas.
- **Cierre:** Motive a sus estudiantes a realizar los ejercicios del apartado *Actividades*. En la actividad 1, encerrarán el volumen de cada uno de los poliedros. En la actividad 2, escribirán, en sus cuadernos, las dimensiones de tres ortoedros de volúmenes iguales al del cubo de la figura.

Aprender a aprender

Pregunte a sus estudiantes:

- *¿Qué informaciones se requieren para calcular el volumen de un poliedro?*
- *¿Hubo alguna dificultad en el cálculo del volumen de los poliedros de la actividad 1?*
- *¿Podrían describirla?*

Indicadores de logro

- **Calcula** los volúmenes de prismas y pirámides regulares.
- **Calcula** el volumen de cuerpos compuestos por prismas y pirámides.

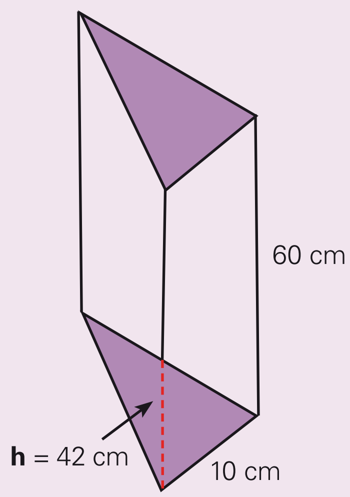
Actividad interactiva

Volúmenes de los poliedros

En esta actividad interactiva determinarán el volumen de los poliedros que se les describen y, después, arrastrarán con el ratón el volumen correspondiente a cada uno de los cuerpos geométricos descritos.

Más actividades

Haga que determinen el volumen del siguiente cuerpo:

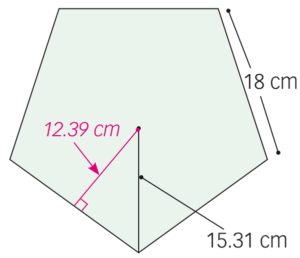


Resp.: 12 600 cm^3

RECUPERACIÓN

■ Responde.

- *¿Cuál es el área basal de una pirámide regular con una base pentagonal como la siguiente?*



MÁS INFORMACIÓN

Prismas y pirámides regulares

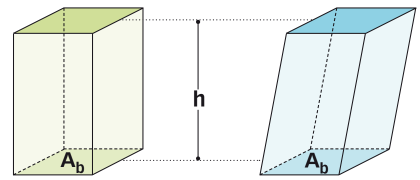
Un prisma y una pirámide rectos y cuyas bases sean polígonos regulares, se denominan prisma regular y pirámide regular.

Las caras laterales de un prisma regular son rectángulos congruentes.

Las caras laterales de una pirámide regular son todos triángulos isósceles congruentes.

1 Volumen de un prisma

El volumen de un prisma se obtiene, generalmente, multiplicando su área basal, $\mathbf{A_b}$, por su altura, **h**: $\mathbf{V} = \mathbf{A_b} \times \mathbf{h}$.



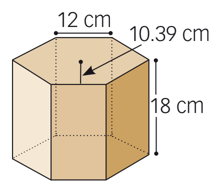
La expresión anterior es válida para prismas rectos y oblicuos.

Si las bases del prisma de altura **h** son polígonos regulares de **n** lados de longitud **l** y de apotema **a**, entonces su volumen se obtiene utilizando la expresión:

$$\mathbf{V} = (\mathbf{n} \times \mathbf{l} \times \mathbf{a} \times \mathbf{h}) \div 2.$$

Puesto que **n** x **l** es el perímetro, $\mathbf{P_n}$, de un polígono regular de **n** lados, entonces el volumen del prisma se puede escribir en términos de este perímetro: $\mathbf{V} = (\mathbf{P_n} \times \mathbf{a} \times \mathbf{h}) \div 2$.

EJEMPLO RESUELTO:



- Determinar el volumen del prisma recto de la derecha cuya base es un hexágono regular.

$\mathbf{V} = (\mathbf{n} \times \mathbf{l} \times \mathbf{a} \times \mathbf{h}) \div 2$

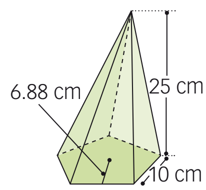
$= (6 \times 12\text{ cm} \times 10.39\text{ cm} \times 18\text{ cm}) \div 2 = 6\,732.72\text{ cm}^3$.

2 Volumen de una pirámide de base regular

Si la base de una pirámide de altura **h** es un polígono regular de **n** lados, su volumen se calcula con la expresión:

$$\mathbf{V} = (\mathbf{P_n} \times \mathbf{a} \times \mathbf{h}) \div 6.$$

EJEMPLO RESUELTO:



- Determinar el volumen de la pirámide de la derecha cuya base es un pentágono regular.

$\mathbf{V} = (\mathbf{n} \times \mathbf{l} \times \mathbf{a} \times \mathbf{h}) \div 6$

$= (5 \times 10\text{ cm} \times 6.88\text{ cm} \times 25\text{ cm}) \div 6 = 1\,433.33\text{ cm}^3$.

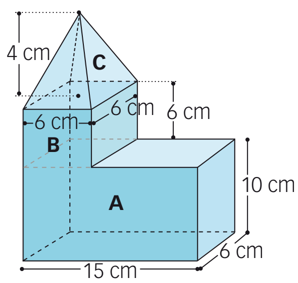
Sugerencias didácticas

- **Inicio:** Oriente a sus estudiantes para que lean y respondan en el aula la pregunta vinculada a la recuperación de experiencias previas propuesta en el apartado *Recuperación*, relacionada con el área basal de una pirámide regular de base pentagonal.
- **Desarrollo:** Pida a sus estudiantes que lean cuidadosamente el contenido de la doble página y que observen las representaciones gráficas de los prismas y las pirámides regulares y el desarrollo de los ejemplos resueltos. Haga que lean y comenten el contenido del apartado *Más información* sobre prismas y pirámides regulares.

3 Volumen de cuerpos compuestos

Un cuerpo compuesto está formado por poliedros distintos y su volumen es la suma de los volúmenes de los poliedros que lo componen. En el caso de cuerpos con entrantes o agujeros, los volúmenes de estos se restan al volumen del cuerpo completo.

Figura 1



EJEMPLOS RESUELTOS:

- ¿Qué volumen tiene el cuerpo compuesto de la figura 1?

  El volumen, **V**, del cuerpo de la figura 1 es la suma de los volúmenes de los cuerpos **A**, **B** y **C**.

  V(**A**) = 15 cm x 6 cm x 10 cm = 900 cm^3.

  V(**B**) = $(6\ cm)^3$ = 216 cm^3.

  V(**C**) = $[(6\ cm)^2 \times 4\ cm] \div 3$ = 48 cm^3.

  V = **V**(**A**) + **V**(**B**) **V**(**C**) = 1 164 cm^3.

- Determinar el volumen del cuerpo de la figura 2.

  El volumen, **V**, del cuerpo de la figura 2 se obtiene restando del volumen del cubo los volúmenes de las seis pirámides faltantes, que constituyen los entrantes:

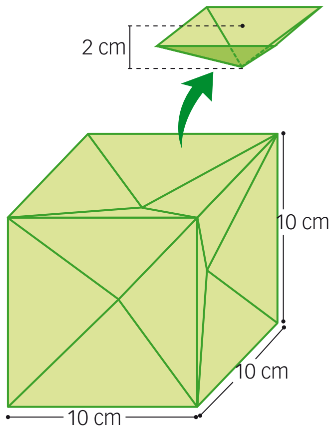
  $\mathbf{V} = \mathbf{V}_{cubo} - 6 \times \mathbf{V}_{pirámide}$.

  $\mathbf{V}_{cubo} = (10\ cm)^3 = 1\ 000\ cm^3$.

  $\mathbf{V}_{pirámide} = (10\ cm)^2 \times 2\ cm \div 3 = 66.67\ cm^3$.

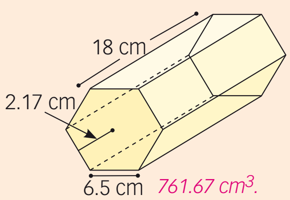
  $\mathbf{V} = \mathbf{V}_{cubo} - 6 \times \mathbf{V}_{pirámide} = 600\ cm^3$.

Figura 2

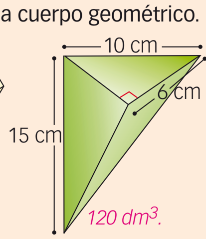


ACTIVIDADES

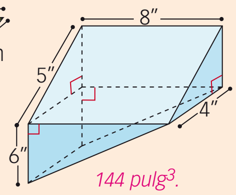
3 Calcula el volumen de cada cuerpo geométrico.



761.67 cm^3.



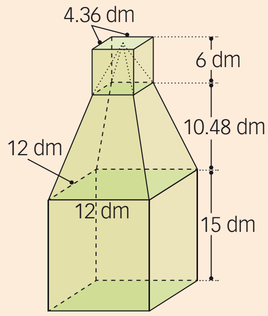
120 dm^3.



144 $pulg^3$.

4 Lee y, luego, haz lo que se te pide.

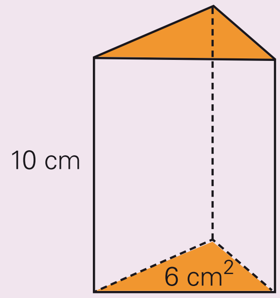
- A la derecha se muestra la réplica que hizo un arquitecto de una vivienda bárbara, como la que se muestra en la esquina superior derecha de la página 141. ¿Cuál es el volumen de la réplica? *3 027.08 dm^3.*



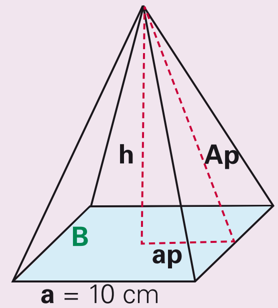
- **Desarrollo:** Explique a sus estudiantes, en la pizarra, los ejemplos resueltos y diseñe otros más sobre el cálculo de volumen de prismas rectos y pirámides y de figuras compuestas por los mismos.
- **Cierre:** Motive a sus estudiantes a realizar los ejercicios del apartado *Actividades*. En la actividad 3, calcularán el volumen de cada cuerpo geométrico. En la actividad 4, calcularán el volumen de una réplica de una vivienda bárbara realizada por un arquitecto. Ofrézcales las orientaciones que sean necesarias.

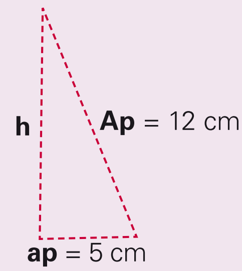
Atención a la diversidad

Actividades de refuerzo: Pida al grupo que determinen el volumen de los siguientes cuerpos:

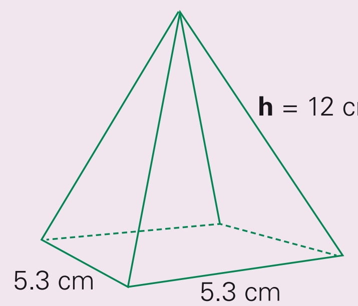


Resp.: **V** = 60 cm^3.





Resp.: **h** = 13 **V** = 433.33 cm^3.



Resp.: **V** = 112.36 cm^3.

Ficha 43.

Aprender a aprender

Pregunte a sus estudiantes:

- *¿Qué pasos dieron para resolver el ejercicio 4 de las Actividades? ¿Necesitaron alguna ayuda? ¿En qué consistió esta ayuda?*

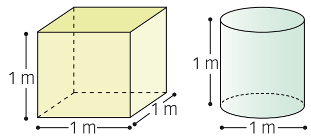
Indicadores de logro

- **Calcula** los volúmenes de cuerpos redondos.
- **Calcula** el volumen de cuerpos compuestos por cilindros, conos y esferas.

RECUPERACIÓN

■ **Piensa** y, luego, **responde**.

- *El prisma y el cilindro tienen iguales sus anchos y sus alturas. ¿Son iguales sus volúmenes? ¿Por qué?*



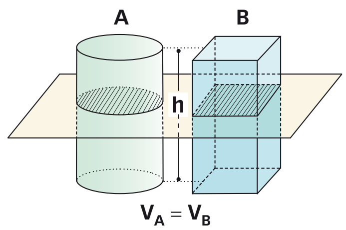
No son iguales, el área del prisma es mayor que el área del cilindro.

El área basal del prisma es de 1 m^2 y el área basal del cilindro de 0.785 m^2.

MÁS INFORMACIÓN

Principio de Cavalieri

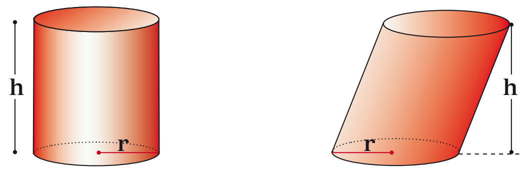
Si dos o más sólidos tienen la misma altura, y las distintas secciones que determina un plano paralelo a sus bases tienen la misma área, dichos sólidos tienen el mismo volumen.



1 Volumen del cilindro

El volumen de un cilindro se calcula multiplicando su área basal, $\mathbf{A_b}$, por su altura, **h**: $\mathbf{V} = \mathbf{A_b} \times \mathbf{h}$.

La expresión anterior es válida para cilindros rectos y oblicuos.



Si el radio de las bases del cilindro es **r** y su altura **h**, entonces su volumen se obtiene con la expresión: $\mathbf{V} = \pi \times \mathbf{r}^2 \times \mathbf{h}$.

EJEMPLO RESUELTO:

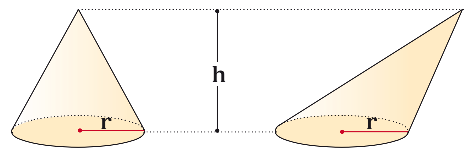
■ Un cilindro recto tiene un radio de $\sqrt{5}$ dm y una altura igual al doble de su radio. ¿Cuál es el volumen del cilindro?

$\mathbf{V} = \pi \times \mathbf{r}^2 \times \mathbf{h} = \pi \times (\sqrt{5}\text{ dm})^2 \times 2\sqrt{5}\text{ dm} = \pi \times 5\text{ cm}^2 \times 2\sqrt{5}\text{ dm}$

$= 3.14 \times 5\text{ dm}^2 \times 4.47\text{ dm} = 70.18\text{ dm}^3$.

2 Volumen del cono

El volumen de un cono es un tercio del producto de su área basal, $\mathbf{A_b}$, por su altura, **h**: $\mathbf{V} = (\mathbf{A_b} \times \mathbf{h}) \div 3$.



La expresión anterior es válida para conos rectos y oblicuos.

Si el radio de la base del cono es **r** y su altura **h**, entonces su volumen se obtiene con la expresión: $\mathbf{V} = (\pi \times \mathbf{r}^2 \times \mathbf{h}) \div 3$.

EJEMPLO RESUELTO:

■ Un cono oblicuo tiene un radio basal de 12.8 cm. ¿Cuál es su volumen, si su altura es de 15 cm?

$\mathbf{V} = (\pi \times \mathbf{r}^2 \times \mathbf{h}) \div 3 = \pi \times (12.8\text{ cm})^2 \times 15\text{ cm}$

$= 3.14 \times 163.84\text{ cm}^2 \times 15\text{ cm} = 7\,716.864\text{ cm}^3$.

Más información

Aclarar a los estudiantes que hay una propiedad que dice que el volumen del cilindro equivale a la suma de tres conos de igual base y altura, por lo tanto:

Volumen del cilindro = $\pi \times \mathbf{r}^2 \times \mathbf{h}$.

Volumen del cono = $(\pi \times \mathbf{r}^2 \times \mathbf{h}) \div 3$.

Explique al grupo que el volumen de una semiesfera es la mitad o ½ del volumen de la esfera, esto es: $\mathbf{V} = (4 \times \pi \times \mathbf{r}^3) \div 6$. Esto es a propósito del ejemplo resuelto del cuerpo compuesto en la página 147.

Además, recuerde a sus estudiantes que para determinar un factor desconocido, si se conoce el producto, se divide este producto por el factor conocido. Por ejemplo:

25 x (___) = 75, entonces, 75/25 = 3, el factor desconocido es 3.

Sugerencias didácticas

- **Inicio:** Oriente a sus estudiantes para que lean y resuelvan en el aula el problema de la recuperación de experiencias previas propuesto en el apartado *Recuperación*, relacionado con el volumen del prisma y del cilindro.
- **Desarrollo:** Haga que lean cuidadosamente el contenido de la doble página, que observen el desarrollo de los ejemplos resueltos, sus representaciones gráficas y las fórmulas correspondientes. Pregunte al grupo: *¿Qué datos requieren para determinar el volumen del cilindro?* Pídales que lean y comenten en el grupo el contenido del apartado *Más información,* relacionado con el principio de Cavalieri.

3 Volumen de la esfera

El volumen de una esfera de radio **r** se obtiene con la expresión: $\mathbf{V} = (4 \times \pi \times \mathbf{r}^3) \div 3$.

EJEMPLO RESUELTO:

- Calcular el volumen de una esfera de área 200.96 cm².

  A partir del área, **A**, de la esfera, se determina su radio:

  $4 \times \pi \times \mathbf{r}^2 = 200.96\ \text{cm}^2 \rightarrow 4 \times 3.14 \times \mathbf{r}^2 = 200.96\ \text{cm}^2$.

  $12.56 \times \mathbf{r}^2 = 200.96\ \text{cm}^2 \rightarrow \mathbf{r}^2 = 200.96\ \text{cm}^2 \div 12.56 = 16\ \text{cm}^2$.

  Puesto que $\mathbf{r}^2 = 16\ \text{cm}^2$, entonces: $\mathbf{r} = 4$ cm.

  El volumen de la esfera es: $\mathbf{V} = (4 \times \pi \times 4^3) \div 3 = 267.947\ \text{cm}^3$.

4 Volumen de cuerpos compuestos

EJEMPLO RESUELTO:

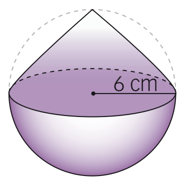
- Obtener el volumen, **V**, de un cuerpo compuesto por una semiesfera y un cono de radio basal y altura iguales al radio de la semiesfera.

  Puesto que $\mathbf{r} = 6$ cm:

  $\mathbf{V}_{\text{semiesfera}} = (4 \times \pi \times \mathbf{r}^3) \div 6 = (4 \times \pi \times 63) \div 6 = 452.16\ \text{cm}^3$.

  $\mathbf{V}_{\text{cono}} = (\pi \times \mathbf{r}^2 \times \mathbf{r}) \div 3 = (\pi \times 62 \times 6) \div 3 = 226.08\ \text{cm}^3$.

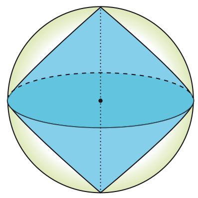
  $\mathbf{V} = \mathbf{V}_{\text{semiesfera}} + \mathbf{V}_{\text{cono}} = 678.24\ \text{cm}^3$.



INTELIGENCIA COLABORATIVA

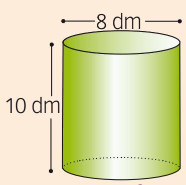
Relaciones de volumen de cuerpos

- **Observen** la figura siguiente y **descubran** un modo de probar que ambos conos ocupan la mitad del volumen de la esfera que los contiene. Una vez finalizada la actividad, **socialicen** sus resultados.

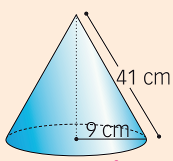


ACTIVIDADES

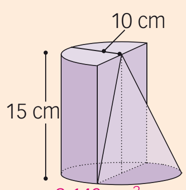
5 Obtén el volumen de los cuerpos siguientes



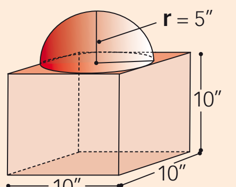
502.4 dm³



3 391.2 cm³



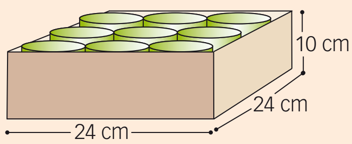
3 140 cm³



1 266.67 pulg³

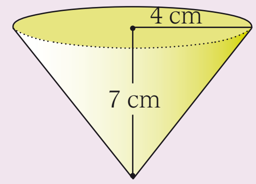
6 Resuelve el problema.

- Una fábrica de salsa de tomate usa latas cilíndricas de 10 cm de altura y 8 cm de diámetro. Si caben exactamente 3 filas de 3 latas en una caja, ¿qué porcentaje del volumen de la caja queda vacío?
  Queda vacío 21.5%.

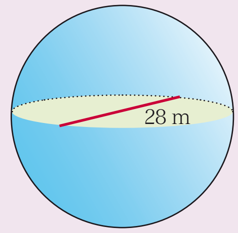


Actividad grupal

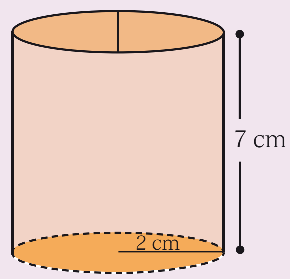
Actividades de refuerzo: Organice a sus estudiantes en grupos de 3 o 4 integrantes. Luego, pídales que calculen el volumen de los siguientes cuerpos redondos.



Resp.: $\mathbf{V} = 117.23\ \text{cm}^3$



Resp.: $\mathbf{V} = 56.61\ \text{m}^3$



Resp.: $\mathbf{V} = 87.92\ \text{cm}^3$

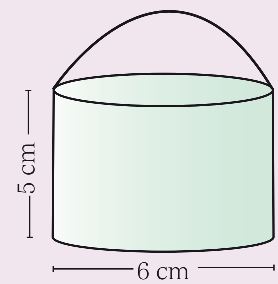
Ficha 44.

Actividades de ampliación: Haga que calculen el volumen de este cuerpo compuesto.

Resp.: Semiesfera = $\mathbf{V} = 56.52\ \text{cm}^3$

Cilindro = $\mathbf{V} = 141.3\ \text{cm}^3$

$\mathbf{VT} = 197.82\ \text{cm}^3$



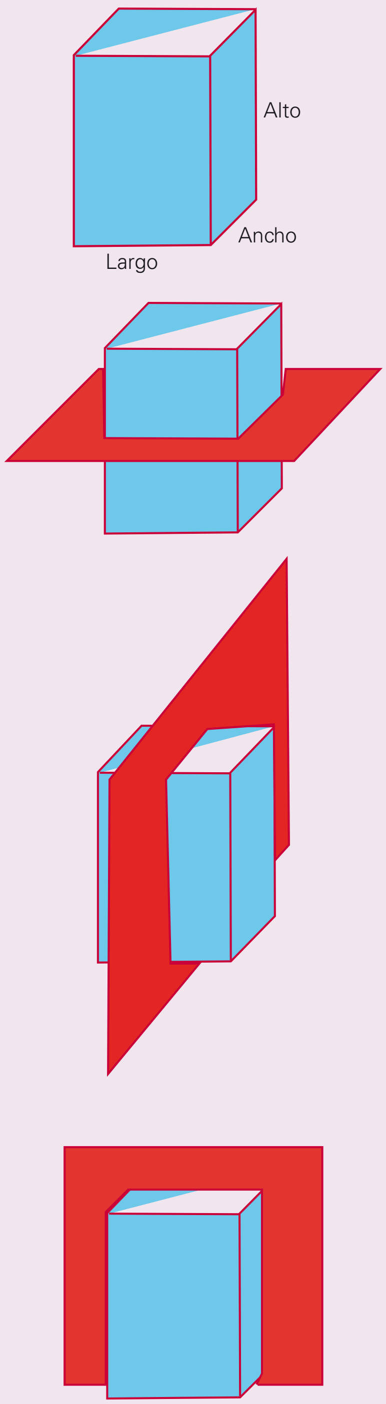
- **Desarrollo:** Muestre a sus estudiantes, en la pizarra, ejemplos diversos sobre el cálculo de volumen de cuerpos redondos y compuestos similares a los desarrollados en la doble página. Envíeles a la pizarra y motíveles para que describan los pasos a seguir en cada caso. Haga que reproduzcan los ejemplos en sus cuadernos con sus respectivos gráficos.
- **Cierre:** Motive a sus estudiantes a realizar los ejercicios del apartado *Actividades*. En la actividad 5, obtendrán el volumen de los cuerpos redondos representados. En la actividad 6, resolverán un problema vinculado a la vida cotidiana en el que determinarán el volumen de latas con forma cilíndrica.

Indicadores de logro

- **Identifica** planos de simetría.
- **Identifica** planos de simetría de poliedros y cuerpos redondos.

Más información

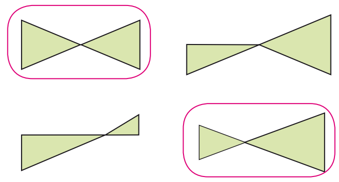
Para que tengan una idea más clara sobre los planos de simetría de los cuerpos geométricos, muestre a sus estudiantes la siguiente representación de los planos de simetría de un prisma recto.



RECUPERACIÓN

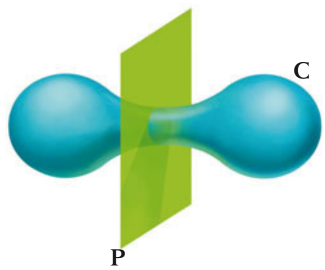
■ **Haz** lo que se te pide.

- *Identifica y, luego,* ***encierra*** *las figuras simétricas.*



1 Plano de simetría

El plano que divide a un cuerpo en dos partes iguales se denomina plano de simetría de dicho cuerpo.



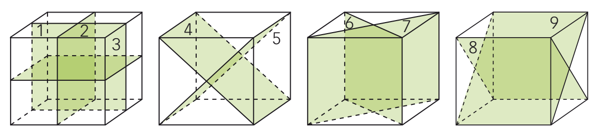
El plano, **P**, es un plano de simetría del cuerpo **C**. Lo divide en dos partes iguales en dirección derecha-izquierda.

El cuerpo de la figura de la izquierda tiene otros dos planos de simetría, uno que lo divide en dos partes iguales, en dirección arriba-abajo y otro, en otras dos partes iguales en dirección delante-detrás.

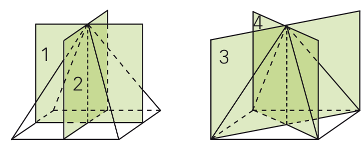
Fíjate en los ejemplos siguientes.

EJEMPLOS:

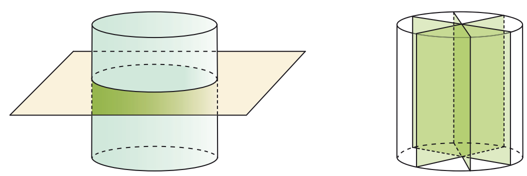
- El cubo tiene 9 planos de simetría: 3 que pasan por el punto medio de las aristas y son paralelos a dos caras opuestas y 6 que contienen a las diagonales de sus caras.

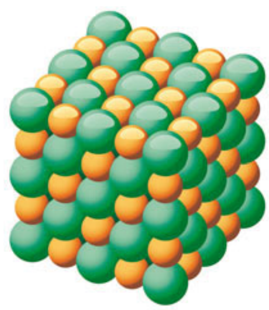


- Una pirámide regular de base cuadrada tiene 4 planos de simetría: 2 que pasan por los puntos medios de las aristas de su base y 2 que pasan por las diagonales de su base.



- Un cilindro tiene un plano horizontal de simetría e infinitos de planos de simetría que contienen a sus radios y su altura.





Estructura microscópica de la sal común. Los cristales de sal tienen 9 planos de simetría.

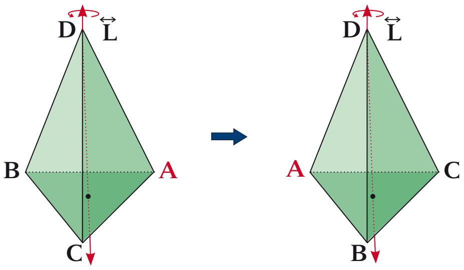
Sugerencias didácticas

- **Inicio:** Oriente a sus estudiantes para que lean y respondan en el aula la actividad vinculada a la recuperación de experiencias previas propuesta en el apartado *Recuperación*, relacionada con el concepto de figura simétrica.
- **Desarrollo:** Pídales que lean el contenido de la doble página, que observen los procedimientos aplicados en los ejemplos resueltos y las representaciones gráficas de los planos simétricos en los cuerpos geométricos. Motíveles para que observen la estructura microscópica de la sal común, la cual consta de 9 planos de simetría.

2 Ejes de simetría

Un eje de simetría es una línea recta tal que, al hacer girar un cuerpo geométrico alrededor de ella dicho cuerpo coincide consigo mismo.

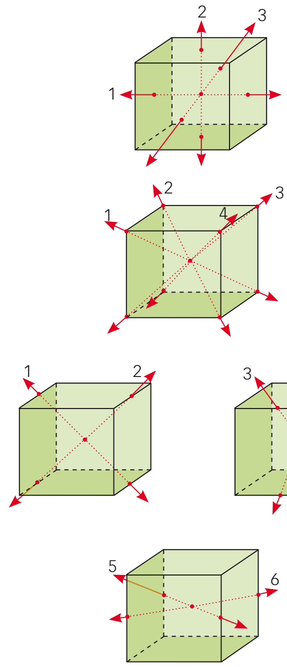
En la figura siguiente, la recta $\overleftrightarrow{L}$ es un eje de simetría de la pirámide regular de base triangular. **Fíjate** que, tras el giro, el vértice **A** se coloca en la posición en que originalmente estaba **B**; el vértice **B**, en la posición en que se hallaba **C** y el vértice **C**, en la posición original de **A**, pero el cuerpo no modifica ni su forma, ni su posición.



El cubo tiene los siguientes ejes de simetría:

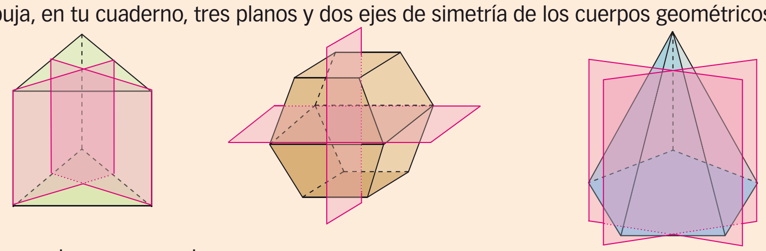
- 3 ejes que van del centro de una cara al centro de su opuesta.
- 4 ejes que van de un vértice a su opuesto.
- 6 ejes que van del punto medio de una arista al de la opuesta.

Ejes de simetría del cubo



ACTIVIDADES

7 Dibuja, en tu cuaderno, tres planos y dos ejes de simetría de los cuerpos geométricos siguientes.

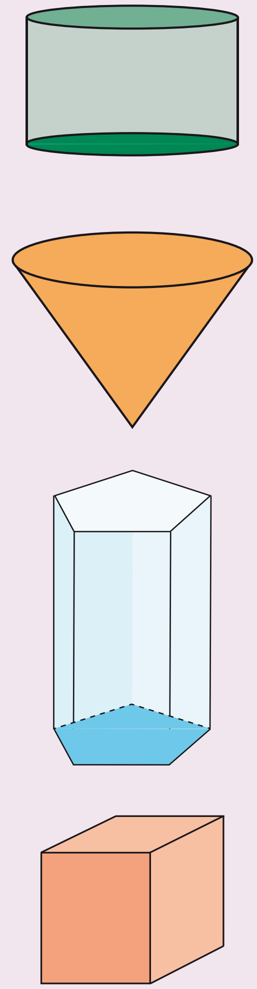


8 Piensa y, luego, responde.

- Si **N** es el número de lados del polígono de la base de un prisma regular, ¿el número de sus planos de simetría es **N** + 1? **Justifica** tu respuesta. *Sí. **N** planos verticales y un plano horizontal.*

Atención a la diversidad

Actividades de refuerzo: Pídales que tracen dos planos de simetría a cada uno de estos cuerpos geométricos.



Ficha 45.

- **Desarrollo:** Muestre a sus estudiantes el procedimiento para trazar los planos de simetría que se muestran en los ejemplos de esta doble página y otros ejemplos más. Haga que los desarrollen en sus cuadernos. Pídales que lean y comenten en el aula el contenido del apartado *Inteligencia colaborativa* que trata sobre las relaciones de volumen de los cuerpos.
- **Cierre:** Motive a sus estudiantes a realizar los ejercicios propuestos en el apartado *Actividades*. En la actividad 7, dibujarán, en sus cuadernos, tres planos y dos ejes de simetría de los cuerpos geométricos que se les indican. En la actividad 8, pensarán en el planteamiento sobre el polígono de la base de un prisma y sus planos de simetría, responderán la pregunta y, luego, justificarán sus respuestas.

Aprender a aprender

Pregunte a sus estudiantes:

- *¿Hubo algún aspecto de los temas desarrollados en esta doble página que les resultara difícil?*
- *¿Cuál? ¿Por qué?*

Competencias

- Comunicativa.
- Usa algoritmos.
- Resolución de problemas.

Indicadores de logro

- **Calcula** volúmenes del cubo, el paralelepípedo y la pirámide. **Establece** la relación entre los volúmenes de un prisma y de una pirámide de iguales base y altura. **Calcula** los volúmenes de prismas y pirámides regulares. **Calcula** el volumen de cuerpos compuestos por prismas y pirámides. **Calcula** los volúmenes de cuerpos redondos. **Calcula** el volumen de cuerpos compuestos por cilindros, conos y esferas. **Identifica** planos de simetría. **Identifica** planos de simetría de poliedros y cuerpos redondos. **Resuelve** problemas del contexto donde interviene el cálculo de volúmenes de cuerpos geométricos diversos.

Competencias fundamentales

Competencia comunicativa

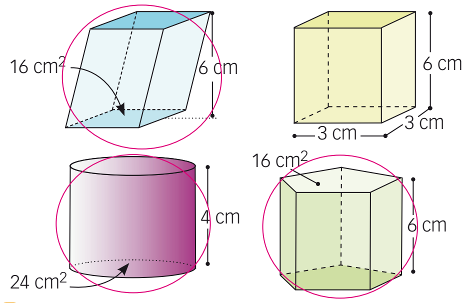
Es importante que los estudiantes adquieran las habilidades necesarias para identificar las fórmulas y los procedimientos para calcular el volumen de cuerpos poliedros y redondos y, al mismo tiempo, puedan desarrollar las competencias comunicativas que les permitan expresar el proceso de resolución de cada uno de los casos.

Usa algoritmo

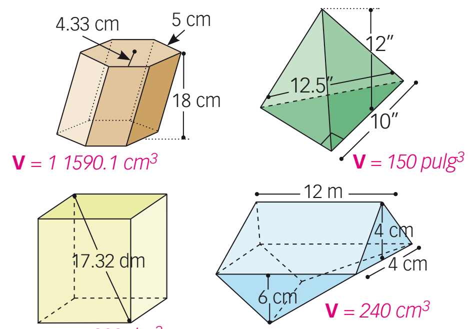
Las reglas y procedimientos en la resolución de operaciones aritméticas son vitales para la persecución de resultados correctos. Por ejemplo, en las operaciones que involucran el cálculo del volumen de los diversos poliedros y cuerpos redondos.

ACTIVIDADES

9 Rodea los cuerpos geométricos que tienen el mismo volumen.



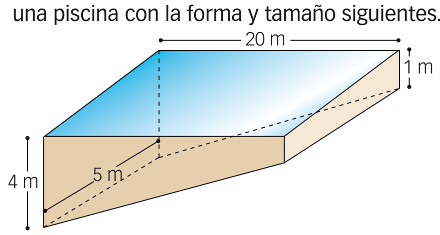
10 Obtén el volumen de los siguientes cuerpos geométricos.



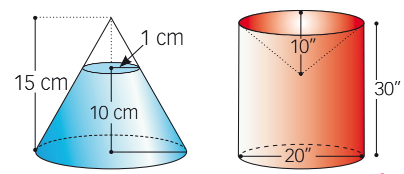
V = *1 1590.1 cm³* **V** = *150 pulg³*

V = *1 000 dm³* **V** = *240 cm³*

11 Calcula con cuántos kilolitros de agua se llena una piscina con la forma y tamaño siguientes.



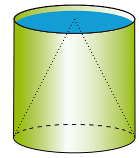
12 Calcula el volumen de los siguientes cuerpos redondos.



V = *921.07 cm³* **V** = *8 373.33 pulg³*

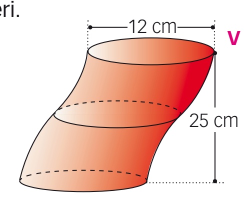
13 Resuelve el problema.

- Un cilindro de radio 15 cm y altura 20 cm está lleno de agua por completo. ¿Cuántos litros de agua no se derraman, si se introduce en el recipiente un cono de igual altura y radio?



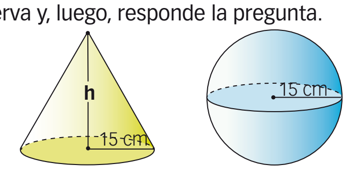
No se derraman 9.42 L.

14 Calcula el volumen del tubo usando el principio de Cavalieri.



V = *2 826 cm³*

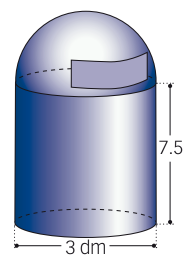
15 Observa y, luego, responde la pregunta.



- ¿Cuál debe ser la altura del cono para que su volumen sea igual al de la esfera?

h = *20 cm*

16 Calcula el volumen del zafacón.



V = *60.05 dm³*

17 Imagina una pirámide regular pentagonal y, luego, haz lo que se te pide.

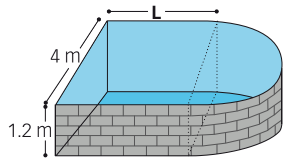
- **Responde**. ¿Cuántos planos de simetría tiene? *5 planos.*
- **Dibújala** en tu cuaderno y **traza** todos sus planos de simetría.
- **Analiza**: Si una pirámide recta tiene por base un polígono regular de **N** lados, ¿cuántos planos de simetría tiene? **N** *planos.*

Sugerencias didácticas

- Las actividades propuestas en esta página están estrechamente vinculadas a los conceptos y procedimientos desarrollados a lo largo de la unidad. Haga que lean cuidadosamente las instrucciones y, después, verifique las respuestas obtenidas.
- Es importante observar de cerca que los estudiantes siguen las instrucciones y aplican en forma correcta las fórmulas correspondientes para calcular el volumen de los poliedros y los cuerpos redondos.

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

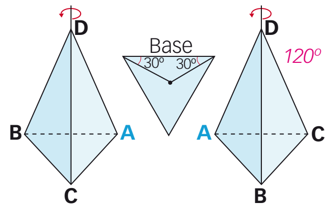
18 Analiza y resuelve el problema. Luego, comparte tu manera de resolverlo con tus compañeros de curso.



- En una finca se quiere construir un bebedero para ganado vacuno como el de la figura anterior. ¿Cuál deberá ser la longitud de **L** para que el bebedero tenga un volumen de 24 m^3?

$\mathbf{L}$ = 3.43 m

19 Observa las figuras y descubre mediante qué ángulo de rotación alrededor de un eje vertical, los vértices de la pirámide cambian de posición como se indica.

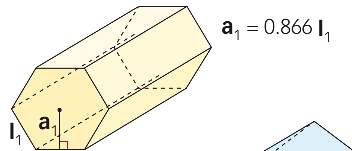


20 Lee y, luego, haz lo que se te pide.

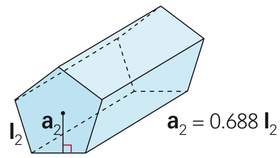
- En unas tablillas de piedra, un equipo de arqueólogos se encontró con el extraño modo de calcular el volumen de una esfera empleado por unos antiguos habitantes de Polinesia. Para este pueblo, el volumen de la esfera se obtiene con: **V** = (**A** ÷ 3) x **r**.
- **Averigua** si este modo de calcular el volumen de la esfera es correcto, tomado en cuenta que el área y el volumen de una esfera de radio **r** se consiguen, respectivamente, con **A** = 4 x π x $\mathbf{r}^2$ y **V** = (4 x π x $\mathbf{r}^3$) ÷ 3.
- **Muestra** en el curso el procedimiento que empleaste para tu investigación.

21 Piensa y pon en ejecución un plan para resolver el siguiente problema.

- Dos prismas regulares de igual altura, uno hexagonal y el otro pentagonal, tienen el mismo volumen. ¿Cuál es la razón $\mathbf{l}_1/\mathbf{l}_2$? NOTA: Las longitudes de las apotemas, **a**, se relacionan con las longitudes de las aristas basales, **l**, mediante las expresiones dadas abajo.

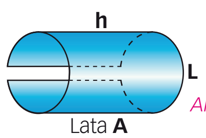


$\mathbf{l}_1 / \mathbf{l}_2 = 0.8$

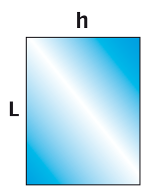


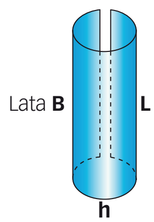
22 Resuelve el problema.

- Una empresa fabricante de latas las construye con hojas rectangulares de base **L** y de altura **h**. La empresa busca hacer una lata con el mayor volumen, ¿cómo se deberían enrollar las hojas rectangulares para conseguir un volumen mayor, a lo largo de **L** o de **h**?



*Alrededor de **h**.*





- **Comprueba** tu conclusión, dando valores a **L** y **h**, con **L** > **h**.

*La lata **A** tiene mayor volumen que la lata **B**.*

Competencias fundamentales

Resolución de problemas

- Las habilidades y destrezas adquiridas por los estudiantes son necesarias para identificar las alternativas más convenientes en la persecución de la solución de problemas que forman parte de su diario vivir. En este aspecto radica la importancia de que adquieran las destrezas necesarias en los aspectos relacionados con la utilización correcta de las fórmulas para determinar el volumen de cuerpos poliedros y redondos.

Criterios de evaluación

Competencia comunicativa:

- Adaptación de las representaciones gráficas, simbólicas y numéricas a la situación de comunicación.

Usa algoritmos:

- Seguimiento de las reglas, instrucciones y procedimientos.

Resolución de problemas:

- Adecuación de las estrategias y procedimientos al tipo de problema y al contexto.

Sugerencias didácticas

Resolución de problemas:

- Proponga a sus estudiantes que lean detenidamente las instrucciones de los problemas propuestos en las actividades 18, 19, 20, 21 y 22. Estos problemas son aplicaciones cotidianas del cálculo del volumen de cuerpos geométricos poliédricos y redondos. Acompañe a sus estudiantes en la realización de estas actividades y ofrézcales las orientaciones necesarias.

Aprender a aprender

Motive a sus estudiantes para que inventen ejemplos de las aplicaciones cotidianas de los conceptos desarrollados en la unidad. Por ejemplo, pregunte al grupo:

- *¿Qué importancia tiene calcular en forma correcta el volumen de una pieza de metal compuesta por un cubo y un cono?*

Discuta las diversas respuestas con el grupo.

Indicadores de logro de la evaluación

- **Calcula** volúmenes del cubo, el paralelepípedo y la pirámide. **Establece** la relación entre los volúmenes de un prisma y de una pirámide de iguales base y altura.
- **Calcula** los volúmenes de prismas y pirámides regulares. **Calcula** el volumen de diversos cuerpos compuestos por prismas y pirámides.
- **Calcula** los volúmenes de cuerpos redondos. **Calcula** el volumen de cuerpos compuestos por cilindros, conos y esferas.
- **Identifica** planos de simetría. **Identifica** planos de simetría de poliedros y cuerpos redondos.
- **Resuelve** problemas del contexto donde interviene el cálculo de volúmenes de cuerpos geométricos diversos.
- **Utiliza** recursos virtuales y electrónicos: computadora, softwares educativos, juegos interactivos y otros, en la búsqueda de información.

Competencias específicas

- Comunica.
- Razona y argumenta.
- Modela y representa.
- Conecta.
- Usa algoritmos.
- Resuelve problemas.

Aprender a aprender

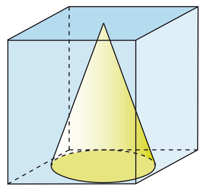
Plantear al grupo:

- Si se debe determinar el volumen que ocupará un adorno en plástico, formado por un prisma rectangular recto de base hexagonal y una semiesfera, *¿cuáles son los pasos que darían para calcular dicho volumen?*

EVALUACIÓN

Comunica

23 Escribe, en tu cuaderno, cómo se relacionan porcentualmente los volúmenes del prisma y del cono de la figura.



El volumen del cono es el 78.5 % del volumen del prisma.

$V_{cono} = \frac{\pi}{4} \cdot V_{prisma}$

Razona y argumenta

24 Piensa con detenimiento antes de responder las preguntas.

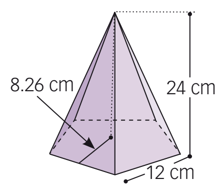
- Un prisma regular de base cuadrada tiene el doble de la altura que otro. ¿Cómo es el volumen del primero respecto al volumen del segundo? *El volumen es 2 veces mayor.*
- Un cilindro tiene el doble del radio que otro. ¿Cómo es el volumen del primero respecto al volumen del segundo? *El volumen es 4 veces mayor.*
- Un cilindro tiene el doble del radio y la cuarta parte de la altura que otro cilindro. ¿Cómo son su volúmenes? *Son Iguales.*

25 Calcula mentalmente.

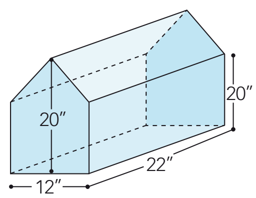
- ¿Cuántas bolas de 10 cm de diámetro caben en una caja cúbica cuyas aristas miden 1m? *En una arista de la caja pueden colocarse 100 cm/10 cm = 10 bolas. En la caja caben: 10 x 10 x 10 = 1 000 bolas.*

26 Obtén la longitud de la diagonal de un cubo con un volumen de 125 cm^3. *8.66 cm.*

27 Obtén el volumen de los cuerpos siguientes.



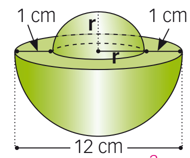
1 816 cm^3



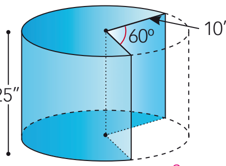
4 620 $pulg^3$

Modela y representa

28 Obtén el volumen de los siguientes cuerpos.



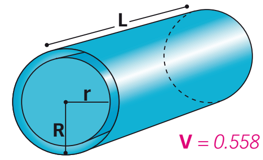
V = 713.83 cm^3



V = 6 541.67 $pulg^3$

29 Resuelve el problema.

- Un cilindro de radio **r** = 12. 32 cm está rodeado por otro cilindro hueco de radio **R** = 12.38 cm, que rodea al primero. Los cilindros tienen una longitud de 120 cm. ¿Cuántos litros de aceite caben en el espacio vacío entre los cilindros?

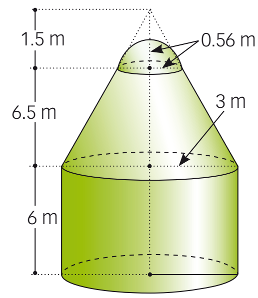


V = 0.558 L

Conecta

30 Resuelve el problema.

- El módulo de mando de una nave espacial tiene la forma y las dimensiones de la figura siguiente. ¿Cuál es su volumen? *V = 244.8 m^3*



- ¿El módulo tiene planos de simetría horizontales? *No.*

Resolución de problemas

31 Construye un problema acerca del volumen de un cuerpo que se resuelva mediante las operaciones: 64 m^2 x 6 m – 2 m x 2 m x 2 m.
***Ejemplo**: Un prisma tiene un área de 64 m^2. ¿Qué volumen tiene el cuerpo que resulta de extraer un cubo de 2 m de arista al prisma original?*

Sugerencias didácticas para la evaluación

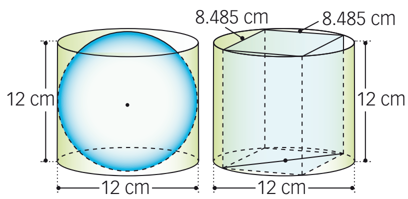
- Es importante verificar, antes de dar inicio a las actividades de evaluación, que sus estudiantes conocen las características de los cuerpos geométricos poliedros y redondos. Observar que utilizan correctamente las fórmulas para determinar el volumen de los mismos y, además, que pueden vincular estos conceptos a elementos propios del diario vivir.
- Si cuenta con tecnología como refuerzo, puede aplicar la prueba de la unidad que se encuentra en la plataforma didáctica Pleno.

32 **Debate**. Lean el texto y, luego, organizados en grupos, confronten las estrategias de resolución empleadas.

Un fabricante de quesos frescos dispone de envases plásticos cilíndricos de diámetro y altura de 12 cm para empacar sus quesos y quiere utilizar la menor cantidad de suero para conservarlos frescos.

Los quesos podrán tener forma de esfera o de prisma recto de base cuadrada. ¿Cuál deberá ser la forma de los quesos más conveniente para que, ocupando el mayor volumen posible del envase, el fabricante ahorre en la cantidad de suero? A la derecha se muestran las formas y dimensiones presentes en el problema. *Conviene la esfera, porque se necesitarían 452.16 cm^3 de suero frente a 492.53 cm^3 del prisma.*

- ¿Consideran que el resultado pudo haberse previsto observando las figuras?
- ¿Por qué respondieron del modo en que lo hicieron?
- ¿Para qué polígono como base del prisma se hubiera necesitado mayor cantidad de suero?



33 Piensa y, luego, responde.

- ¿Cómo cambian las formas de las viviendas atendiendo a las características climáticas?
- ¿Qué formas geométricas y materiales de construcción son más frecuentes en la vivienda tradicional dominicana?
- ¿Qué otras características de nuestras viviendas destacarías?

APRENDIZAJE AUTÓNOMO

34 Marca según tus logros

Marca según tus logros	Iniciado	En proceso	Logrado
• Calculo volúmenes de poliedros y cuerpos redondos.	▢	▢	▢
• Descubro relaciones entre volúmenes de diversos cuerpos.	▢	▢	▢
• Resuelvo problemas de volúmenes en contextos reales.	▢	▢	▢

35 Reflexiona sobre tu aprendizaje.

- ¿Cuáles de los temas tratados te parecieron más interesantes? ¿Por qué?
- ¿Consideras que necesitas reforzar algunos de los temas trabajados en la unidad? ¿Cuáles?

Sugerencias didácticas para la evaluación

- Pregunte a sus estudiantes:
  - — *¿Cómo se calcula el volumen de un cubo?*
  - — *¿Cómo se calcula el volumen de un prisma de base pentagonal?*
  - — *¿Cómo se calcula el volumen de un cono?*
  - — *¿Cuántos conos de igual base y altura equivalen a un cilindro?*
  - — *¿Cómo se calcula el volumen de una esfera?*

Debate

- En la actividad 32, *Debate*, leerán el texto y, luego, organizados en grupos, confrontarán las estrategias de resolución empleadas. En este caso, determinarán cuál debe ser la forma del queso más conveniente que utilizará el fabricante para que, ocupando el mayor volumen posible del envase, el fabricante ahorre en la cantidad de suero. Finalmente, responderán las preguntas y discutirán las respuestas.

Actitudes y valores

Identidad

En la sección destinada a *Actitudes y valores*, actividad 33, responderán cómo cambian las formas de las viviendas atendiendo a las características climáticas. Expresarán qué formas geométricas y materiales de construcción son más frecuentes en la vivienda tradicional dominicana. Por último, dirán qué otras características de nuestras viviendas destacarían.

Aprendizaje autónomo

- En el apartado *Aprendizaje autónomo*, actividad 34, evaluarán por ellos mismos si los conceptos y procedimientos que trabajaron en la unidad se encuentran en estado de iniciación, en proceso o logrados. En la actividad 35, reflexionarán sobre su proceso de aprendizaje.

Aprender a aprender

- Haga que sus estudiantes apliquen los conceptos aprendidos en la unidad en situaciones de la cotidianidad, por ejemplo, preguntar: *¿Cuáles son los pasos para trazar dos planos simétricos a un cubo que se usará en una decoración?*

9 Recolección y análisis de datos

COMPETENCIAS	CONTENIDOS

COMPETENCIAS

Específicas

- **Razona y argumenta**: **Identifica** los conceptos de población, muestra, datos y frecuencia. **Interpreta** y **juzga** la información representada en diferentes gráficos estadísticos.
- **Modelar y representar**: **Elabora** tablas y representaciones de datos de situaciones del contexto, utilizando diferentes organizadores gráficos estadísticos.
- **Usa algoritmo**: **Sigue** las reglas que le permiten obtener un resultado al resolver problemas que involucran datos estadísticos.
- **Conecta**: **Utiliza** el lenguaje estadístico y probabilístico para comunicar, representar y resolver problemas de otras áreas, del contexto y de la propia Matemática.
- **Comunica**: **Representa** datos en tablas y en diferentes gráficos estadísticos.
- **Utiliza herramientas tecnológicas**: **Utiliza** soportes tecnológicos como la Internet, la calculadora científica y otros dispositivos.

Fundamentales

Resolución de problemas: **Plantea** y **resuelve** problemas de interpretación de tablas y gráficos estadísticos.

Desarrollo personal y espiritual: **Reconoce** la importancia de las normas de convivencia social, la cortesía y la solidaridad.

CONTENIDOS

Conceptos

- Población y muestra.
- Gráficas de barras y poligonales.
- Agrupación de datos.
- Gráfica circular.
- Valores medios.
- Valores medios de datos agrupados.
- Análisis y organización de datos.

Procedimientos

- Reconocimiento de los conceptos básicos estadísticos.
- Construcción de gráficos de barra, poligonales y circulares.
- Construcción de tablas de frecuencias de datos agrupados.
- Cálculo de distintas medidas de tendencia central y medidas de dispersión.
- Determinación de la media aritmética de datos agrupados.

Actitudes y valores

- Valoración de las normas de convivencia social.
- Apreciación de la cortesía y la solidaridad.

Tiempo estimado de trabajo: 2 semanas

INDICADORES DE LOGRO

- **Identifica** los conceptos de población y muestra.
- **Identifica** el concepto de variable estadística y su clasificación.
- **Identifica** y **clasifica** la frecuencia de datos agrupados y **construye** tablas de frecuencias.
- **Construye** gráficas de barras y poligonales.
- **Identifica** datos registrados en gráficas de barras y poligonales.
- **Reúne** numerosas muestras en grupos o clases.
- **Construye** tablas de frecuencias de datos agrupados.
- **Construye** gráficas de datos agrupados.
- **Construye** e **interpreta** gráficos circulares.
- **Organiza** agrupaciones de datos en diagramas de tallos y hojas.
- **Determina** valores medios de un conjunto de datos: la media, la moda y la mediana.
- **Calcula** valores medios de datos agrupados.
- **Calcula** medidas de dispersión: el rango, el rango medio y la desviación media.
- **Resuelve** problemas del contexto donde aplica sus conocimientos estadísticos.
- **Utiliza** recursos virtuales y electrónicos.

Valor transversal: Convivencia

Recursos digitales

Plataforma digital

CD

BIBLIOTECA DEL DOCENTE

- DOCUMENTOS PARA LA PLANIFICACIÓN
- GUÍA DE RECURSOS TIC

CUADERNO DE ACTIVIDADES

UNIDAD 9	Recolección y análisis de datos

RECURSOS DE REFUERZO Y AMPLIACIÓN

LibroMedia

ACTIVIDADES INTERACTIVAS

PÁGINA 162	Gráfica circular
PÁGINA 164	Medidas de tendencia central
PÁGINA 168	Medidas de dispersión

CD DE RECURSOS DIGITALES: PLAN REGULAR

Pleno: PRUEBA DE EVALUACIÓN FORMATIVA DE LA UNIDAD

Estrategias pedagógicas

- Recuperación de experiencias previas.
- Trabajo en equipo.
- Aprendizajes basados en problemas (ABP).

Unidad 9

Competencias de la unidad

- **Lee** y **comenta** las informaciones expuestas en el apartado *Punto de partida*.
- **Responde** preguntas relacionadas con las informaciones expuestas en el apartado *Punto de partida*.
- **Recupera** experiencias vividas mediante la observación de las imágenes de la ilustración.
- **Responde** preguntas vinculadas a sus experiencias previas sobre los conceptos que desarrollarán en la unidad en el apartado *Recuperación de conocimientos*.
- **Responde** preguntas vinculadas a las aplicaciones cotidianas de los conceptos que desarrollarán en la unidad en el apartado *Observación*

Apertura de la unidad

Dentro de los objetivos principales de la apertura de esta unidad se encuentran el plantear una situación de aprendizaje, una problemática o un texto que sirve para contextualizar el tema de la unidad. Todo esto con la finalidad de motivar y despertar la curiosidad de los estudiantes.

A partir de la situación o texto planteado y las imágenes de la ilustración se conecta al estudiante con el tema a tratar, a la vez que se vincula la realidad o cotidianidad con los temas que se van a desarrollar.

Todos los elementos que conforman la portada promueven la recuperación de experiencias o conocimientos previos y la motivación o el interés por los conocimientos que adquirirán en la unidad.

9 Recolección y análisis de datos

Punto de partida

El desorden del tránsito vehicular es un problema asociado con el crecimiento poblacional y el desarrollo de grandes ciudades. Los tapones frecuentes y el caos en el desplazamiento de las distintas unidades del transporte son situaciones que impactan de manera negativa en ámbitos de la vida que van desde la economía hasta la salud de los ciudadanos. Un estudio del año 2016 determinó que el costo anual de los tapones y el caos vehicular ronda los 48 mil millones de pesos. Si a esto se agregan los problemas de contaminación, puede afirmarse que el ordenamiento del tránsito vehicular debe ser enfrentado con urgencia.

- ¿Qué inconvenientes ocasiona a la ciudadanía el desorden del tránsito?
- ¿Qué medidas, a tu juicio, podrían ser útiles y viables para enfrentar la problemática?
- ¿Qué ayuda ofrecen los estudios estadísticos sobre el tránsito vehicular?

Conceptos y procedimientos

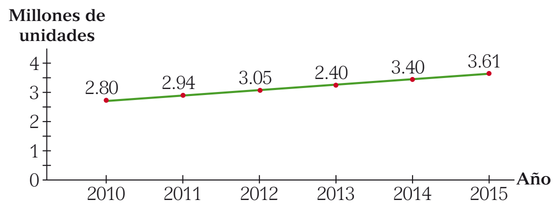
- Población y muestra.
- Gráficas de barras y poligonales.
- Agrupación de datos.
- Gráfica circular.
- Valores medios.
- Valores medios de datos agrupados.
- Análisis y organización de datos.

Actitudes y valores

- Valorar las normas de convivencia social.
- Apreciar la cortesía y la solidaridad.

RECUPERACIÓN DE CONOCIMIENTOS

- **Observa** la representación gráfica y, luego, **responde**.



- ¿Qué tipo de gráfica se muestra arriba?
- ¿Cómo interpretas la gráfica?

Trabajo colectivo de apertura

- **Punto de partida:** Guíe a sus estudiantes a leer y comentar en el grupo las informaciones expuestas en el apartado *Punto de partida*, relacionadas con el crecimiento poblacional y el desarrollo de las grandes ciudades.
- **Recuperación de conocimientos:** Las preguntas de este apartado permiten hacer un diagnóstico de los conocimientos y las experiencias previas vinculados a la interpretación de datos estadísticos.
- **Observación:** En este apartado se plantean preguntas relacionadas con las imágenes de la ilustración sobre el tránsito vehicular y la contaminación ambiental.

OBSERVACIÓN

- ¿Qué muestran las imágenes que se presentan en esta doble página?
- ¿Cuáles son las horas del día en que se producen los mayores entaponamientos del tránsito?
- ¿Por qué ocurren regularmente a esas horas?
- ¿Cómo impactan el desorden y el entaponamiento del tránsito en la salud de las personas y en la calidad del medio ambiente?

Actividad de motivación

Pida a sus estudiantes que lean en la sección *Conceptos y procedimientos* los temas que trabajarán en la unidad y las actitudes y valores que estarán presentes en el desarrollo de la misma. Luego, para que interioricen la importancia de conocer conceptos básicos estadísticos en la vida cotidiana, formúleles preguntas como las siguientes:

- ¿Cuáles son las informaciones que deben ser contabilizadas y organizadas? ¿Cuál es la importancia de organizar y registrar las informaciones o datos? ¿Qué es la frecuencia de un dato? ¿Para qué se utiliza la tabla de frecuencias? ¿Dónde se registran los datos ubicados en una tabla de frecuencias? ¿Qué es una gráfica de barras?

Actitudes y valores

Convivencia

Aprovechar la situación planteada en el apartado *Punto de partida* y en las imágenes de la ilustración para conversar con sus estudiantes acerca de la necesidad de que se respeten las leyes de tránsito y las normas de convivencia. Pregunte al grupo:

- *¿Creen que si los conductores cedieran más el paso a otros conductores disminuirían los entaponamientos y los accidentes de tránsito?*
- *¿Qué medidas creen que pudieran tomarse en contra de los conductores temerarios e irrespetuosos de las leyes?*

Esquema conceptual de la unidad

Recolección y análisis de datos

que se fundamenta en la identificación de:

Poblaciones y muestras — *con estos elementos se construyen:* — Variables estadísticas

- Tablas de frecuencias absoluta y relativa
- Gráficas de barras y poligonales
- Tablas de frecuencias de datos agrupados
- Gráficas circulares y diagramas de tallos y hojas

Con los datos se calculan:

- Medidas de tendencia central
- Valores medios de datos agrupados
- Medidas de dispersión

Indicadores de logro

- **Identifica** los conceptos de población y muestra.
- **Identifica** el concepto de variable estadística y su clasificación.
- **Identifica** y **clasifica** la frecuencia de datos agrupados y **construye** tablas de frecuencias.

Más información

Comente a sus estudiantes que la Estadística es una ciencia que se encarga de recolectar, agrupar, ordenar, clasificar y registrar una serie de datos o informaciones. Acláreles que el principal objetivo de la estadística es analizar comportamientos colectivos.

En una investigación estadística en la que se conoce la población a estudiar y se debe escoger una muestra de la misma, esta muestra debe ser una muy buena representación de toda la población, que sea una mínima representación de la misma, de esta manera los resultados estarán identificados con la totalidad del grupo y podrán aplicarse a toda la población.

Cuando se han obtenido todos los datos, estos se registran por cantidades y valores en una tabla de frecuencias. La frecuencia absoluta es el número de veces que se repite un dato.

Los datos registrados en la tabla de frecuencias se registran en gráficas estadísticas para una mejor interpretación de los mismos. Estas gráficas pueden ser: diagramas de barras, histogramas, poligonales, de sectores o circulares, pictogramas, etc.

POBLACIÓN Y MUESTRA

RECUPERACIÓN

- **Responde** la pregunta.
- *¿Qué importancia social y económica tiene la estadística, como conjunto de técnicas de recolección y organización de datos?*

Variables cuantitativas

Pueden ser:

Discretas	Continuas
Solo toman enteros.	Toman valores no enteros.
Ejemplos:	Ejemplos:
1, 3, 4, …	0.5, 0.8, 1.2, …

1 Población y muestra

Imagina que un organismo para la regulación del tránsito está interesado en diseñar un conjunto de medidas para agilizar la circulación de los vehículos en las llamadas horas pico, que son las de mayor flujo vehicular.

Para realizar su estudio, el organismo prepara un formulario de preguntas o encuesta acerca de las horas de salida y de regreso a sus casas de los conductores y usuarios del transporte.

Con las informaciones o datos obtenidos mediante la encuesta, el organismo puede dar inicio a una investigación estadística del tránsito.

En toda investigación estadística están presentes los elementos siguientes:

- Una población, que es un conjunto de personas o cosas formado por todos los elementos que interesan al estudio.
- Una muestra, que es una parte de la población que se estudia y que se toma como referencia para inferir características de la población.
- Cada uno de los elementos que forman parte de la población o de la muestra es un individuo o componente de ambos conjuntos.
- La totalidad del número de individuos o componentes de una muestra nos proporciona el tamaño de la misma.

2 Variables estadísticas

Una variable estadística es cualquier característica distintiva de una población de interés para una investigación estadística. Ninguna indagación estadística puede iniciarse sin que se identifiquen sus variables.

Las variables estadísticas se clasifican en:

- Cuantitativas, cuando admiten un valor numérico. La cantidad semanal de visitantes a los museos y el número de vehículos que transitan diariamente por determinadas avenidas son variables cuantitativas.
- Cualitativas, cuando expresan una cualidad del objeto de estudio. Las preferencias del público consumidor por determinados productos de limpieza y el estado civil de los empleados de una empresa son variables cualitativas.

Sugerencias didácticas

- **Inicio:** Oriente a sus estudiantes para que lean y respondan en el grupo la pregunta vinculada a la recuperación de experiencias previas propuesta en el apartado *Recuperación*, relacionada con la importancia social y económica de la Estadística.
- **Desarrollo:** Pida a sus estudiantes que lean cuidadosamente el contenido de la doble página, que observen el desarrollo de los ejemplos y la tabla de frecuencias absoluta y relativa. Haga que se fijen en el esquema que muestra la clasificación de las variables cuantitativas. Formúleles preguntas, como por ejemplo: *¿Qué es una población? ¿Qué es una muestra?*

3 Frecuencia de un dato estadístico

La estadística maneja dos clases de frecuencia:

- La frecuencia absoluta de un dato, **f**, es el número de veces que aparece dicho dato en una determinada muestra.
- La frecuencia relativa, $\mathbf{f_r}$, de un dato es igual a su frecuencia absoluta dividida por el número total de datos de la muestra, **N** (frecuencia total).

4 Tabla de frecuencias

En una tabla de frecuencias se escriben los datos de una muestra en una columna y a su lado, en otra columna, sus frecuencias correspondientes.

Una tabla de frecuencias presenta cómo se reparten o distribuyen los distintos valores de la variable en la muestra.

EJEMPLO:

- La siguiente es la tabla de frecuencias absolutas y relativas del ejemplo del dado.

Resultados	Frecuencia absoluta, f	Frecuencia relativa, f_r
1	2	0.2
2	3	0.3
3	2	0.2
4	1	0.1
5	1	0.1
6	1	0.1
Totales:	10	1

MÁS INFORMACIÓN

Frecuencia acumulada

La frecuencia acumulada de un dato, **F**, es la suma de la frecuencia de ese dato y las de todos los datos que le preceden en la tabla.

Ejemplo:

Datos	f	F
A	5	5
B	8	13
C	2	15
D	9	24
Total	24	

En la tabla se ve que:

F(**A**) = 5.

F(**B**) = 8 + 5 = 13.

F(**C**) = 2 + 8 + 5 = 15.

F(**D**) = 9 + 2 + 8 + 5 = 24.

La frecuencia acumulada del último dato de la tabla es la frecuencia total, **N** = 24.

ACTIVIDADES

1 Lanza 20 veces un dado y, luego, llena la tabla de frecuencias.

Resultados	1	2	3	4	5	6
Frecuencias absolutas						

2 Comprueba que la suma de las frecuencias relativas es la unidad.

- **Desarrollo:** Desarrolle en la pizarra los ejemplos propuestos y diseñe otros más, a fin de que los desarrollen en sus cuadernos. Pídales que lean y reproduzcan el contenido del apartado *Más información*, que trata sobre cómo se obtiene la frecuencia acumulada de un dato. Diseñe ejemplos de este concepto e invíteles a la pizarra.
- **Cierre:** Motive a sus estudiantes a realizar los ejercicios del apartado *Actividades*. En la actividad 1, lanzarán 20 veces un dado y, luego, llenarán la tabla de frecuencias absolutas. En la actividad 2, comprobarán que la suma de las frecuencias relativas es la unidad. Acompáñeles en el proceso de realización de todas las actividades.

Atención a la diversidad

Actividades de refuerzo: Pida a sus estudiantes que realicen un listado de las edades de todo el grupo y, luego, haga que:

- Las ordenen de menor a mayor.
- Las clasifiquen.
- Construyan la tabla de frecuencias absoluta y relativa.
- Construyan la tabla de frecuencia acumulada.

Ficha 46.

Actividades de ampliación: Solicite al grupo que elijan una muestra de los estudiantes de su aula o del centro y les pregunten acerca de sus preferencias por los siguientes deportes:

- Béisbol
- Baloncesto
- Ajedrez
- Ciclismo

Después, pídales que construyan la tabla de frecuencias absoluta, relativa y acumulada de los datos obtenidos.

Aprender a aprender

Pregunte al grupo:

- *¿Podrían explicar los procedimientos que siguieron para desarrollar el ejercicio 1 de las* Actividades*?*
- *Necesitaron alguna ayuda*
- *¿En qué consistió dicha ayuda?*

Indicadores de logro

- **Construye** gráficas de barras y poligonales.
- **Identifica** datos registrados en gráficas de barras y poligonales.

Más información

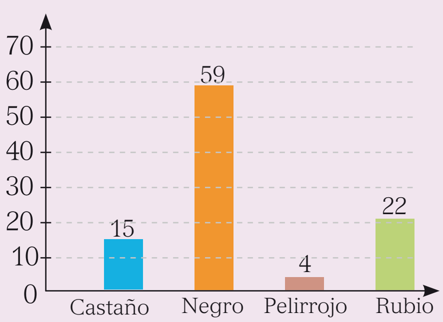
Los diagramas o gráficos de barras se utilizan para representar datos cuantitativos o cualitativos discretos, es decir, datos de valores enteros. Estos datos se representan sobre los ejes de coordenadas.

En el eje de las abscisas o las **x**, se colocan los valores de la variable y, en el eje de la ordenada o las **y**, se colocan las frecuencias absolutas, relativas o acumuladas.

En el gráfico de barras, la altura de dichas barras representa el valor de las frecuencias.

La gráfica poligonal se construye uniendo los extremos de las barras con segmentos de rectas o marcando los puntos que representan las frecuencias y uniendo dichos puntos con segmentos de rectas.

Distribución del color del pelo



RECUPERACIÓN

- Responde las preguntas.
- *¿Qué son los ejes cartesianos?*
- *¿Has utilizado en alguna ocasión ejes cartesianos?*
- *¿En qué los has utilizado?*

1 Gráfica de barras

Cuando las variables estadísticas son cualitativas o cuantitativas discretas, los datos de una muestra pueden ser representados mediante una gráfica de barras.

Una gráfica de barras se construye con:

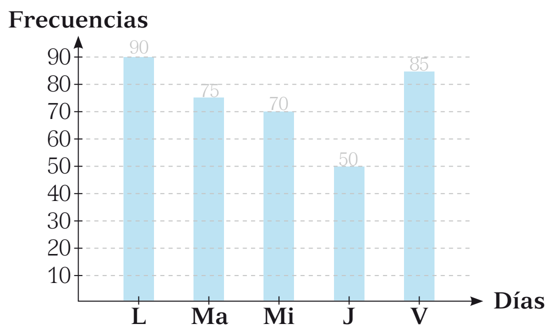
- Dos ejes cartesianos, en uno de los cuales, el horizontal, se colocan los valores de la variable y en el otro, el vertical, se colocan las frecuencias.
- Barras verticales que se levantan sobre los valores de la variable, que se hallan en el eje horizontal, y cuyas alturas proporcionan la frecuencia de cada uno de los datos.

EJEMPLO RESUELTO:

- Construir la gráfica de barras que corresponde a los datos de la tabla, que muestra el número de vehículos (en millares) que cruzó la intersección de dos avenidas del centro de la ciudad de Santiago de los Caballeros de lunes a viernes hace una semana.

Días	Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes
Millares de vehículos	90	75	70	50	85

La variable tiempo (días de la semana) se coloca en el eje horizontal y el número de vehículos (frecuencia), en el eje vertical.



En el eje vertical de una gráfica de barras pueden ser colocadas frecuencias relativas o porcentajes en vez de frecuencias absolutas.

Sugerencias didácticas

- **Inicio:** Oriente a sus estudiantes para que lean y respondan en el aula las preguntas vinculadas a la recuperación de experiencias previas propuestas en el apartado *Recuperación*, relacionadas con los ejes cartesianos. Motive al grupo a justificar sus respuestas.
- **Desarrollo:** Pida a sus estudiantes que lean cuidadosamente el contenido de la doble página, que observen el desarrollo de los ejemplos resueltos y las representaciones gráficas. Es necesario que lleven al aula su regla para que reproduzcan las tablas y los gráficos en sus cuadernos. Pregunte al grupo: *¿Cómo se representan los datos estadísticos en un gráfico de barras?*

3 Gráfica poligonal

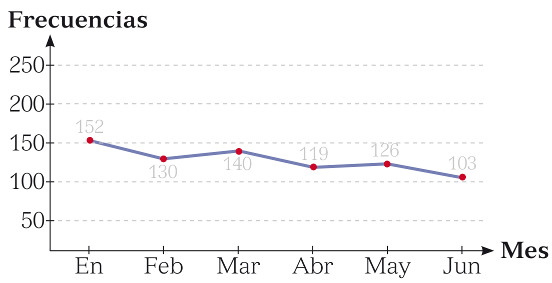
Para representar datos cualitativos o cuantitativos discretos, también se emplea una gráfica poligonal, que es el resultado de unir mediante segmentos los puntos del plano cartesiano (X_i, f_i), siendo X_i un valor de la variable estadística y f_i, su frecuencia.

EJEMPLO RESUELTO:

- Construir la gráfica poligonal correspondiente a la siguiente tabla de los accidentes de tránsito ocurridos en el primer semestre del año 2014.

Meses	Enero	Febrero	Marzo	Abril	Mayo	Junio
Número de accidentes	152	130	140	119	126	103

Los meses del año se colocan en el eje horizontal y las frecuencias en el eje vertical.



La gráfica resulta de unir los puntos (En, 152), (Feb, 130), etc., mediante segmentos.

ACTIVIDADES

3 Lee y, luego, haz lo que se te indica en cada caso.

- Construye la gráfica de barras del número de horas al día que dedica a la lectura un grupo de 20 estudiantes.

  1, 1.5, 1, 2, 0.75, 1, 1.5, 2, 1, 1, 1.5, 2, 2.5, 1.5, 2, 1.5, 1, 0.75, 2, 2.

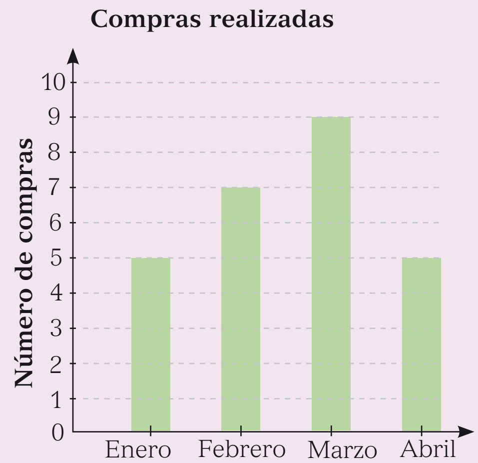
- Construye la gráfica poligonal de las edades de un grupo de 25 estudiantes.

  12, 12, 12, 11, 12, 13, 11, 12, 13, 13, 11, 12, 12, 12, 11, 13, 13, 13, 14, 11, 11, 12,13, 11, 14.

- **Desarrollo:** Organice actividades en el aula a fin de que los estudiantes obtengan, clasifiquen y cuenten los datos necesarios para construir las tablas de frecuencias y los gráficos de barras y poligonales. Por ejemplo: preferencias por los sabores de helados, programas de televisión, deportes o equipos deportivos, etc.
- **Cierre:** Motive a sus estudiantes a realizar los ejercicios del apartado *Actividades*. En la actividad 3, leerán las informaciones y, luego, construirán la gráfica de barras correspondiente al número de horas que dedican a la lectura un grupo de estudiantes. Construirán la gráfica poligonal de las edades de un grupo de 25 estudiantes.

Atención a la diversidad

Actividades de refuerzo: Pida al grupo que se fijen en la siguiente gráfica de barras y pregunte:



- *¿Qué datos representan las frecuencias en el gráfico?*

  Resp.: El número de compras.
- *¿En qué mes se obtuvo la mayor frecuencia absoluta?*

  Resp.: En el mes de mayo.
- *¿Cuál es el número total de datos de la muestra?*

  Resp.: La frecuencia total es 26.
- *¿Cuál es la frecuencia absoluta de las compras en el mes de febrero?*

  Resp.: La frecuencia absoluta es 7.
- *¿Cuál es la frecuencia relativa de las compras en el mes de marzo?*

  Resp.: La frecuencia relativa es 9/26.
- *¿Cuál es la frecuencia acumulada del mes de marzo?*

  Resp.: La frecuencia acumulada es 21.

Ficha 47.

Aprender a aprender

Pregunte a sus estudiantes:

- *¿Qué conocimientos previos recuerdan acerca de las gráficas de barras y las poligonales?*
- *¿Estos conocimientos hicieron más fácil el trabajo realizado en esta doble página?*

Indicadores de logro

- **Reúne** numerosas muestras en grupos o clases.
- **Construye** tablas de frecuencias de datos agrupados.
- **Construye** gráficas de datos agrupados.

Más información

La tabla de datos agrupados o distribución de frecuencias agrupadas se utiliza si las variables son continuas o adquieren un número grande de valores o datos.

Los datos o valores se agrupan en intervalos que tengan igual amplitud o clases.

A cada clase se le asigna su frecuencia correspondiente y está delimitada por el límite inferior y el superior de la misma.

La amplitud de la clase es la diferencia entre el límite superior y el inferior de la clase.

La marca de clase es el punto medio de cada intervalo y es el valor que representa a todo el intervalo.

RECUPERACIÓN

- **Completa** la tabla, sabiendo que la frecuencia de **C** es el doble de la frecuencia de **A**.

Datos	Frecuencia
A	6
B	4
C	12
Total	22

f(**B**) = 4; **f**(**C**) = 12.

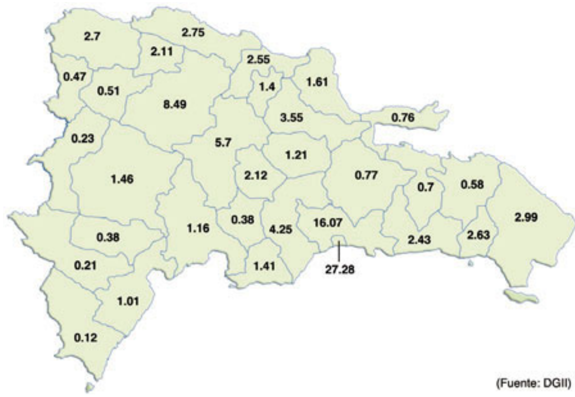
1 Agrupación de datos

Para trabajar con datos muestrales numerosos, estos pueden agruparse de forma práctica en grupos o clases.

Para agrupar datos, **primero**, se obtiene la diferencia entre los valores mayor, **X**, y menor, **x**, de la muestra; **luego**, esta diferencia, **X** – **x**, se divide por el número de grupos, **N**, que se quiera formar, para obtener la amplitud, **L**, del grupo y, **finalmente**, con la amplitud, **L**, se forman los distintos grupos.

EJEMPLO RESUELTO:

- Sobre cada provincia se muestra su cantidad de vehículos en forma de porcentaje del parque vehicular total del país. Agrupar estos datos porcentuales en **N** = 4 grupos.



El mayor de los datos es **X** = 26.19 y el menor, **x** = 0.12, entonces la amplitud **L** es: (26.19 – 0.12) ÷ 4 ≈ 6.52.

Los grupos se forman como sigue:

[0.12, 0.12 + 6.52[= [0.12, 6.64[(Grupo 1)

[6.64, 6.64 + 6.52[= [6.64, 13.16[(Grupo 2)

[13.16, 13.16 + 6.52[= [13.16, 19.68[(Grupo 3)

[19.68, 19.68 + 6.52[= [6.64, 26.20 (Grupo 4)

La frecuencia de un grupo es el número de datos que contiene: **f** (1) = 29 ; **f** (2) = 1 ; **f** (3) = 1 ; **f** (4) = 1.

Sugerencias didácticas

- **Inicio:** Oriente a sus estudiantes para que realicen en el aula la actividad de recuperación de experiencias previas propuesta en el apartado *Recuperación*, en la que completarán una tabla de frecuencias.
- **Desarrollo:** Haga que lean cuidadosamente el contenido de la doble página y que observen el desarrollo de los ejemplos resueltos. Pídales que reproduzcan los ejemplos en sus cuadernos y construyan la tabla y el histograma del punto número 2. Pregunte a sus estudiantes: *¿De qué depende el número de grupos a formar de una muestra?*

2 Tabla de frecuencias de datos agrupados

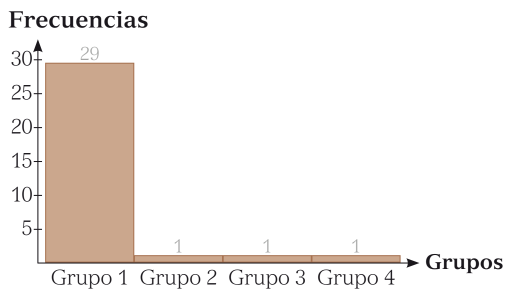
El grupo [0.12, 6.64[del ejemplo anterior incluye 29 datos de la muestra y los demás grupos solo incluyen un dato cada uno. La tabla de datos agrupados es la siguiente:

Grupo	Frecuencia
[0.12, 6.64[	29
[6.64, 13.16[	1
[13.16, 19.68[	1
[19.68, 26.20]	1
Total	32

3 Gráfica de datos agrupados: histograma

El histograma es una gráfica de datos agrupados.

En un histograma los grupos se colocan en el eje horizontal y, sobre ellos, se construye un rectángulo de altura igual a la frecuencia de cada uno. Fíjate en el ejemplo.



ACTIVIDADES

4 Une el dato muestral y el grupo al que pertenece.

Datos ▶ 0.76 4.80 15 78.2 8.00

Grupos ▶ [4.08, 5.2[[14, 16.8] [5.7, 8.00] [65, 78.2[[0.75, 2.42[

5 Haz lo que se te pide.

- Reúne en 6 grupos los datos muestrales del ejemplo de la página 160 y, luego, construye el histograma correspondiente. Comenta en el grupo lo que has observado.

Atención a la diversidad

Actividades de refuerzo: Organice a sus estudiantes en grupos de 3 o 4 integrantes. Luego, escriba en la pizarra las temperaturas registradas en una provincia de nuestro país durante el mes de agosto:

- 33, 34, 28, 29, 33, 32, 31, 30, 31, 31, 27, 28, 29, 30, 32, 31, 31, 30, 30, 29, 29, 30, 30, 31, 30, 31, 34, 33, 33, 29, 29.
- Pídales que construyan la tabla de datos agrupados para 5 grupos, siguiendo los pasos que se les indicaron en la doble página.
- Después, haga que construyan la gráfica de datos agrupados o histograma, siguiendo el procedimiento mostrado en el desarrollo del ejemplo resuelto.
- Al concluir con el proceso de trabajo, pida a un representante de cada grupo que explique los pasos que siguieron en el desarrollo de la actividad y, finalmente, verifique los resultados en el grupo.

Ficha 48.

- **Desarrollo:** Muestre a sus estudiantes, con ejemplos prácticos, cómo se construyen las tablas de frecuencias de datos agrupados. Explíqueles, con ejemplos diversos en la pizarra y motíveles para que resuelvan ejercicios similares. Haga que comenten en el grupo la información que presenta la joven de la página 161.
- **Cierre:** Motive a sus estudiantes a realizar los ejercicios del apartado *Actividades*. En la actividad 4, unirán el dato muestral con el grupo al que pertenece. En la actividad 5, reunirán 6 grupos con los datos muestrales del ejemplo resuelto de la página 160 y, luego, construirán el histograma correspondiente. Después, comentarán en el grupo lo que han observado.

Aprender a aprender

Pregunte al grupo:

- *¿Tuvieron alguna dificultad que superar al trabajar con los datos agrupados?*
- *¿Qué pasos dieron para resolver el problema?*

Indicadores de logro

- **Construye** e **interpreta** gráficas circulares.
- **Organiza** agrupaciones de datos en diagramas de tallos y hojas.

Actividad interactiva

Gráfica circular

En esta actividad interactiva se les presentan informaciones registradas en un gráfico circular, observarán el gráfico, completarán la tabla de frecuencias y responderán preguntas relacionadas con los datos del gráfico.

Más información

En el diagrama de tallos y hojas se combinan dos procedimientos: graficar y ordenar los datos numéricos.

Los datos se dividen en tallos y hojas. El tallo representa el primer o los primeros dígitos de la cantidad correspondiente. Por ejemplo: en el valor 25, el tallo es 2 y la hojas 5.

Para confirmar que comprenden este procedimiento, pregunte al grupo:

- *¿Cuáles serían el tallo y las hojas en el dato 64?*

  Resp.: El tallo 6 y las hojas 4.

- *¿Cuáles serían el tallo y las hojas en el dato 35?*

  Resp.: El tallo 3 y las hojas 5.

RECUPERACIÓN

- **Construye** los ángulos con las medidas siguientes usando un transportador.

  12º *30º* *50º*
  75º *110º* *178º*

- *¿Puedes construir ángulos que midan más de 180º?*
- *¿Qué harías para construirlos?*
- **Construye** los ángulos con las medidas siguientes usando un transportador.

  185º *200º* *225º*

1 Gráfica circular

Una gráfica circular, de sectores o de pastel se utilizan para representar datos expresados en forma de porcentajes. Estas gráficas son muy frecuentes en periódicos, revistas y publicaciones especializadas.

Para construir una gráfica circular, se multiplican las frecuencias relativas de cada dato por 360º. El resultado es un ángulo central que representa a la frecuencia del dato.

A mayor frecuencia de un dato, mayor es el ángulo central que le corresponde en la gráfica circular. La frecuencia total está representada por el círculo completo, 360º.

EJEMPLO RESUELTO:

- En el 2015 el parque vehicular del país era de 3 612 964 vehículos y estaba distribuido de la manera siguiente: 54% de motores; 11% de carga; 24% de carros y autobuses; 10% de jeeps y 1% de otros. Construir la gráfica circular correspondiente a los datos anteriores.

  Los ángulos de cada sector circular se obtienen:

  54% de 360º = 0.54 x 360º = 194.4º ≈ 194º.

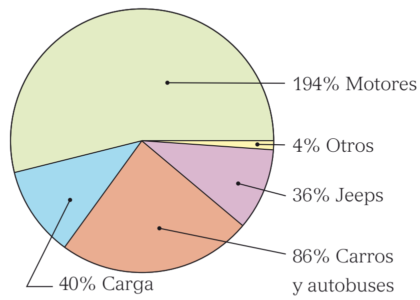
  11% de 360º = 0.11 x 360º = 39.6º ≈ 40º.

  24% de 360º = 0.24 x 360º = 86.4º ≈ 86º.

  10% de 360º = 0.10 x 360º = 36º.

  1% de 360º = 0.01 x 360º = 3.6º ≈ 4º.

  La gráfica circular correspondiente a los datos del ejemplo es la siguiente:



Observa que: 194º + 40º + 86º + 36º + 4º = 360º.

Sugerencias didácticas

- **Inicio:** Oriente a sus estudiantes para que lean y respondan en el aula las actividades vinculadas a la recuperación de experiencias previas propuestas en el apartado *Recuperación*, relacionadas con los ángulos y sus medidas.
- **Desarrollo:** Pídales que lean el contenido de la doble página, que observen los procedimientos aplicados en los ejemplos resueltos y las ilustraciones. Formúleles preguntas vinculadas al contenido como, por ejemplo: *¿Para qué se utilizan las gráficas circulares? ¿Cuál es el primer paso para construir una gráfica circular?* Continúe con las preguntas.

3 Diagrama de tallos y hojas

Otra forma de organizar los datos de una muestra es mediante los diagramas de tallos y hojas, que tienen la ventaja de mostrar los datos numéricos y, al propio tiempo, su distribución de frecuencias y una representación gráfica.

EJEMPLO RESUELTO:

- Construir el diagrama de tallos y hojas de las siguiente edades de 30 personas: 12, 18, 26, 19, 32, 33, 9, 19, 27, 23, 45, 48, 35, 27, 40, 7, 16, 29, 38, 45, 51, 46, 22, 31, 54, 63, 47, 22, 55, 68.

  Se toman las primeras cifras de la izquierda como los tallos. En los casos de las edades de 9 y 7 años, los tallos se toman como 0 y las cifras de la derecha como las hojas y se construye el siguiente diagrama:

Tallos	Hojas
0	7 9
1	2 6 8 9 9
2	2 2 3 6 7 7 9
3	1 2 3 5 8
4	0 5 5 6 7 8
5	1 4 5
6	3 8

  Desde el diagrama, se puede determinar la frecuencia de los datos con tallos 0, 1, 2, 3, 4, 5 y 6:

  $\mathbf{f}(0) = 2$; $\mathbf{f}(1) = 5$; $\mathbf{f}(2) = 7$; $\mathbf{f}(3) = 5$; $\mathbf{f}(4) = 6$; $\mathbf{f}(5) = 3$; $\mathbf{f}(6) = 2$.

  La suma de estas frecuencias es 30.

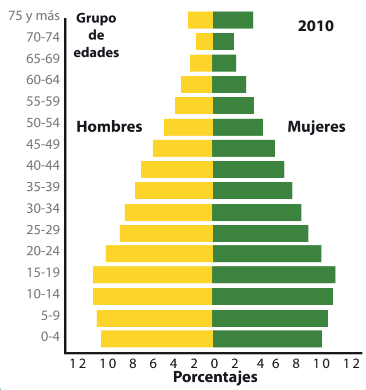
MÁS INFORMACIÓN

Pirámides de población

Están constituidas por dos histogramas organizados a ambos lados de una línea central.

Representan los porcentajes de individuos de ambos sexos organizados en grupos de edad.

- **Observa** una pirámide de nuestra población del censo del año 2010.



ACTIVIDADES

6 Lee y, luego, construye la gráfica circular de los datos.

- Un estudio hecho por la empresa de investigación de mercado *Nielsen IBOPE*, sobre teleaudiencia en nuestro país de enero a agosto del año 2016, arrojó como resultado que un 57% de los usuarios de la televisión son mujeres y un 43%, hombres.

7 Construye el diagrama de tallos y hojas correspondiente a las estaturas (en cm) de un grupo de 30 estudiantes.

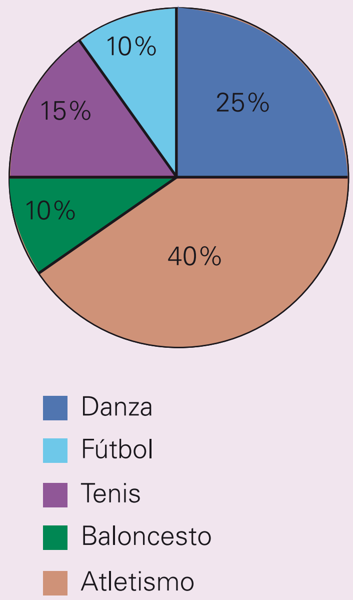
- 133, 132, 131, 140, 129, 133, 141, 143, 140, 133, 132, 133, 128, 140, 128, 131, 132, 141, 138, 137, 131, 142, 129, 130, 135, 141, 141, 130, 132, 141.

Atención a la diversidad

Actividades de refuerzo: Motive a sus estudiantes para que escriban en sus cuadernos los datos correspondientes a las ventas de calzados en una tienda durante el período de un mes.

- 23, 54, 18, 29, 33, 55, 44, 50, 41, 36, 17, 28, 29, 30, 32, 62, 16, 30, 40, 19, 29, 42, 20, 31, 43, 60, 34, 53, 63, 19, 29.
- Pídales que construyan el diagrama de tallos y hojas de estos datos.
- Motive al grupo para que determinen el ángulo central que represente a la frecuencia de cada porcentaje.

Deportes practicados



Ficha 49.

- **Desarrollo:** Muestre a sus estudiantes el proceso de construcción de la gráfica circular o de sectores y el diagrama de tallos y hojas. Desarrolle estos y otros ejemplos más en la pizarra. Proponga al grupo que lean y discutan el contenido del apartado *Más información*, que trata sobre las pirámides de población. Haga que presten atención a la pirámide de nuestra población del censo del año 2010.
- **Cierre:** Motive a sus estudiantes a realizar los ejercicios propuestos en el apartado *Actividades*. En la actividad 6, construirán la gráfica circular de los datos de una empresa de investigación de mercado. En la actividad 8, construirán el diagrama de tallos y hojas correspondiente a las estaturas de un grupo de 30 estudiantes.

Aprender a aprender

Pregunte al grupo:

- *¿Qué tipo de información se registra con más frecuencia en las gráficas circulares?*
- *¿Podrían dar un ejemplo?*

Indicadores de logro

- **Determina** valores medios de un conjunto de datos: la media, la moda y la mediana.

Actividad interactiva

Medidas de tendencia central

En esta actividad interactiva se les presentan datos relacionados con las distancias recorridas por un ciclista. En este caso, determinarán la media, la moda, la mediana y el rango de las diversas distancias.

Previsión de dificultades

Antes de dar inicio al desarrollo de los conceptos, es conveniente aclarar a los estudiantes que las medidas de tendencia central sirven como referencia para comparar o interpretar un valor o puntaje con relación a otro valor central.

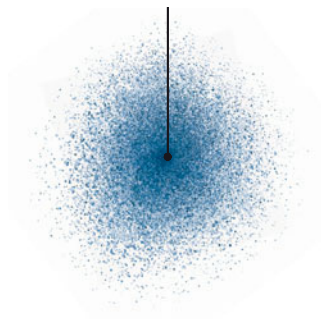
Por ejemplo:

- Si el promedio para promover un curso es 80 puntos, las calificaciones por debajo o por encima de 80 dan la referencia de si el estudiante ha aprobado o no el curso.
- Si la temperatura del cuerpo humano es 37°, los valores por debajo o por encima a 37° indican que hay un problema de salud.

RECUPERACIÓN

- Responde las preguntas.
- *¿Qué significado tienen para ti las expresiones siguientes?*
- *La temperatura promedio de una región es de 29 ºC.*
- *La estatura promedio es de 1.75 metros.*
- *La edad promedio de ingreso a la universidad es de 17 años.*

Valores medios.



1 Medidas de tendencia central

Los medidas de tendencia central o valores medios son valores en torno a los que se ubican los datos de una muestra.

Si imaginamos los datos de una muestra como una nube, los valores medios se ubican en el centro de dicha nube.

Los valores medios de una muestra de datos son la media aritmética o promedio, la moda y la mediana.

2 Media aritmética, $\bar{x}$

La media aritmética, $\bar{\mathbf{x}}$, de un conjunto datos, es el resultado de dividir su suma por el número de dichos datos, $\mathbf{n}$.

Si $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, $\mathbf{x}_3$, … …, $\mathbf{x}_n$ son los $\mathbf{n}$ datos de una muestra, su media aritmética, $\bar{\mathbf{x}}$, se calcula con:

$$\bar{\mathbf{x}} = (\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3 + \ldots \ldots + \mathbf{x}_n) \div \mathbf{n}.$$

EJEMPLO RESUELTO:

- Cuestionado un grupo de 8 personas acerca de cuántas horas al día permanecen frente al televisor, respondió como sigue: 1.5, 2.0, 2.0, 2.0, 2.5, 2.0, 3.0, 2.5. Obtener la media aritmética de estos tiempos.

  $\bar{x} = (1.5 + 2.0 + 2.0 + 2.0 + 2.5 + 2.0 + 3.0 + 2.5) \div 8.$

  $\bar{x} = 17.5 \div 8 = 2.19.$

  El tiempo promedio es de 2.19 horas.

Si un dato muestral $\mathbf{x}_1$ tiene frecuencia $\mathbf{f}_1$; un dato $\mathbf{x}_2$, frecuencia $\mathbf{f}_2$; etc., para ahorrar tiempo de cálculo de la media aritmética se usa la expresión:

$$\bar{\mathbf{x}} = (\mathbf{f}_1 \times \mathbf{x}_1 + \mathbf{f}_2 \times \mathbf{x}_2 + \mathbf{f}_3 \times \mathbf{x}_3 + \ldots + \mathbf{f}_m \times \mathbf{x}_m) \div \mathbf{n}.$$

La media aritmética expresada de la forma anterior se llama media ponderada y a las frecuencias $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, $\mathbf{f}_3$, … …, $\mathbf{f}_m$. A estas frecuencias se les llama pesos de los datos $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, $\mathbf{x}_3$, … …, $\mathbf{x}_m$, respectivamente.

La media ponderada, conocidas las frecuencias relativas de los datos $\mathbf{f}_{r1}$, $\mathbf{f}_{r2}$, $\mathbf{f}_{r3}$, … …, $\mathbf{f}_{rm}$, se calcula con:

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{f}_{r1} \times \mathbf{x}_1 + \mathbf{f}_{r2} \times \mathbf{x}_2 + \mathbf{f}_{r3} \times \mathbf{x}_3 + \ldots + \mathbf{f}_{rm} \times \mathbf{x}_m.$$

Sugerencias didácticas

- **Inicio:** Oriente a sus estudiantes para que lean, analicen y respondan en el aula la pregunta vinculada a la recuperación de experiencias previas propuesta en el apartado *Recuperación*, relacionada con el concepto de promedio o media.
- **Desarrollo:** Pida a sus estudiantes que lean cuidadosamente el contenido de la doble página y que observen el desarrollo de los ejemplos resueltos. Formúleles preguntas vinculadas al contenido como, por ejemplo: *¿Qué son valores de tendencia central? ¿Cómo se calcula la media de un conjunto de datos?*

3 Moda, Mo

El valor que tiene la mayor frecuencia en una muestra de datos es la moda de dicha muestra.

En el ejemplo de la página anterior, la moda del número de horas de teleaudiencia de la muestra de 8 personas es 2.0:

1.5 , 2.0 , 2.0 , 2.0 , 2.5 , 2.0 , 3.0 , 2.5.

4 Mediana, Me

La mediana de un conjunto de valores de una muestra es el valor ubicado en el centro de los datos ordenados de menor a mayor o viceversa, si el número de estos valores es impar, o es la media aritmética de los dos valores del centro, si el número de valores muestrales es par.

EJEMPLOS RESUELTOS:

- Obtener la mediana de los datos: 2, 5, 3, 2, 4, 2, 3.

  Primero, se organizan los datos muestrales de menor a mayor: 2, 2, 2, 3, 3, 4, 5.

  Luego, como hay un número impar de datos en la muestra, **n** = 7, la mediana es 3, el valor del centro.

- Calcular la mediana de los datos del ejemplo de la página anterior.

  Primero, se organizan los datos muestrales de menor a mayor: 1.5 , 2.0 , 2.0 , 2.0 , 2.0 , 2.5 , 2.5 , 3.0.

  Luego, como hay un número par de datos en la muestra, **n** = 10, la mediana es el promedio de los dos datos del centro: 1.5 , 2.0 , 2.0 , 2.0 , 2.0 , 2.5 , 2.5 , 3.0.

  La mediana es 2.0 = (2.0 + 2.0) ÷ 2.

ACTIVIDADES

8 Determina las tres medidas de tendencia central para los siguientes conjuntos de datos muestrales.

- 2, 2, 5, 2, 3, 2, 6, 3, 2
  $\bar{x} = 3$; **Mo** = 2 ; **Me** = 2
- 1.0, 2.5, 3.0, 1.0, 1.0, 4.0, 3.5, 1.5, 4.0, 2.5
  $\bar{x} = 2.4$; **Mo** = 1 ; **Me** = 2.5

9 Obtén la media ponderada de $\bar{x}$, a partir de la tabla siguiente.

Dato, x	2.3	3.5	3.9	4.1	4.7	5.0	6.8	7.5
Frecuencia, f	2	4	3	2	6	1	9	3

$\bar{x} = 5.18$

Atención a la diversidad

Actividades de refuerzo: Haga que determinen las tres medidas de tendencia central para los siguientes casos.

- Carreras de un equipo de béisbol en 7 partidos.

  8 5 6 8 6 6 10

  Resp.: Media 7. Moda 6. Mediana 6.

- Calificaciones en Matemática de un estudiante en los cuatro cursos del bachillerato.

  89 94 76 89

  Resp.: Media 87. Moda 89. Mediana 89.

Ficha 50.

Actividades de ampliación: Pida al grupo que, con los datos de la tabla, determinen la media ponderada de los mismos.

X_i	f_i
27	1
28	2
29	6
30	7
31	8
32	3

Resp.: La media ponderada es 30.04.

- **Desarrollo:** Muéstreles en la pizarra los procedimientos para calcular las tres medidas de tendencia central y para determinar la media ponderada de un conjunto de datos. Desarrolle los ejemplos de la doble página y diseñe otros más. Fórmelos en grupos para trabajar estos conceptos.
- **Cierre:** Motive a sus estudiantes a realizar los ejercicios del apartado *Actividades*. En la actividad 8, determinarán las tres medidas de tendencia central para los conjuntos de datos muestrales indicados. En la actividad 9, obtendrán la media ponderada a partir de los datos de la tabla de frecuencias. Revise los resultados en el grupo y envíeles a la pizarra.

Aprender a aprender

Pida a sus estudiantes que construyan un ejemplo de una muestra que tenga más de una moda. Luego, pregunte al grupo:

- *¿Qué tomaron en cuenta para construir la muestra?*

Indicadores de logro

- **Calcula** valores medios de datos agrupados.

Otras actividades

Recuerde a sus estudiantes que la marca de clase de un grupo de datos es el promedio de los valores extremos de cada grupo. Por ejemplo, la marca de clase del primer grupo de la tabla de frecuencias de la página 166 es 0.12 + 6.64 ÷ 2 = 3.38.

Procederemos a formar, con los datos siguientes, una tabla de frecuencias de 5 grupos. Vamos a determinar la marca de clase y la media aritmética de los datos agrupados.

10 15 18 15 11 19

15 12 18 17 15 14

18 14 17 15 12 20

19 11 16 16 18 20

Grupos	f	x	f x x
(10-12)	11	4	44
(12-14)	13	2	26
(14-16)	15	7	105
(16-18)	17	7	119
(18-20)	19	4	76
Totales		24	370

Media aritmética de datos agrupados: 370 ÷ 24 = 15.42

RECUPERACIÓN

■ **Responde** las preguntas.

- *¿Qué utilidad tiene la agrupación de datos?*
- *¿Se pierde alguna información de los datos de la muestra cuando estos se agrupan?*

1 Media aritmética de datos agrupados

Es posible asignar a cada grupo o clase de datos un número único llamado marca de clase. Este número característico de cada grupo, **X**, es la media aritmética de los valores extremos, izquierdo y derecho, del grupo.

La media aritmética de los datos agrupados se obtiene, primero, multiplicando las frecuencias, **f**, de cada grupo por sus marcas de clase respectivas, **X**; luego, sumando todos los productos, **f** x **X**, obtenidos y, finalmente, dividiendo la suma por la frecuencia total o número total de datos, **N**.

Si se agregan dos columnas a la tabla de datos agrupados de la página 161, una para las marcas de clase, **X**, y otra para los productos, **f** x **X**, se consigue la tabla siguiente.

TABLA DE DATOS AGRUPADOS			
Grupo	**X**	**Frecuencia, f**	**f x X**
[0.12, 6.64[	3.38	29	98.02
[6.64, 13.16[	9.90	1	9.90
[13.16, 19.68[	16.42	1	16.42
[19.68, 26.20]	22.94	1	22.94
Totales		32	147.28

La suma de los productos de la columna **f** x **X** es 147.28 y la frecuencia total es **N** = 32, entonces la media aritmética de los datos agrupados de la tabla es:

$$\bar{x} = 147.28 \div 32 = 4.6025 \approx 4.60.$$

Fíjate que como la gran mayoría de los datos muestrales está en el primer grupo, [0.12, 6.64[, la media aritmética está localizada en el primer grupo.

Si se suman los datos porcentuales del mapa del ejemplo de la página 160 y el resultado se divide por el número total de datos, **N** = 32, el resultado es 3.12, que es la media aritmética conseguida sin agrupar los datos. La diferencia entre la media de los datos agrupados y la media de los datos sin agrupar se llama error de agrupamiento. Este error disminuye al aumentar el número de grupos.

Sugerencias didácticas

- **Inicio:** Oriente a sus estudiantes para que respondan en el aula las preguntas vinculadas a la recuperación de experiencias previas propuestas en el apartado *Recuperación*, relacionadas con la utilidad de los datos agrupados.
- **Desarrollo:** Pida a sus estudiantes que lean cuidadosamente el contenido de la doble página, que presten atención al desarrollo de los ejemplos resueltos y a las tablas de frecuencias de datos agrupados. Formúleles preguntas como, por ejemplo: *¿Qué es la marca de clase y cómo se obtiene? ¿Cómo se determina la media aritmética de los datos agrupados?*

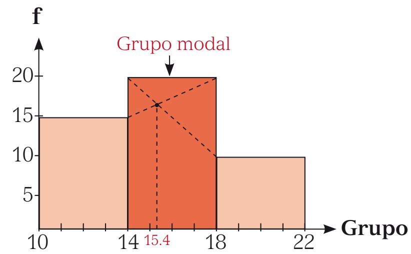
2 Moda de datos agrupados

Si los datos están agrupados, el grupo de mayor frecuencia es el grupo modal y en este está la moda.

EJEMPLO RESUELTO:

- Obtener la mediana a partir de la tabla siguiente.

TABLA DE DATOS AGRUPADOS			
Grupo	**X**	**Frecuencia, f**	**f x X**
[10, 14[	12	15	180
[14, 18[	16	20	320
[18, 22]	20	10	200
	Totales	45	700



[14, 18[es el grupo modal, su frecuencia es 320.

La moda se obtiene como se muestra en el histograma de la derecha. Es la abscisa, **Mo** ≈ 15.4, del punto donde se cortan los segmentos que van de las esquinas superiores del grupo modal a las esquinas superiores de sus grupos contiguos.

3 Grupo o intervalo mediano

El grupo mediano es el de frecuencia acumulada, **F**, inmediatamente mayor que la mitad de la frecuencia total, $\frac{1}{2}$**N**. En el grupo mediano se encuentra la mediana.

En el ejemplo anterior **N** = 45, entonces: $\frac{1}{2}$ **N** ≈ 23.

El grupo cuya frecuencia acumulada es inmediatamente mayor que 23 es el [14, 18[, cuya frecuencia acumulada es 35. En la tabla, [14, 18[es el grupo mediano.

Grupos	X	F
[10, 14[	15	15
[14, 18[	20	35
[18, 22]	10	45

ACTIVIDADES

10 Construye el histograma correspondiente a los datos de la tabla y, luego, obtén la media aritmética y la moda.

Grupos	[1.4, 1.5[	[1.5, 1.6[	[1.6, 1.7[	[1.7, 1.8[	[1.8, 1.9[	[1.9, 2.0]
Frecuencia	20	45	80	40	15	10

$\bar{x}$ ≈ 1.66 ; Mo = 1.65

11 Identifica el grupo mediano en la tabla anterior. *[1.6, 1.7[.*

- **Desarrollo:** Muestre a sus estudiantes los procedimientos para determinar la media, la moda y el intervalo mediano de datos agrupados. Desarrolle los ejemplos en la pizarra y diseñe otros más para que los desarrollen en sus cuadernos con sus tablas de frecuencias correspondientes.
- **Cierre:** Motive a sus estudiantes a realizar los ejercicios del apartado *Actividades*. En la actividad 10, construirán el histograma correspondiente a los datos de la tabla representada y, luego, obtendrán la media aritmética, la moda y el grupo mediano. En la actividad 11, identificarán el grupo mediano en la tabla anterior.

Atención a la diversidad

Actividades de refuerzo: Proponga a sus estudiantes que formen 5 grupos o clases con los siguientes datos. Después, determinen la marca de clase, la media aritmética de datos agrupados, la moda y el grupo mediano.

40 55 68 75 41 59

65 52 48 77 45 64

88 74 87 90 62 80

59 61 46 76 89 50

79 67 46 56 69 84

Respuesta:

Grupos	**x**	**f**	**f** x **x**
(40-50)	45	7	315
(50-60)	55	5	275
(60-70)	65	7	455
(70-80)	75	5	375
(80-90)	85	6	510
Totales		30	1 930

Media aritmética de datos agrupados: 1 930 ÷ 30 = 64.33.

El grupo modal es [80 – 90]. Su frecuencia es 510.

En intervalo mediano es [60 – 70], cuya frecuencia acumulada es 19.

Ficha 51.

Aprender a aprender

Pregunte al grupo:

- *¿Qué pasos dieron para construir el histograma de la actividad 10?*
- *¿Fue fácil o difícil su construcción?*
- *¿Por qué?*

Indicadores de logro

- **Calcula** medidas de dispersión: el rango, el rango medio y la desviación media.

Actividad interactiva

Medidas de dispersión

Este recurso es una actividad interactiva en la que determinarán las medidas de dispersión de los pesos de 10 jugadores. Realizarán los cálculos en sus cuadernos y, luego, escribirán las respuestas en los recuadros correspondientes.

Más actividades

Aclare a sus estudiantes que las medidas de dispersión nos dan una idea de qué tan alejados o esparcidos se encuentran los datos de una muestra.

Pídales que identifiquen cuál de estas muestras es la más dispersa y cuál es la menos dispersa.

- **A**: 10 15 37 8 12 16
- **B**: 32 25 30 40 20 26
- **C**: 95 25 13 40 22 19
- **D**: 20 15 37 48 32 26
- **E**: 10 15 20 5 14 12

Resp.: La **C** es la más dispersa y la **E** la menos dispersa.

RECUPERACIÓN

- Responde la pregunta.
  - *¿En cuál de los conjuntos siguientes los datos aparecen más expandidos o distribuidos?*

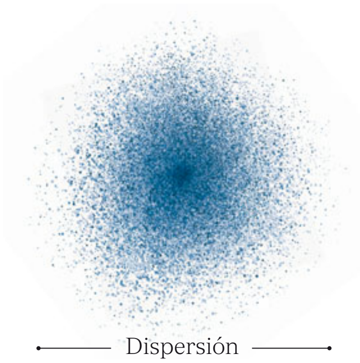
    A: 1, 6, 1, 2, 8, 1, 10.

    B: 1, 23, 1, 1, 3, 2, 30.

    C: 2, 2, 3, 3, 2, 4,3.

    D: 20, 20, 21, 25, 22, 21, 25.

En el conjunto ***B****.*



1 Medidas de dispersión

Los medidas de dispersión miden el grado de expansión o alejamiento de los datos de una muestra.

Si imaginamos los datos de una muestra como una nube, las medidas de dispersión miden el ancho o amplitud de dicha nube.

Algunas medidas de dispersión son el rango o recorrido, el rango medio y la desviación media.

2 Rango, R

El rango de una muestra de datos es la diferencia entre el mayor valor de la muestra, **X**, y el menor valor de la misma, **x**.

De acuerdo a la definición anterior: $\mathbf{R} = \mathbf{X} - \mathbf{x}$.

Si un conjunto **A** de datos muestrales presenta un rango mayor que el de otro conjunto **B**, entonces, la dispersión de **A** es mayor que la dispersión de **B**.

EJEMPLO RESUELTO:

- Obtener el rango de cada uno de los cuatro conjuntos de datos muestrales de la izquierda.

  $\mathbf{R(A)} = \mathbf{X} - \mathbf{x} = 10 - 1 = 9$. $\mathbf{R(B)} = 30 - 1 = 29$.

  $\mathbf{R(C)} = 4 - 2 = 2$. $\mathbf{R(D)} = 25 - 20 = 5$.

  Está claro que el conjunto **B** tiene mayor rango, porque es el que tiene los datos más alejados uno de otro.

3 Rango medio, RM

El rango medio de una muestra de datos es la mitad de la suma del mayor valor de la muestra, **X**, y el menor valor de la misma, **x**.

De acuerdo a lo anterior: $\mathbf{RM} = \frac{1}{2}(\mathbf{X} + \mathbf{x})$.

EJEMPLO RESUELTO:

- Calcular el rango medio del conjunto de datos: 1, 1, 3, 2, 1, 1, 5. Aquí, $\mathbf{X} = 5$ y $\mathbf{x} = 1$, entonces:

  $\mathbf{RM} = \frac{1}{2}(\mathbf{X} + \mathbf{x}) = \frac{1}{2}(5 + 1) = \frac{1}{2}(6) = 3$.

Sugerencias didácticas

- **Inicio:** Oriente a sus estudiantes para que lean y respondan en el aula la pregunta vinculada a la recuperación de experiencias previas propuesta en el apartado *Recuperación*, relacionada con el nivel de expansión de varios conjuntos.
- **Desarrollo:** Haga que lean cuidadosamente el contenido de la doble página y que observen los procedimientos aplicados en el desarrollo de los ejemplos resueltos. Pregúnteles: *¿Qué miden las medidas de dispersión? ¿Qué es el rango de una muestra de datos? ¿Qué es el rango medio de una muestra de datos?*

4 Desviación media, DM

La desviación media de un conjunto de datos muestrales es el promedio de los valores absolutos de las diferencias de los datos y su media aritmética, $\bar{x}$.

Si los datos de una muestra son muy cercanos a su media aritmética, la desviación media es pequeña.

Si $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ son los **n** datos de la muestra y $\bar{x}$ su media aritmética, la desviación media, **DM**, se calcula con la siguiente expresión:

$$DM = (|x_1 - \bar{x}| + |x_1 - \bar{x}| + |x_1 - \bar{x}| + \ldots \ldots + |x_n - \bar{x}|) \div n.$$

EJEMPLO RESUELTO:

- Calcular la desviación media del siguiente conjunto de datos muestrales: 2, 3, 12, 8, 5.

  Primero, se calcula la media aritmética de los datos, $\bar{x}$:

  $\bar{x} = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5) \div n = (2 + 3 + 12 + 8 + 5) \div 5.$

  $\bar{x} = 30 \div 5 = 6.$

  Luego, se obtienen los valores absolutos de las diferencias entre los $x_1, x_2, x_3, \ldots \ldots x_n$ y la media aritmética encontrada, $\bar{x}$:

  $|x_1 - \bar{x}| = |2 - 6| = |-4| = 4.$ $|x_2 - \bar{x}| = |3 - 6| = |-3| = 3.$

  $|x_3 - \bar{x}| = |12 - 6| = |6| = 6.$ $|x_4 - \bar{x}| = |8 - 6| = |2| = 2.$

  $|x_5 - \bar{x}| = |5 - 6| = |-1| = 1.$

  Finalmente, se calcula la desviación media, que es la media aritmética de las diferencias encontradas en el paso anterior:

  $$DM = (4 + 3 + 6 + 2 + 1) \div 5 = 16 \div 5 = 3.3.$$

INTELIGENCIA COLABORATIVA

Cálculo de una desviación media en el aula

Reúnanse en grupos con un máximo de 6 integrantes y **determinen** la desviación media de las edades.

Luego, **comparen** entre sí los resultados obtenidos por los distintos grupos.

ACTIVIDADES

12 Obtén el rango y el rango medio de los siguientes conjuntos de datos.

1.5, 1.0, 0.2, 2.7, 1.8, 1.0, 3.2 , 0.6	10, 22, 10, 10, 15, 27, 27, 10, 16, 27, 9, 18
R = *3* ; **RM** = *1.7*	**R** = *18* ; **RM** = *18.*

13 Lee y, luego, determina la desviación media de los datos muestrales.

- El análisis del nivel de azúcar en la sangre o glucemia a un grupo de 15 personas arrojó los resultados siguientes, en mg/dL: 72, 70, 68, 75, 81, 75, 87, 76, 93, 78, 95, 102, 77, 85, 77.

Atención a la diversidad

Actividades de refuerzo: Proponga a sus estudiantes que calculen el rango (R), el rango medio (RM) y la desviación media (DM) de los siguientes datos.

5 12 25 15 8

Resp.: R = 25 – 5 = 20.

RM = ½ (25 + 5) = 15.

Media de los datos:

5 + 12 + 25 + 15 + 8 ÷ 5 = 13.

Desviación media (DM):

$|X_1 - X| = |13 - 5| = |8| = 8.$

$|X_1 - X| = |13 - 12| = |1| = 1.$

$|X_1 - X| = |13 - 25| = |-12| = 12.$

$|X_1 - X| = |13 - 15| = |-2| = 2.$

$|X_1 - X| = |13 - 8| = |5| = 5.$

DM = 8 + 1 + 12 + 2 + 5 ÷ 5 = 5.6

Ficha 52.

- **Desarrollo:** Muestre a sus estudiantes el proceso de solución de los ejemplos resueltos. Desarrolle en la pizarra algunos ejemplos adicionales para resolverlos en el cuaderno y envíeles a la pizarra. Oriénteles para que realicen en grupo la actividad propuesta en el apartado *Inteligencia colaborativa,* en la que calcularán la desviación media de sus edades.
- **Cierre:** Motive a sus estudiantes a realizar los ejercicios del apartado *Actividades*. En la actividad 12, obtendrán el rango y el rango medio de varios conjuntos de datos. En la actividad 13, determinarán la desviación media de los niveles de azúcar en la sangre de 15 personas. Revise los resultados en el grupo.

Aprender a aprender

Pregunte al grupo:

- *¿Tuvieron alguna dificultad para realizar los cálculos de las medidas de dispersión?*
- *¿En qué consistió el problema?*
- *¿Qué pasos dieron para superarlo?*

Competencias

- Comunicativa.
- Uso de algoritmos.
- Resolución de problemas.

Indicadores de logro

- **Identifica** los conceptos de población y muestra. **Identifica** el concepto de variable estadística y su clasificación. **Identifica** y **clasifica** la frecuencia de datos agrupados y **construye** tablas de frecuencias. **Construye** gráficas de barras y poligonales. **Identifica** datos registrados en gráficas de barras y poligonales. **Reúne** numerosas muestras en grupos o clases. **Construye** tablas de frecuencias de datos agrupados. **Construye** gráficas de datos agrupados. **Construye** e **interpreta** gráficos circulares. **Organiza** agrupaciones de datos en diagramas de tallos y hojas. **Determina** valores medios de un conjunto de datos: la media, la moda y la mediana. **Calcula** valores medios de datos agrupados. **Calcula** medidas de dispersión: el rango, el rango medio y la desviación media.

Competencias fundamentales

Comunicativa

Es necesario que los estudiantes adquieran las habilidades necesarias para identificar y aplicar los conceptos relacionados con la recolección y el análisis de datos, y puedan desarrollar las competencias que les permitan vincularlos a la cotidianidad.

Uso de algoritmo

Las reglas y procedimientos en la resolución de operaciones aritméticas son vitales para la persecución de resultados correctos. Por ejemplo, en las operaciones que involucran el cálculos de las medidas de dispersión, desviación media, etc.

ACTIVIDADES

14 Marca con **X** la clase de variable estadística de acuerdo a la clave.

Cuantitativa: ☐. Cualitativa: ◯.

	Cuantitativa	Cualitativa
El monto de los sueldos mínimos por país.	X	
El número de calorías consumidas por la población.	X	
Expectativas de cambio en un sector social.		X
La clase de música preferida por los adolescentes.		X
Los porcentajes de asistencia a clases.	X	
El color del pelo de un grupo de estudiantes.		X
El índice de inflación de un conjunto de países.	X	

15 Completa la tabla de frecuencias siguiente.

Datos	Frecuencias absolutas	Frecuencias relativas
3	*5*	0.25
4	8	*0.40*
6	3	*0.15*
9	*4*	0.20
Totales:	20	*1.00*

16 Lee y, luego, haz lo que se te pide.

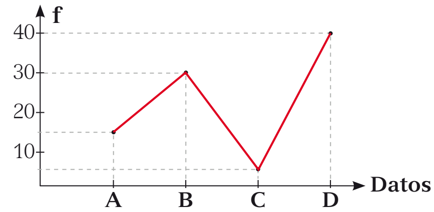
- Un grupo de 15 estudiantes fue cuestionado acerca del número de veces que va a la playa en un mes. Sus respuestas fueron las siguientes:

1, 1, 1, 2, 1, 3, 2, 4, 1, 2, 3, 4, 4, 2, 3

- Construye una tabla de frecuencias absolutas y relativas con los datos anteriores.
- Escribe las frecuencias relativas como porcentajes y verifica que estos suman 100%.
33.33% + 26.67% + 20% + 20% = 100%.

17 Construye, en tu cuaderno, una gráfica de barras con los datos de la actividad anterior.

18 Observa la gráfica poligonal y, luego, responde las preguntas.



- ¿Cuál es la frecuencia total de los datos de la muestra? *N = 90.*
- ¿Cuál es la frecuencia relativa de **B** y **D**?
f_r (B) = 0.33 ; f_r (D) = 0.44.

19 Representa los datos de la tabla en una gráfica circular.

Datos	f
A	2
B	6
C	8
D	4

∢ A = 36º ; ∢ B = 108º ; ∢ C = 144º ; ∢ D = 72º.

20 Reúne los datos en 5 clases y, luego, construye una tabla de datos agrupados.

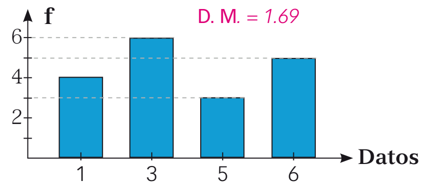
1, 4, 4, 2, 1, 1, 1, 5, 4, 3, 3, 1, 2, 1, 2,
2, 1, 4, 8, 5, 1, 3, 5, 1, 2, 4, 4, 9, 2, 3.

21 Calcula la media aritmética de los datos de la actividad anterior, primero, sin agruparlos y, luego, con ellos agrupados. *$\bar{x}$ = 2.97 ; $\bar{X}$ = 3.08*

- ¿Cuál es el error de agrupamiento? *0.11*
- ¿Cómo se reduciría este error?
Aumentando el número de grupos.

22 Determina la desviación media de los datos representados en la gráfica siguiente.

D. M. = 1.69



Sugerencias didácticas

- Las actividades propuestas en esta página están estrechamente vinculadas a los conceptos y procedimientos desarrollados a lo largo de la unidad. Haga que lean cuidadosamente las instrucciones y, después, verifique las respuestas obtenidas.
- Es importante observar de cerca que los estudiantes siguen las instrucciones y los procedimientos para efectuar operaciones para calcular las medidas de tendencia central, los valores medios de datos agrupados y las medidas de dispersión.

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

23 Lee y reflexiona antes de responder.

Para evitar accidentes, la administración de un hotel hizo colocar en una laguna un letrero que dice: Profundidad promedio 2 metros.

- Un cliente del hotel de 1.9 metros de estatura, ¿correrá necesariamente peligro en cualquier lugar de la laguna? *No.*
- Apoya tu respuesta con un ejemplo *Si hay un lugar de 0.5 m y otro de 3.0 m : (0.5 + 3.0) ÷ 2 = 1.75. El cliente hace pie en alguna parte de la laguna.*

24 Resuelve el problema y, luego, socializa el procedimiento que usaste para resolverlo.

- Una organización no gubernamental (ONG) dedicada a programas de salud comunitaria visitó una población de 6 000 habitantes, repartidos, según grupos de edad, como sigue: 3 000 habitantes de hasta 18 años; 2 100 con edades mayores de 18 años y menores de 65 años y 900 con 65 años y más. ¿Cómo deberá elegirse, para ser encuestada, una muestra de 500 habitantes de la población, tomando en cuenta que los representantes de los grupos de edad deben estar presentes en la misma proporción en dicha muestra que en la población?

250 (Hasta 18); 175 (Entre 18 y 65); 75(65 y más).

25 Encuentra el dato faltante.

- La profesora pidió a los estudiantes que copiaran una tabla de frecuencias relativas de un conjunto de datos. Mayra se distrajo y olvidó escribir uno de los datos de la tabla. Se dio cuenta cuando la tabla ya había sido borrada de la pizarra, pero escuchó a la profesora decir que la media aritmética de los datos era 6.90. *El dato faltante es* ***x*** *= 8.*

La tabla que copió Mayra es la siguiente:

Datos	2	5	*8*	10	15
f_r	0.2	0.3	0.25	0.15	0.1

- ¿Cómo ayudarías a Mayra a completar su tabla?

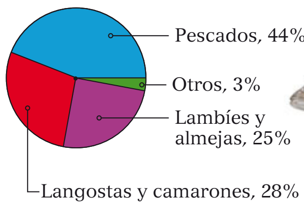
26 Piensa y, luego responde.

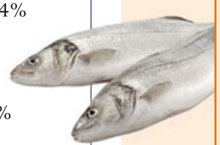
- ¿Qué valor de **x** hace que, en la siguiente muestra de datos, la media aritmética, la moda y la mediana sean iguales?

x , 8 , 2 , 5. ***x*** *= 5.*

27 Lee y, luego, determina lo que se te pide, a partir de la gráfica

En el periodo 2015-2016 una región pesquera capturó 50 000 toneladas de pescados y mariscos, distribuidas como muestra la gráfica.





- ¿Cuántas toneladas de pescado se capturaron en el período 2015-2016? *22 000 t.*
- ¿Cuántas toneladas menos de langostas y camarones que de pescados se capturaron? *8 000 t.*

Competencias fundamentales

Resolución de problemas

- Las habilidades y destrezas adquiridas por los estudiantes son necesarias para identificar las alternativas más convenientes en la persecución de la solución de problemas que forman parte de su diario vivir. En este aspecto radica la importancia de que los estudiantes adquieran las destrezas necesarias en los aspectos relacionados con los conceptos y procedimientos estadísticos desarrollados en la unidad.

Criterios de evaluación

Competencia comunicativa:

- Adaptación a las representaciones gráficas, simbólicas y numéricas a la situación de comunicación.

Uso de algoritmo:

- Seguimiento de las reglas, instrucciones y procedimientos.

Resolución de problemas:

- Adecuación de las estrategias y procedimientos al tipo de problema y al contexto.

Sugerencias didácticas

- **Resolución de problemas**: Proponga a sus estudiantes que lean detenidamente las instrucciones y los problemas propuestos vinculados a la cotidianidad, en los que aplicarán los conceptos y procedimientos trabajados en la unidad.
- Pídales que respondan las preguntas en cada uno de los casos y que expresen el porqué de sus respuestas. Acompañe a sus estudiantes en la realización de estas actividades y ofrézcales las orientaciones necesarias.

Aprender a aprender

Motive a sus estudiantes para que inventen ejemplos de las aplicaciones cotidianas de los conceptos desarrollados en la unidad. Por ejemplo, pregunte al grupo:

- *¿Cómo aplicarían las medidas de tendencia central en las calificaciones escolares?*

Discuta las diversas respuestas con el grupo.

Indicadores de logro de la evaluación

- **Identifica** los conceptos de población y muestra. **Identifica** el concepto de variable estadística y su clasificación. **Identifica** y **clasifica** la frecuencia de datos agrupados y **construye** tablas de frecuencias. **Construye** gráficas de barras y poligonales. **Identifica** datos registrados en gráficas de barras y poligonales. **Reúne** numerosas muestras en grupos o clases. **Construye** tablas de frecuencias de datos agrupados. **Construye** gráficas de datos agrupados. **Construye** e **interpreta** gráficos circulares. **Organiza** agrupaciones de datos en diagramas de tallos y hojas. **Determina** valores medios de un conjunto de datos: la media, la moda y la mediana. **Calcula** valores medios de datos agrupados. **Calcula** medidas de dispersión: el rango, el rango medio y la desviación media. **Resuelve** problemas del contexto donde aplica sus conocimientos estadísticos. **Utiliza** recursos virtuales y electrónicos: computadora, softwares educativos, juegos interactivos y otros, en la búsqueda de información.

Competencias específicas

- Comunica.
- Razona y argumenta.
- Usa algoritmos.
- Conecta.
- Resuelve problemas.

Aprender a aprender

Pregunte a sus estudiantes:

- *¿Cuál es el procedimiento a seguir cuando los datos de una muestra tienen valores dispersos?*
- *¿Qué puede ocurrir en estos casos, si no se aplican las medidas de tendencia central?*

EVALUACIÓN

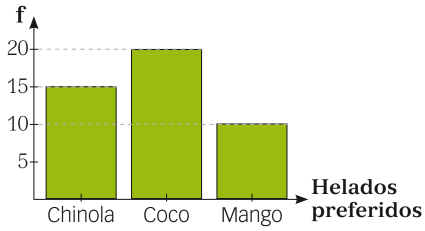
Comunica

28 Expresa la siguiente información usando los términos de la estadística mostrados abajo.

Población	Muestra	Frecuencia

En una comunidad suburbana de 800 habitantes, de 50 de los seleccionados para una encuesta sobre el uso de la Internet, 28 dijeron que la usaban siempre; 14, que la usaban a veces y 8, que nunca la usaban.

29 Describe lo que muestra la siguiente gráfica.



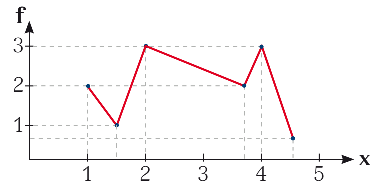
30 Representa los datos siguientes en una tabla de frecuencias.

1 , 1 , 2 , 1 , 1 , 3 , 2 , 2 , 5 , 2 , 1 , 3 , 3 , 3 , 1, 2 , 1, 1 , 1 , 3 , 4 , 1 , 5 , 5 , 5 , 3 , 8 , 2 , 3 , 1.

Razona y argumenta

31 Piensa y, luego, responde. Explica por qué respondiste como lo hiciste.

- ¿Qué clase de variable está representada en la siguiente gráfica? *Cuantitativa continua.*

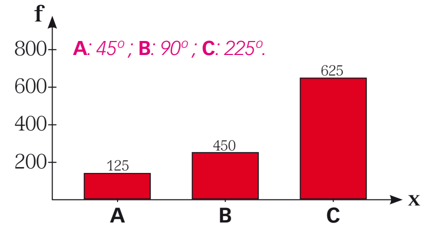


32 Piensa y, luego, responde.

- Dada una muestra de dos valores distintos, **x** e **y**, con **y** > **x**, ¿su media aritmética varía si ambos valores aumentan h unidades? *Sí, aumenta también **h** unidades.*
- ¿Ocurre lo mismo con su rango? *Su rango no sufre cambio.*

Usa algoritmos

33 Construye la gráfica circular equivalente a la siguiente gráfica de barras.



***A**: 45° ; **B**: 90° ; **C**: 225°.*

34 Calcula la media ponderada de los datos de la actividad 30. ***x** = 5.07.*

35 Obtén el porcentaje de presencia de cada dato.

- De un total de 1 000 viviendas escogidas al azar, 75 tienen más de tres baños; 150 tienen tres baños; 325 tienen dos baños y 450 tiene un baño.

3 baños: 7.5%; 3 baños: 15% ; 2 baños: 32.5% ; 1 baño: 45%.

36 Calcula la media aritmética de los datos agrupados, a partir de la tabla.

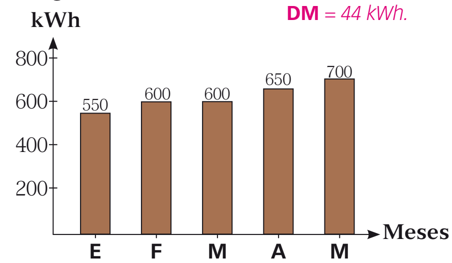
Grupos	[1, 4[	[4, 7[	[7, 10[	[10, 13]
Frecuencia	5	8	12	3

***x** = 6.89*

Conecta

37 Obtén la desviación media de los gastos de energía eléctrica de una vivienda mostrados en el siguiente histórico de consumos.

***DM** = 44 kWh.*



Resolución de problemas

38 Construye un problema a partir la gráfica anterior.

Sugerencias didácticas para la evaluación

- Es importante verificar, antes de dar inicio a las actividades de evaluación, que sus estudiantes identifican los casos en los que pueden aplicar las medidas de tendencia central, las medidas de dispersión y el método de datos agrupados. Observe que efectúen de forma correcta los procedimientos en cada caso.
- Si cuenta con tecnología como refuerzo, puede aplicar la prueba de la unidad que se encuentra en la plataforma didáctica Pleno.

39 **Estudio de caso**. Lean el texto y, luego, organizados en grupos, hagan lo que se les pide.

El estado de los servicios públicos, la seguridad, limpieza del entorno y las diversas clases de contaminación son algunos de los problemas en las comunidades donde vivimos. Como ciudadanos, debemos mantenernos vigilantes frente a los problemas que nos afectan y contribuir a resolverlos.

- Construyan un listado con los temas que podrían ser de interés para una encuesta en su comunidad, fijen la población, el número de personas a encuestar (muestra) y las preguntas que incluirán en la encuesta.
- Tomen una semana para cuestionar a las personas de la muestra escogida y, una vez concluida, reúnanse para recoger y analizar las respuestas obtenidas.
- Presenten un informe con los resultados conseguidos y debatan en forma entusiasta, en el curso, alguna de las posibles soluciones a los problemas contemplados.

40 **Piensa** y, luego, **responde**. *Respuestas libres.*

- ¿Cómo es el tránsito en la ciudad donde vives?
- ¿Ves relación entre el desorden vehicular y una deficiente cultura de convivencia ciudadana?
- ¿Qué valores deben promoverse para solucionar el problema?

APRENDIZAJE AUTÓNOMO

41 **Marca** según tus logros.

	Iniciado	En proceso	Logrado
• Identifico y uso los conceptos básicos de la estadística.	▢	▢	▢
• Construyo distintas clases de gráficas estadísticas.	▢	▢	▢
• Calculo valores medios de una muestra.	▢	▢	▢
• Calculo la dispersión de una muestra.	▢	▢	▢

42 **Reflexiona** sobre tu aprendizaje.

- ¿Cuáles de los temas estudiados en la unidad te parecieron de mayor importancia? ¿Por qué?
- ¿Puedes describir en el grupo la importancia sociopolítica y económica de la estadística?

Sugerencias didácticas para la evaluación

- Pregunte a sus estudiantes:
  - — *¿Cómo pueden ser las variables estadísticas?*
  - — *¿Qué es la frecuencia absoluta?*
  - — *¿Cómo se calcula la frecuencia acumulada?*
  - — *¿En cuáles gráficas se registran los datos estadísticos?*
  - — *¿Qué es una gráfica circular o de sectores?*

Estudio de caso

- En la actividad 39, *Estudio de caso*, deberán leer cuidadosamente el problema propuesto y las instrucciones, después, hacer lo que se les indica. En este caso, construirán un listado con los temas que serían de interés para una encuesta. Tomarán una semana para cuestionar a las personas de la muestra escogida, se reunirán para recoger y analizar las informaciones y, finalmente, presentarán un informe con los resultados conseguidos y debatirán en el curso las posibles soluciones.

Actitudes y valores

Convivencia

En la sección destinada a *Actitudes y valores*, actividad 40, responderán cómo es el tránsito en la ciudad donde viven. Expresarán si ven relación entre el desorden vehicular y una deficiencia cultural de convivencia ciudadana. Para concluir, dirán qué valores deben promoverse para solucionar el problema.

Aprendizaje autónomo

- En el apartado *Aprendizaje autónomo*, actividad 41, evaluarán por ellos mismos si los conceptos y procedimientos que trabajaron en la unidad se encuentran en estado de iniciación, en proceso o logrados. En la actividad 42, reflexionarán sobre su proceso de aprendizaje.

Aprender a aprender

Pregunte a sus estudiantes:

- *¿Qué aplicaciones cotidianas tienen los conceptos y procedimientos desarrollados en esta unidad?*
- *¿Podrían dar dos ejemplos?*

10 Probabilidades

COMPETENCIAS

Específicas

- **Razona y argumenta**: **Determina** y **analiza** los resultados de un experimento aleatorio.
- **Comunica**: **Expresa** los resultados de experimentos aleatorios realizados en equipo.
- **Modelar y representar**: **Elabora** tablas y representaciones de datos de situaciones del contexto, utilizando diferentes organizadores gráficos estadísticos.
- **Usa algoritmo**: **Sigue** las reglas que le permiten obtener un resultado al resolver problemas que involucran procedimientos estadísticos.
- **Conecta**: **Utiliza** el lenguaje estadístico y probabilístico para comunicar, representar y resolver problemas de diferentes situaciones de otras áreas y de la propia Matemática.
- **Resuelve problemas**: **Resuelve** problemas de interpretación de tablas y gráficos estadísticos.
- **Utiliza herramientas tecnológicas**: **Utiliza** soportes tecnológicos como la Internet, la calculadora científica y otros dispositivos.

Fundamentales

Resolución de problemas: **Plantea** y **resuelve** problemas sobre situaciones del entorno que involucran el uso de experimentos estadísticos.

CONTENIDOS

Conceptos

- Experimentos deterministas y aleatorios.
- Probabilidades clásica y empírica.
- Eventos unión e intersección.
- Eventos compatibles e incompatibles.

Procedimientos

- Reconocimiento de experimentos deterministas y aleatorios.
- Comparación y cálculo de probabilidades y eventos.
- Escritura de probabilidades en forma decimal o porcentual.
- Comprensión de la probabilidad experimetal.
- Construcción de diagramas de árbol.
- Cálculo de probabilidades mediante el diagrama de árbol.
- Realización de operaciones de unión e intersección de eventos.

Actitudes y valores

- Valoración de la salud física, mental y social.
- Apreciación de una vida alegre y plena.

Tiempo estimado de trabajo: 2 semanas

INDICADORES DE LOGRO

- **Reconoce** experimentos deterministas y aleatorios.
- **Identifica** el concepto de probabilidad.
- **Identifica** el concepto de espacio muestral.
- **Identifica** eventos más o menos probables.
- **Calcula** la probabilidad de un evento.
- **Escribe** probabilidades en forma decimal o porcentual.
- **Comprende** la probabilidad experimental.
- **Identifica** experimentos aleatorios simples y compuestos.
- **Construye** diagramas de árbol.
- **Calcula** probabilidades de eventos compuestos.
- **Realiza** operaciones de unión e intersección de eventos.
- **Determina** probabilidades de unión e intersección de eventos.
- **Identifica** eventos compatibles e incompatibles.
- **Resuelve** problemas del contexto donde aplica diversos experimentos estadísticos.
- **Utiliza** recursos virtuales y electrónicos: computadora, softwares educativos, juegos interactivos y otros, en la búsqueda de información.

Valor transversal: Salud

Recursos digitales

Plataforma digital CD

BIBLIOTECA DEL DOCENTE

- DOCUMENTOS PARA LA PLANIFICACIÓN
- EVALUACIÓN SEGUNDO SEMESTRE
- GUÍA DE RECURSOS TIC

CUADERNO DE ACTIVIDADES

UNIDAD 10	Probabilidades

RECURSOS DE REFUERZO Y AMPLIACIÓN

LibroMedia

ACTIVIDADES INTERACTIVAS

PÁGINA 175	Tabla de frecuencias
PÁGINA 180	Medidas de centralización y de dispersión
PÁGINA 183	Calcular probalidades usando un diagrama de árbol

CD DE RECURSOS DIGITALES: PLAN REGULAR

Pleno: PRUEBA DE EVALUACIÓN FORMATIVA DE LA UNIDAD

Estrategias pedagógicas

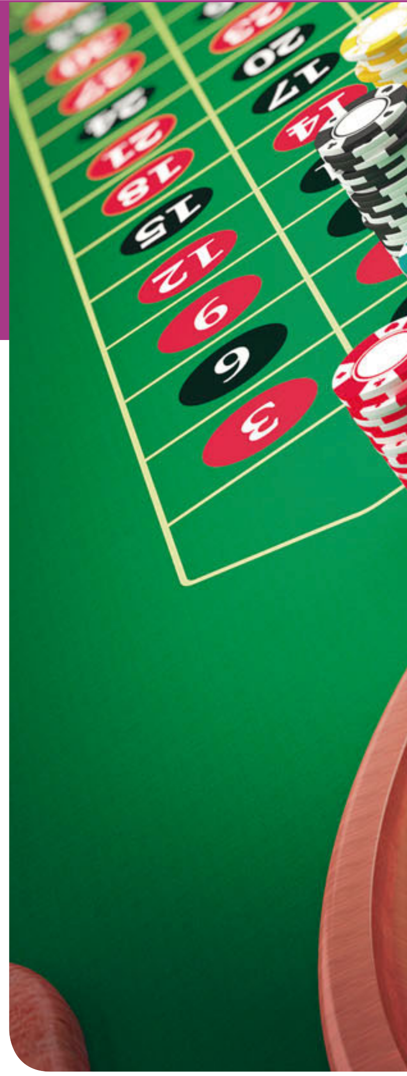
- Recuperación de experiencias previas.
- Trabajo en equipo.
- Aprendizajes basados en problemas (ABP).

Unidad 10

Competencias de la unidad

- **Lee** y **comenta** las informaciones expuestas en el apartado *Punto de partida*.
- **Responde** preguntas relacionadas con las informaciones expuestas en el apartado *Punto de partida*.
- **Recupera** experiencias vividas mediante la observación de las imágenes de la ilustración.
- **Responde** preguntas vinculadas a sus experiencias previas sobre los conceptos que desarrollarán en la unidad en el apartado *Recuperación de conocimientos*.
- **Responde** preguntas vinculadas a las aplicaciones cotidianas de los conceptos que desarrollará en la unidad en el apartado *Observación*.

10 Probabilidades



Punto de partida

El azar siempre intrigó al ser humano. Inspiró, por un lado, temor a lo desconocido y, por el otro, esperanzas de ser favorecido por algún golpe de suerte. Desde la más remota antigüedad, los humanos jugaban con el azar. Los dados más antiguos de que se tienen noticias datan de unos 5 000 años. Se sabe que se utilizaron dados en el antiguo Egipto; y entre los griegos y romanos eran empleados en los juegos por las clases pudientes.

Luz leía con sumo interés, puso a un lado el libro, se acomodó en el sillón y pensó: — *¿El azar está sujeto a leyes?*

El azar y los juegos con los que se asocia empezaron a ser objeto de estudio en el siglo XVII. En la actualidad, el azar es objeto de estudio del Cálculo de Probabilidades, una rama de las matemáticas que ha alcanzado un gran desarrollo y tiene múltiples aplicaciones.

- ¿Cómo puede estudiarse el azar?
- ¿Qué responderías ante la pregunta de Luz?

Conceptos y procedimientos

- Experimentos deterministas y aleatorios.
- Probabilidades clásica y empírica.
- Eventos unión e intersección.
- Eventos compatibles e incompatibles.

Actitudes y valores

- Valorar la salud física, mental y social.
- Apreciar una vida alegre y plena.

RECUPERACIÓN DE CONOCIMIENTOS

- ¿Has escuchado la expresión juegos de azar?
- ¿Qué significado tiene para ti esta expresión?
- ¿En cuáles juegos está presente el azar?
- ¿Qué fenómenos de tu entorno están relacionados con el azar?

174

Apertura de la unidad

Dentro de los objetivos principales de la apertura de esta unidad se encuentran el plantear una situación de aprendizaje, una problemática o un texto que sirve para contextualizar el tema de la unidad. Todo esto con la finalidad de motivar y despertar la curiosidad de los estudiantes.

A partir de la situación o texto planteado y las imágenes de la ilustración se conecta al estudiante el tema a tratar, a la vez que se vincula la realidad o cotidianidad con los temas que se van a desarrollar.

Todos los elementos que conforman la portada promueven la recuperación de experiencias o conocimientos previos y la motivación o el interés por los conocimientos que adquirirán en la unidad.

Trabajo colectivo de apertura

- **Punto de partida:** Guíe a sus estudiantes a leer y comentar en el grupo las informaciones expuestas en el apartado *Punto de partida* relacionadas con el azar y los juegos desde la antigüedad hasta la actualidad.
- **Recuperación de conocimientos:** Las preguntas de este apartado permiten hacer un diagnóstico de los conocimientos y las experiencias previas vinculados al juego de azar.
- **Observación:** En este apartado se plantean preguntas relacionadas con las diversas imágenes que observan en la ilustración.

OBSERVACIÓN

- ¿Qué muestran las ilustraciones de esta doble página?
- ¿Estas ilustraciones te recuerdan alguna situación en la que hayas estado presente?¿Cuál?
- ¿Puedes mencionar algunos juegos de azar de uso generalizado en tu comunidad?
- ¿Puede provocar daños la afición exagerada a esta clase de juegos? ¿Cuáles daños?

Esquema conceptual de la unidad

Probabilidades

Los experimentos pueden ser:

Deterministas

Aleatorios *que tienen un:* Espacio muestral

a los que se asigna una:

Probabilidad clásica | Probabilidad empírica

que se calcula con la:

Fórmula de Laplace *o mediante:* Diagramas de árbol

Actividad de motivación

Pida a sus estudiantes que lean en la sección *Conceptos y procedimientos* los temas que trabajarán en la unidad y las actitudes y valores que estarán presentes en el desarrollo de la misma. Luego, para que interioricen la importancia de la utilidad de conocer las probabilidades de ocurrencia de un evento, pregunte al grupo:

- *¿Han escuchado los pronósticos del estado del tiempo? ¿Qué entienden cuando se dice que las probabilidades de lluvia son de un 80 por ciento? ¿Por qué hay eventos que tienen mayor probabilidad de ocurrencia que otros? ¿Qué es más probable al lanzar un dado: sacar un número par o sacar un 5? ¿Cuál es la probabilidad de sacar un 9 al lanzar un dado de 6 caras?*

Actividad interactiva

Tabla de frecuencias

Este recurso constituye una actividad de recuperación de experiencias en la que se les muestra en 8 pasos cómo se elabora una tabla de frecuencias, después, aplicarán lo aprendido organizando y registrando los goles conseguidos por un equipo de fútbol.

Actitudes y valores

Salud

Aprovechar la situación planteada en el apartado *Punto de partida* y en las imágenes de la ilustración para conversar con sus estudiantes acerca de por qué la práctica abusiva de los juegos de azar puede afectar el estado físico, mental y social de las personas. Pregunte al grupo:

- *¿Qué creen que puede ocurrir con una persona que gaste todo lo que gana en el juego de azar? ¿Por qué?*

Indicadores de logro

- **Reconoce** experimentos deterministas y aleatorios.
- **Identifica** el concepto de probabilidad.
- **Identifica** el concepto de espacio muestral.

RECUPERACIÓN

■ **Responde** las preguntas.

- *¿Has jugado alguna vez empleando monedas o dados lanzados al aire?*
- *¿Puedes saber el resultado de la tirada de un dado o una moneda, antes de que caigan?*

1 Experimentos deterministas y aleatorios

Un experimento determinista es una prueba cuyo resultado puede ser conocido de antemano. Los hechos de un experimento determinista se llaman eventos deterministas o causales.

Son experimentos deterministas los siguientes:

- Si se levanta del suelo una roca, esperamos con seguridad que, al dejarla de sostener, la roca caerá y regresará al suelo.
- Si colocamos sobre una hornilla encendida una cazuela llena de agua, al cabo de un tiempo el agua empezará a hervir.

Un experimento aleatorio es una prueba cuyo resultado no puede ser conocido de antemano. Los hechos de un experimento aleatorio se llaman eventos aleatorios, no causales o de azar.

Son experimentos aleatorios los siguientes:

- Si se lanza una moneda al aire, el resultado que se conseguirá tras su caída no se conoce de antemano, podría ser *cara* o *escudo*.
- Si se extrae una carta de un mazo, no se sabe, antes de extraerla, si se sacará un *diamante*, un *corazón*, un *trébol* o una *pica*.

2 Concepto de probabilidad

La probabilidad de un suceso es una medida de la oportunidad de que ese suceso pueda ocurrir.

Al lanzar una moneda al aire, la probabilidad de obtener una *cara* (o un *escudo*) mide el chance que tenemos de conseguir dicho resultado. El cálculo de una probabilidad asigna un valor numérico a las expectativas puestas en un suceso.

Dos eventos aleatorios son equiprobables si tienen la misma probabilidad de ocurrencia.

Los eventos *cara* y *escudo* que resultan del lanzamiento de una moneda son equiprobables. Esto es, una cara no tiene más chance de salir que un escudo.

Al lanzar un dado, cualquier resultado, del 1 hasta el 6, tiene la misma probabilidad de salir que otro.

Los jugadores de cartas. Cuadro del pintor francés Paul Cézanne (1839-1906).

Otras sugerencias

A manera de repaso, pregunte a sus estudiantes:

- *¿Cuál es el resultado esperado, si se suelta una pelota?*
- *¿Y si se desprende un fruto de un árbol?*
- *¿Y el resultado esperado al lanzar un dado?*
- *¿Cuál es la diferencia entre la experiencia de dejar caer una pelota y verla rebotar y lanzar un dado y esperar qué número saldrá?*

Motíveles para que tomen como referencia la probabilidad de sacar una bola de una funda que contiene bolas numeradas del 1 al 5 y que construyan dos experimentos, uno de resultados más probables y otro de resultados menos probables.

Sugerencias didácticas

- **Inicio:** Oriente a sus estudiantes para que lean y respondan las preguntas vinculadas a la recuperación de experiencias previas propuestas en el apartado *Recuperación*, relacionadas con el juego de azar.
- **Desarrollo:** Pida a sus estudiantes que lean cuidadosamente el contenido de la doble página, que analicen los conceptos y que observen el desarrollo de los ejemplos resueltos. Formúleles preguntas como, por ejemplo: *¿Qué es un experimento determinista? ¿Qué es un experimento aleatorio?* Pídales que observen la imagen y lean el pie del cuadro de *Los jugadores de cartas*.

3 Espacio muestral

El espacio muestral o de muestreo de un experimento aleatorio es la totalidad de los resultados o eventos posibles de dicho experimento.

Para denotar al espacio muestral se utiliza la letra $\mathcal{E}$.

- Si se lanza una moneda al aire, el espacio muestral es el conjunto formado por los dos resultados posibles, *cara* (**C**) y *escudo* (**E**):

$$\mathcal{E} = \{\mathbf{C}, \mathbf{E}\}$$

- Si se lanza un dado al aire, el espacio muestral es el conjunto formado por los resultados 1, 2, 3, 4, 5 y 6:

$$\mathcal{E} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Los espacios muestrales pueden ser:

- Discretos, si sus elementos son numerables, esto es, si pueden ser contados.

El espacio muestral del experimento del lanzamiento de la moneda, $\mathcal{E} = \{\mathbf{C}, \mathbf{E}\}$, es discreto, porque podemos marcar sus elementos, **C** y **E**, con los naturales 1 y 2: $\{\mathbf{C}_1, \mathbf{E}_2\}$.

- Continuos, si sus elementos no son numerables, esto es, si sus elementos no pueden contarse.

El espacio muestral de todas las estaturas posibles comprendidas entre 1.5 m y 2.0 m.

En este caso no es posible contar el conjunto de todas las estaturas posibles, porque entre 1.5 m y 2.0 m hay incontables estaturas.

MÁS INFORMACIÓN

Eventos seguros e imposibles

- Un evento que sabemos con seguridad que ocurrirá es seguro.

Ejemplo:

El evento *Obtener un número del 1 y 6 al lanzar un dado*, es seguro.

- Un evento que sabemos con seguridad que no ocurrirá es imposible.

Ejemplo:

El evento *Sacar un 7 al lanzar un dado*, es imposible.

ACTIVIDADES

1 Escribe en tu cuaderno tres eventos de cada tipo.

Determinista.	Aleatorio.	Seguro.	Imposible.

2 Escribe el espacio muestral de los siguientes experimentos aleatorios.

- **A**: *Predecir si nacerá un niño o una niña.*
- **B**: *Elegir uno de los colores rojo, verde, azul y amarillo.*
- **C**: *Sacar de una funda bolas numeradas del 1 al 3.*
- **D**: *Lanzar un dado de 20 caras y anotar el resultado.*

- **Desarrollo:** Muéstreles ejemplos de los conceptos desarrollados en la doble página. Pídales que lean y reproduzcan el contenido del apartado *Más información*, que trata sobre los eventos seguros e imposibles. Haga que reproduzcan los ejemplos en sus cuadernos y motíveles para que construyan sus propios ejemplos.
- **Cierre:** Motive a sus estudiantes a realizar los ejercicios del apartado *Actividades*. En la actividad 1, escribirán, en sus cuadernos, tres experimentos deterministas y tres aleatorios. En la actividad 2, escribirán el espacio muestral de los experimentos aleatorios que les indican. Ofrézcales las orientaciones que sean necesarias.

Atención a la diversidad

Actividades de refuerzo: Pida a sus estudiantes que clasifiquen los experimentos en deterministas o aleatorios.

- Solidificación del agua con el frío.

  Resp.: Determinista.
- Obtener un número impar al lanzar un dado.

  Resp.: Aleatorio.
- Ganar el premio mayor de la lotería.

  Resp.: Aleatorio.
- Obtener cara o escudo al lanzar una moneda al aire.

  Resp.: Determinista.
- Lanzar una piedra y que caiga al suelo.

  Resp.: Determinista.
- Obtener cualquier número del 1 al 6 al lanzar un dado.

  Resp.: Determinista.

Motive a sus estudiantes para que escriban en sus cuadernos el espacio muestral correspondiente al lanzamiento de dos y tres monedas al aire.

- Dos monedas:

  Resp.: {(C,C), (E,E), (CE), (CE)}
- Tres monedas:

  Resp.: {(C,C,C), (E,E,E), (C,C,E), (C,E,E), (C,E,C), (E,C,E), (E,C,C), (E,E,C)}

Ficha 53.

Aprender a aprender

Pregunte a sus estudiantes:

- *¿Qué conocían acerca de los conceptos estudiados en esta doble página?*
- *¿Les resultaron fáciles las actividades propuestas?*

Indicadores de logro

- **Identifica** eventos más o menos probables.
- **Calcula** la probabilidad de un evento.

RECUPERACIÓN

- Responde las preguntas.
  - *¿Has escuchado la expresión probabilidad de que ocurra, referida a alguna clase de evento?*
  - *¿Qué significado le atribuyes a esa expresión?*
  - *¿En cuáles situaciones la has escuchado?*

Pierre-Simon Laplace.(1749-1827). Matemático y físico francés quien dedicó parte de su trabajo al cálculo de probabilidades.

1 Eventos más o menos probables

La probabilidad de un evento **A** puede ser comparada con la probabilidad de otro evento **B**. Esto es, es posible saber si un evento **A** es más, menos o igualmente probable que otro evento **B**.

EJEMPLO RESUELTO:

Comparar las probabilidades de los siguientes eventos aleatorios:

A: *Obtener un número menor que 3 al lanzar un dado.*

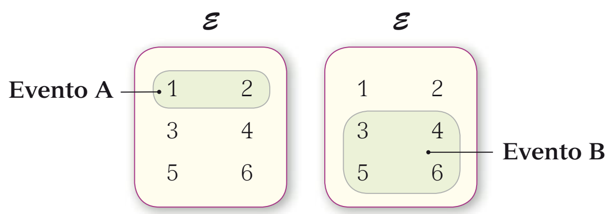
B: *Obtener un número mayor que 2 al lanzar un dado.*

En el caso del evento **A**, la expectativa está puesta en dos resultados, 1 y 2, todos menores que 3.

Para el evento **B**, se tiene la esperanza puesta en cuatro resultados, 3, 4, 5 y 6, todos mayores que 2.

Como la totalidad de resultados posibles está dada por el conjunto muestral $\mathcal{E} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, la probabilidad de ocurrencia del evento **B** es mayor que la del evento **A**, porque en **B** hay cuatro resultados esperados en tanto que en **A** hay tres.

La conclusión del ejemplo anterior puede ser visualizada en el esquema siguiente:



Hay más chance de conseguir un resultado del evento **B** que un resultado del evento **A**, porque **B** cubre una mayor área del espacio muestral, $\mathcal{E}$, que **A**.

Un evento seguro cubre todo el espacio muestral, porque los resultados esperados son todos los posibles. Si **A** es un evento seguro, entonces: $\mathbf{A} = \mathcal{E}$.

Un evento imposible no cubre parte alguna del espacio muestral, porque ninguno de los resultados esperados forma parte de $\mathcal{E}$.

Otras actividades

Plantear al grupo algunas situaciones para que determinen si la ocurrencia de algunas de ellas es más o menos probable que otra. Por ejemplo:

- En una tómbola hay dos bolas blancas y 5 bolas azules. *¿Es menos probable sacar una bola blanca que una bola azul? ¿Por qué?*

  Resp.: El número de bolas azules es mayor que el de las blancas, por lo tanto, las azules tienen más probabilidad.

- Al lanzar un dado de 6 caras, *¿es más probable sacar un número par que un 5? ¿Por qué?*

  Resp.: Los números pares de un dado son 2, 4 y 6, por lo tanto, tienen más probabilidad de salir que el 5.

- En un sorteo con boletos numerados del 1 al 100, *¿es más probable que se lleve el premio una persona con 10 boletos que otra que tiene 5? ¿Por qué?*

  Resp.: La persona con 10 boletos tiene más probabilidad de obtener el premio que la que tiene 5 boletos.

Sugerencias didácticas

- **Inicio:** Oriente a sus estudiantes para que lean y respondan en el aula las preguntas vinculadas a la recuperación de experiencias previas propuestas en el apartado *Recuperación*, relacionadas con el concepto de probabilidad. Motive al grupo a justificar sus respuestas.
- **Desarrollo:** Pida a sus estudiantes que lean cuidadosamente el contenido de la doble página, que analicen los conceptos y el desarrollo de los ejemplos resueltos. Motíveles para que observen la imagen del matemático y físico francés *Pierre-Simon Laplace* y lean el pie de la misma.

2 Cálculo de probabilidades

La probabilidad de un evento **e** es el cociente del número de casos favorables, **N**(**e**), y el número total de casos posibles, **N**.

La probabilidad de un evento, **e**, se obtiene con la regla de Laplace:

$$\mathbf{P}(\mathbf{e}) = \frac{\text{Número de casos favorables a } \mathbf{e}, \mathbf{N}(\mathbf{e})}{\text{Número total de casos posibles, } \mathbf{N}}$$

Con la expresión anterior se obtiene la probabilidad clásica o teórica de un evento aleatorio **e**, también llamada probabilidad *a priori*, porque se calcula antes de realizar el experimento.

EJEMPLOS RESUELTOS:

- Al lanzar una moneda, la probabilidad de obtener una cara (**C**) es $\frac{1}{2}$, porque hay solo un caso favorable al resultado cara, **N**(**C**) = 1 y hay **N** = 2 resultados posibles (**C**, **E**): **P**(**C**) = **N**(**C**)/**N** = 1/2.
- La probabilidad de que salga un número cualquiera **k**, al lanzar un dado es $\frac{1}{6}$, porque solo hay un caso favorable a la salida de dicho número, **N**(**k**) = 1 y **N** = 6 valores posibles, (1, 2, 3, 4, 5, 6): **P**(**k**) = **N**(**k**)/**N** = 1/6.
- La probabilidad de que al lanzar un dado se obtenga un número **k** mayor que 2 es $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$, porque hay **N**(**k**) = 4 casos favorables, (3, 4, 5, 6) y **N** = 6 casos posibles:

$$\mathbf{P}(\mathbf{k} > 2) = \mathbf{N}(\mathbf{k} > 2)/\mathbf{N} = 4/6 = 2/3.$$

MÁS INFORMACIÓN

Valores de la probabilidad

La probabilidad de un evento aleatorio **e**, es un número comprendido entre 0 y 1:

$$0 < \mathbf{P}(\mathbf{e}) < 1.$$

Un evento seguro tiene una probabilidad 1 y un evento imposible, probabilidad 0.

ACTIVIDADES

3 Resuelve los problemas.

- Se lanza al aire un dado octaédrico (ocho caras). ¿Cuál es la probabilidad de obtener un resultado 5? ¿Y un resultado par?¿Y un número menor que 7?
- Un curso tiene 15 estudiantes: 5 de 11 años, 6 de 12 y 4 de 13. ¿Qué probabilidad hay de elegir un estudiante de 12 años? ¿Y uno de 12 años o más?

4 Piensa y, luego, responde.

- La probabilidad de obtener una cara al lanzar una moneda es $\frac{1}{2}$. ¿Podría decirse con seguridad que si en dos lanzamientos, en el primero no se consiguió una cara, en el segundo sí se conseguirá?

Atención a la diversidad

Actividades de refuerzo: Pida al grupo que calculen las probabilidades de los siguientes eventos.

- El juego de dominó tiene 28 fichas.
  - *¿Cuál es la probabilidad de que al levantar una ficha se obtenga un número mayor que 8?*

    Resp.: {(3, 6), (4, 5), (4, 6), (5, 5), (5, 6), (6, 6)}

    P (< 8) = 6/28.
  - *¿Cuál es la probabilidad de que al levantar una ficha se obtenga un número múltiplo de 3?*

    Resp.: {(0, 3), (0, 6), (1, 6), (2, 4), (2, 6), (3, 3), (3, 6), (6, 6)}

    P (Múlt. de 3) = 8/28.
  - *¿Cuál es la probabilidad de que al levantar una ficha se obtenga un número menor que 5?*

    Resp.: {(0, 1), (1, 1), (1, 2), (2, 2), (0, 3), (1, 3)}

    P (> 5) = 6/28.
  - *¿Cuál es la probabilidad de que al levantar una ficha se obtenga un número par?*

    Resp.: {(0, 2), (0, 4), (0, 6), (1, 3), (1, 5), (2, 4), (2, 6), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6) }

    P (Número par) = 11/28.

Ficha 54.

- **Desarrollo:** Desarrolle los ejemplos resueltos en la pizarra y diseñe otros más para que los trabajen en sus cuadernos. Pida al grupo que lean y comenten el contenido del apartado *Más información*, que trata sobre los valores de la probabilidad.
- **Cierre:** Motive a sus estudiantes a realizar los ejercicios del apartado *Actividades*. En la actividad 3, resolverán problemas vinculados a la vida cotidiana en los que determinarán la probabilidad de varios eventos. En la actividad 4, leerán y pensarán sobre la situación planteada relacionada con el lanzamiento de una moneda.

Aprender a aprender

Pregunte a sus estudiantes:

- *¿Cuáles pasos siguieron para resolver el ejercicio 3 de las* Actividades*?*
- *¿Les resultó fácil realizarlo? ¿Por qué?*

Indicadores de logro

- **Escribe** probabilidades en forma decimal o porcentual.
- **Comprende** la probabilidad experimental.

Actividad interactiva

Medidas de centralización y de dispersión

Esta actividad presenta un gráfico de barras en el que se registran varias informaciones, con las cuales calcularán las medidas de centralización y dispersión que se les indican, después, arrastrarán las respuestas a sus recuadros correspondientes.

Otras actividades

A manera de repaso, pida a sus estudiantes que transformen las siguientes fracciones en números decimales.

- 1/5 = 0.2
- 2/4 = 0.5
- 3/4 = 0.75
- 5/8 = 0.625
- 1/5 = 0.2
- 2/4 = 0.5

Haga que escriban las fracciones con denominador 100 en forma porcentual.

- 15/100 = 15%
- 2/100 = 0.02%
- 80/100 = 80%
- 26/100 = 0.26%
- 50/100 = 50%
- 75/100 = 0.75%
- 8/100 = 0.08%
- 45/100 = 0.45%

RECUPERACIÓN

- **Escribe** las fracciones siguientes en forma decimal.

$\frac{1}{2}$ 0.5 $\frac{1}{4}$ 0.25 $\frac{2}{5}$ 0.4

$\frac{1}{3}$ 0.33 $\frac{3}{4}$ 0.75 $\frac{7}{8}$ 0.875

- **Escribe** las fracciones en forma de porcentaje.

$\frac{10}{100}$ 10 % $\frac{12}{100}$ 12 % $\frac{25}{100}$ 25 %

$\frac{48}{100}$ 48 % $\frac{3}{100}$ 3 % $\frac{94}{100}$ 94 %

1 Probabilidades como decimales y fracciones

Un número decimal puede ser escrito en forma de porcentaje. Basta con multiplicarlo por 100 y colocar a la derecha del resultado el símbolo %.

EJEMPLOS RESUELTOS:

- 0.50 = 0.50 x 100 = 50%
- 0.235 = 0.235 x 100 = 23.5%
- 0.78 = 0.78 x 100 = 78%
- 0.03 = 0.03 x 100 = 3%

Además de su forma fraccionaria, las probabilidades pueden ser escritas en formas decimal y porcentual.

Los procedimientos para escribir una probabilidad en forma decimal o porcentual son:

- Si se quiere expresar una probabilidad en forma decimal, basta con dividir el numerador de su escritura en forma fraccionaria por su denominador. El decimal resultante es la expresión decimal de la probabilidad.
- Para expresar la probabilidad en forma de porcentaje, se multiplica dicha probabilidad por 100.

Si se quiere obtener de manera directa la probabilidad de un evento en forma decimal, basta con utilizar la siguiente expresión:

$$\mathbf{P(e)} = \frac{\text{Número de casos favorables, } \mathbf{N(e)}}{\text{Número total de casos posibles, } \mathbf{N}} \times 100$$

EJEMPLOS RESUELTOS:

- ¿Cuál es la probabilidad, expresada en forma decimal, de elegir al azar una bola verde del conjunto de bolas de la izquierda?

  Para este problema **N(e)** = 2 y **N** = 10, entonces:

  $$\mathbf{P(e)} = \frac{2}{10} = 0.2.$$

- ¿Cuál es la probabilidad, expresada en forma decimal, de elegir al azar una bola que no sea verde o roja?

  Aquí **N(e)** = 6 y **N** = 10, entonces:

  $$\mathbf{P(e)} = \frac{6}{10} \times 100 = 60\%.$$

Sugerencias didácticas

- **Inicio:** Oriente a sus estudiantes para que resuelvan en el aula los ejercicios de recuperación de experiencias previas propuestos en el apartado *Recuperación*, relacionados con fracciones decimales y porcentuales.
- **Desarrollo:** Haga que lean cuidadosamente el contenido de la doble página, que observen el desarrollo de los ejemplos resueltos y las representaciones gráficas. Formúleles preguntas como, por ejemplo: *¿Por qué la probabilidad experimental se denomina también probabilidad a posteriori?*

2 Probabilidad empírica

El enfoque experimental de la probabilidad de un evento aleatorio la define como el número al que se acerca la frecuencia relativa de ese evento conforme crece el número de experimentos.

A la probabilidad así definida se llama probabilidad empírica o experimental. También se le llama probabilidad a posteriori, porque se determina después de realizados los experimentos aleatorios.

Observa el cuadro en el que se muestra cómo cambia el número de escudos, conforme aumenta el número de lanzamientos de una moneda.

Número de tiradas	10	20	30	40	50	60	70
Número de caras	6	7	12	22	22	25	33

A medida que aumenta el número de tiradas en cada experimento, la frecuencia relativa de las caras obtenidas se va acercando, con subidas y bajadas, al valor 0.5 que predice la probabilidad clásica.

Experimento 1, con 10 tiradas: f_r (E) = 6 /10 = 0.60.

Experimento 2, con 20 tiradas: f_r (E) = 7/20 = 0.35.

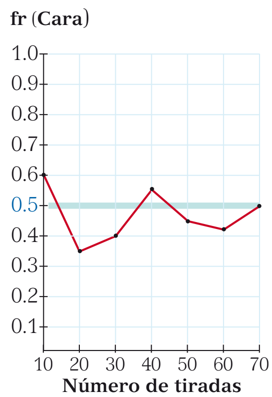
Experimento 3, con 30 tiradas: f_r (E) = 12/30 = 0.40.

Experimento 4, con 40 tiradas: f_r (E) = 22/40 = 0.55.

Experimento 5, con 50 tiradas: f_r (E) = 22/50 = 0.44.

Experimento 6, con 60 tiradas: f_r (E) = 25/60 = 0.42.

Experimento 7, con 70 tiradas: f_r (E) = 33/70 = 0.47.



Las frecuencias relativas varían alrededor de 0.5, acercándose a este valor.

ACTIVIDADES

5 Calcula las probabilidades siguientes y exprésalas en forma decimal y porcentual.

- La probabilidad de obtener un número primo al lanzar un dado. *0.5; 50%*
- La probabilidad de obtener un número menor que 6 al lanzar un dado. *0.83; 83%*

6 Piensa y, luego, escribe tus consideraciones en el cuaderno. Comparte tus reflexiones.

- ¿Por qué es razonable, en los experimentos con la moneda, que la probabilidad experimental se acerque a la teórica a medida que aumenta el número de experimentos aleatorios?

- **Desarrollo:** Explíqueles, en la pizarra, los ejemplos resueltos y prepare otros más para que los desarrollen en sus cuadernos. Envíeles a la pizarra para que calculen la probabilidad de diversos eventos. Motíveles para que comenten y analicen el gráfico del ejemplo de probabilidad empírica.
- **Cierre:** Motive a sus estudiantes a realizar los ejercicios del apartado *Actividades.* En la actividad 5, calcularán la probabilidad de varios eventos con el lanzamiento de un dado, luego, las expresarán en formas decimal y porcentual. En la actividad 6, expresarán por qué, en los experimentos con las monedas, la probabilidad experimental se acerca a la teórica a medida que aumenta el número de experimentos aleatorios.

Actividad grupal

Organice a sus estudiantes en grupos de 3 o 4 integrantes. Luego, pídales que tengan a la mano sus cuadernos para que calculen las probabilidades de los siguientes eventos y, después, las expresen en formas decimal y porcentual.

- La probabilidad de obtener un número par al lanzar un dado.

  Resp.: 3/6 = ½ = 0.5 = 50%.
- La probabilidad de obtener un número menor que 5 al lanzar un dado.

  Resp.: 4/6 = 2/3 = 0.67 = 67%.
- La probabilidad de obtener los números 5 y 6 al lanzar un dado.

  Resp.: 2/6 = 1/3 = 0.33 = 33%.
- La probabilidad de sacar una bola verde en una tómbola que tiene 5 bolas rojas, 4 verdes y 3 negras.

  Resp.: 4/12 = 1/3 = 0.33 = 33%.
- La probabilidad de sacar un número impar de una tómbola con 10 tarjetas numeradas del 1 al 10.

  Resp.: 5/10 = ½ = 0.5 = 50%.
- La probabilidad de sacar un número mayor que 3 al lanzar un dado de 8 caras.

  Resp.: 5/8 = 0.63 = 63%.

Ficha 55.

Aprender a aprender

Pregunte al grupo:

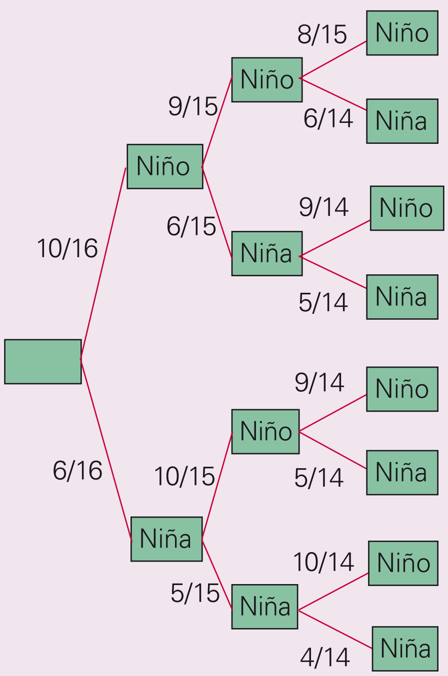
- *¿De qué manera se puede acercar la probabilidad experimental a la teórica?*

Indicadores de logro

- **Identifica** experimentos aleatorios simples y compuestos.
- **Construye** diagramas de árbol.
- **Calcula** probabilidades de eventos compuestos.

Más información

El diagrama de árbol permite determinar los resultados posibles de un experimento aleatorio. Para construir un diagrama de árbol se inicia colocando una rama para cada uno de los resultados posibles acompañado de su probabilidad. Del final de cada rama se forma un nudo de donde parten nuevas ramas de acuerdo con las probabilidades. Haga que observen el siguiente diagrama construido con un conjunto de 10 niños y 6 niñas, de los cuales se busca la posibilidad de que 3 sean niños.



Muéstreles que la suma de las probabilidades de las ramas siempre es 1 o la unidad. Solicíteles que lo comprueben.

RECUPERACIÓN

- **Piensa** antes de responder.
  - *¿La probabilidad de obtener dos caras al lanzar dos veces consecutivas una moneda es menor, igual o mayor que la de obtener una cara en un solo lanzamiento?*

1 Experimentos aleatorios simples y compuestos

Un experimento aleatorio simple es el realizado en una sola acción. Lanzar una moneda o un dado al aire son ejemplos de experimentos simples.

Un experimento aleatorio compuesto está formado por más de un experimento simple. Lanzar varias veces consecutivamente una moneda o un dado son experimentos compuestos.

Si se lanza una moneda dos veces seguidas, se obtendrá en la primera tirada o una *cara* (C) o un *escudo* (E). En la segunda tirada, los resultados serán, igualmente, o C o E. El espacio muestral del experimento compuesto de lanzar dos veces una moneda es: $\mathcal{E}$ = {CC, CE, EC, EE}.

Si se tiran al mismo tiempo las dos monedas, el espacio muestral es también $\mathcal{E}$ = {CC, CE, EC, EE}. Esto muestra que lanzar una moneda tres veces consecutivas equivale a lanzar dos monedas al mismo tiempo.

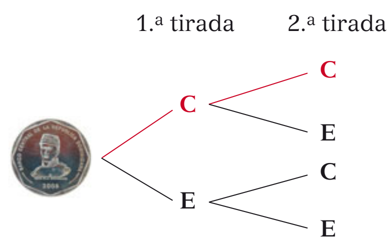
2 Diagramas de árbol

Un diagrama de árbol es un dispositivo gráfico para analizar experimentos aleatorios compuestos.

Un diagrama de árbol se va complejizando conforme se van realizando más experimentos aleatorios

EJEMPLOS:

- Construir el diagrama de árbol del experimento de lanzar dos veces una moneda.



Los segmentos que unen dos resultados son ramas del árbol. La parte coloreada del diagrama es un camino. Un camino está compuesto de ramas. En el diagrama anterior hay 4 caminos.

Sugerencias didácticas

- **Inicio:** Oriente a sus estudiantes para que lean, piensen y, luego, respondan en el aula la pregunta vinculada a la recuperación de experiencias previas propuesta en el apartado *Recuperación*, relacionada con el lanzamiento de una moneda.
- **Desarrollo:** Pídales que lean el contenido de la doble página, que observen los procedimientos aplicados en los ejemplos resueltos y las ilustraciones. Formúleles preguntas como, por ejemplo: *¿Qué es un experimento aleatorio simple? ¿Qué es un experimento aleatorio compuesto?* Continúe con las preguntas.

3 Probabilidades de eventos compuestos

En el experimento: *Tirar dos veces una moneda* solo hay un chance de que la moneda caiga cara dos veces seguidas, CC, de entre cuatro resultados posibles (CC, CE, EC, EE).

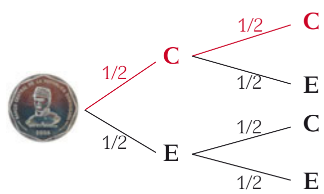
La probabilidad de obtener dos caras, CC, en el experimento de la moneda lanzada dos veces es:

$$\mathbf{P}(CC) = \frac{\text{Número de casos favorables al evento CC}}{\text{Número total de casos posibles}} = \frac{1}{4}$$

Esta probabilidad se obtiene con un diagrama de árbol.

EJEMPLO RESUELTO:

- Determinar en el siguiente diagrama de árbol la probabilidad de obtener dos caras, CC, al lanzar dos veces consecutivas una moneda.



La probabilidad de obtener el resultado CC es el producto de las probabilidades de las dos ramas del camino coloreado:

$$\mathbf{P}(CC) = \frac{1}{2} \times \quad = \frac{1}{4}$$

Fíjate que el resultado obtenido con la regla de Laplace y el diagrama de árbol son coincidentes.

La probabilidad de un evento de un camino es el producto de las probabilidades de sus ramas.

INTELIGENCIA COLABORATIVA

Cálculo de probabilidades

- **Reúnanse** en grupos y **calculen** las probabilidades de los siguientes eventos compuestos, usando la regla de Laplace.
  - Obtener una sola **C** al tirar dos veces una moneda.
  - Obtener por lo menos una E al tirar dos veces una moneda.
  - Obtener más de una **C** al tirar tres veces una moneda.
- **Comparen** sus resultados con los obtenidos por los demás grupos y **discutan** las diferencias, si las hubiere.

ACTIVIDADES

7 Escribe el espacio muestral de los experimentos compuestos siguientes.

- *Lanzar tres veces consecutivas una moneda.*
- *Lanzar primero una moneda y luego un dado.*
- *Lanzar dos veces seguidas un dado.*

8 Calcula las probabilidades mediante un diagrama de árbol.

- De obtener tres caras al lanzar tres veces consecutivas una moneda.
- De obtener dos resultados 5 al lanzar dos veces un dado.

- **Desarrollo:** Muestre a sus estudiantes el proceso de solución de los ejemplos resueltos de los conceptos relacionados con los experimentos aleatorios simples y compuestos. Diseñe otros ejercicios similares para que los desarrollen en sus cuadernos y en la pizarra. Motíveles para que realicen en grupos la actividad propuesta en el apartado *Inteligencia colaborativa,* relacionada con el cálculo de probabilidades. Haga que comparen los resultados con los obtenidos por los demás grupos y discutan las diferencias, si las hubiese.
- **Cierre:** Motive a sus estudiantes a realizar los ejercicios propuestos en el apartado *Actividades*. En la actividad 7, escribirán el espacio muestral de los experimentos compuestos que se les indican. En la actividad 8, calcularán las probabilidades indicadas mediante un diagrama de árbol.

Atención a la diversidad

Actividades de refuerzo: Pídales que construyan el espacio muestral de los siguientes eventos.

- Lanzar cuatro veces consecutivas una moneda.

  Respuesta:

  {CCCC, CCCE, CCEE, CEEE, EEEE, EEEC, EECC, ECCC}.

- Lanzar dos veces consecutivas un dado de 6 caras.

  Respuesta:

  {(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,4), (4,5), (4,6), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)}.

Ficha 56.

Actividad interactiva

Calcular probabilidades usando un diagrama de árbol

Este recursos muestra, en cuatro pasos, el procedimiento para calcular una probabilidad, mediante el uso del diagrama de árbol. El experimento aleatorio consiste en el lanzamiento de una moneda en tres ocasiones consecutivas.

Aprender a aprender

Pregunte al grupo:

- *¿Hubo algún aspecto de los desarrollados en la doble página que les resultara difícil? ¿Cuál de los temas?*
- *¿Qué medidas tomaron para superar el problema?*

Indicadores de logro

- **Realiza** operaciones de unión e intersección de eventos.
- **Determina** probabilidades de unión e intersección de eventos.
- **Identifica** eventos compatibles e incompatibles.

RECUPERACIÓN

- **Piensa** antes de responder.
- *¿Tienen algún resultado en común los siguientes eventos A y B, relacionados con el lanzamiento de un dado?*

  A: *Obtener un resultado menor que 3.*

  B: *Obtener un resultado mayor que 2.*
- *¿Cuál o cuáles son estos resultados comunes?*

La representación gráfica de un evento unión o intersección mediante figuras cerradas se llama **diagrama de Venn**.

1 Unión e intersección de eventos

La unión de dos eventos aleatorios, **A** y **B**, es la reunión de los resultados, comunes y no comunes, de ambos eventos.

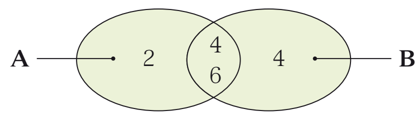
La unión de los eventos **A** y **B** se representa: **A ∪ B**. Al resultado de **A ∪ B** se llama evento unión.

EJEMPLO RESUELTO:

- Obtener la unión de **A**: *Obtener un número par al lanzar un dado* y **B**: *Obtener un número mayor que 3 al lanzar un dado.*

  Los eventos de **A** son los resultados pares: {2, 4, 6} y los eventos de **B**, son todos los resultados mayores que 3: {4, 5, 6}. Hay dos eventos comunes a **A** y a **B**, los resultados 4 y 6, y tres eventos no comunes, los resultados 4 y 5. El evento unión, **A ∪ B**, es: { 2, 4, 5, 6}.

  Si los eventos se representan por figuras cerradas, la gráfica del evento unión de **A** y **B** es la siguiente:



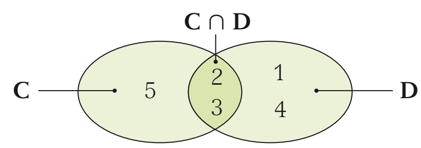
La intersección de dos eventos aleatorios, **A** y **B**, es la reunión de los resultados comunes de ambos eventos

La intersección de los eventos **A** y **B** se representa: **A ∩ B**. Al resultado de **A ∩ B** se llama evento intersección.

EJEMPLO RESUELTO:

- Determinar la intersección de los eventos **C**: *Obtener un número primo al lanzar un dado* y **D**: *Obtener un número menor que 5 al lanzar un dado.*

  Los eventos de **C** son los resultados pares: {2, 3, 5} y los eventos de **D**, son los resultados menores que 5: {1, 2, 3, 4}. Los eventos comunes a **C** y **D** son los resultados 2 y 3. El evento intersección, **C ∩ D**, es: {2, 3}.



Más información

Con relación a las operaciones con eventos aleatorios, comente a sus estudiantes que los eventos aleatorios forman parte de un espacio muestral, esto quiere decir que son subconjunto de un conjunto. Por tal motivo, es que pueden realizarse las operaciones con conjuntos con los mismos: la unión, la intersección y la diferencia.

Por ejemplo, los eventos:

A = {1, 2, 3, 4, 5}

B = {2, 4, 6}

A ∪ B = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

A ∩ B = {2, 4}

Probabilidades de la unión e intersección: 5/8 + 3/8 – 2/8 = 6/8.

Sugerencias didácticas

- **Inicio:** Oriente a sus estudiantes para que lean y respondan en el aula las preguntas vinculadas a la recuperación de experiencias previas propuestas en el apartado *Recuperación,* relacionadas con los resultados posibles tras el lanzamiento de un dado.
- **Desarrollo:** Pida a sus estudiantes que lean cuidadosamente el contenido de la doble página, que observen las representaciones gráficas de cada concepto y los ejemplos resueltos. Después, pregúnteles: *¿Cuáles son los resultados que participan en la operación de intersección de dos eventos?* Pídales que lean y comenten la información de la imagen de la niña.

3 Probabilidades de la unión e intersección de eventos

La probabilidad del evento intersección, **P**(**A** ∩ **B**), se obtiene utilizando la regla de Laplace.

EJEMPLO RESUELTO:

- Determinar la probabilidad la intersección de los eventos relativos al lanzamiento de un dado: **A**: *Obtener un número menor que 5* y **B**: *Obtener un número mayor que 3*.

  Como **A** = {1, 2, 3, 4} y B = {4, 5, 6}, entonces: **A** ∩ **B** = {4}.

  Luego, aplicando la regla de Laplace: **P**(**A** ∩ **B**) = 1/6.

Si **P**(**A**) y **P**(**B**) son las probabilidades de los eventos **A** y **B**, la probabilidad de su unión, **P**(**A** ∪ **B**), se obtiene con:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

La probabilidad de un, **P**(**A** ∪ **B**), es la suma de las probabilidades de los sucesos **A** y **B**, menos la probabilidad de su intersección, **P**(**A** ∩ **B**).

EJEMPLO RESUELTO:

- Determinar la probabilidad de que, al lanzar un dado, se obtenga un número impar o un número primo.

  Aquí: **A**: *Obtener un número impar*.

  B: *Obtener un número primo*.

  El evento **A** está constituido por los resultados {1, 3, 5}. Luego, **P**(**A**) = 3/6.

  El evento **B** está formado por {2, 3, 5}. Luego, **P**(**B**) = 3/6.

  El evento intersección es {3, 5}, luego, **P**(**A** ∩ **B**) = 2/6.

  Entonces, la probabilidad de la unión de los eventos **A** y **B** es: **P**(**A** ∩ **B**) = 3/6 + 3/6 – 2/6 = 4/6.

MÁS INFORMACIÓN

Eventos compatibles e incompatibles

Dos eventos, **A** y **B**, son compatibles si tienen algún resultado común, y son incompatibles, si no tienen resultados comunes.

Ejemplo:

- En el lanzamiento de un dado, los eventos **A** = {1, 2, 3} y **B** = {3, 4, 5, 6} son compatibles. En cambio, los eventos **C** = {1, 2, 3} y **D** ={4, 5} son incompatibles.

Dos eventos, **A** y **B**, son contrarios, cuando son incompatibles y, además, la suma de sus probabilidades es 1: **P**(**A**) + **P**(**B**) = 1.

Ejemplo:

- En el lanzamiento de un dado, los eventos **M** ={1, 2, 3} y **N** ={4, 5, 6}, son contrarios porque, además de ser incompatibles, se verifica que: **P**(**M**) + **P**(**N**) = 1.

ACTIVIDADES

9. Escribe la unión y la intersección de los eventos, **C**: *Obtener al menos una cara al lanzar dos monedas al aire número* y **D**: *Obtener solo un escudo al lanzar dos monedas al aire*.
   ***A** ∪ **B** = {CC, CE, EC }; **A** ∩ **B** = { CE, EC}.*
10. Explica por qué no son eventos contrarios, los siguientes resultados del lanzamiento de un dado, **A** = {1, 2, 3} y **B** = {5, 6}. *Porque, aunque son incompatibles,* ***P**(**A**) + **P**(**B**) ≠ 1.*

- **Desarrollo:** Proponga a sus estudiantes que lean el contenido del apartado *Más información*, que trata sobre los eventos compatibles e incompatibles. Muéstreles en la pizarra el desarrollo de los ejemplos resueltos e invente otros más para que los desarrollen en sus cuadernos.
- **Cierre:** Motive a sus estudiantes a realizar los ejercicios del apartado *Actividades*. En la actividad 9, escribirán la unión y la intersección de los eventos C y D. En la actividad 10, explicarán por qué no son eventos contrarios los resultados indicados del lanzamiento de un dado.

Atención a la diversidad

Actividades de refuerzo: Pida al grupo que clasifiquen los siguientes eventos en compatibles e incompatibles.

- **A** = {4, 8, 12, 16}
- **B** = {2, 3, 4, 5}

  Resp.: son compatibles, tienen un resultado en común.

- **A** = {1, 3, 5, 7}
- **B** = {2, 4, 6, 8}
- Resp.: son incompatibles, no tienen resultados comunes.
- **M** = {4, 9, 10, 12}
- **N** = {2, 6, 8,11}

  Resp.: son incompatibles y contrarios, la suma de sus probabilidades es igual a 1.

Haga que efectúen las operaciones de unión e intersección de los siguientes eventos.

- **A** = {1, 3, 5, 7}
- **B** = {2, 3, 4, 5}

  Resp.: A U B = {1, 2, 3, 4, 5, 7}

  A ∩ B = {3, 5}

Ficha 57.

Aprender a aprender

Pregunte al grupo:

- *¿Cómo contribuyen en su formación educativa los temas estudiados en esta doble página?*
- *¿Podrían dar ejemplos que confirmen sus respuestas?*

Competencias

- Comunicativa.
- Uso de algoritmos.
- Resolución de problemas.

Indicadores de logro

- **Reconoce** experimentos deterministas y aleatorios. **Identifica** el concepto de probabilidad. **Identifica** el concepto de espacio muestral. **Identifica** eventos más o menos probables. **Calcula** la probabilidad de un evento. **Escribe** probabilidades en forma decimal o porcentual. **Comprende** la probabilidad experimental. **Identifica** experimentos aleatorios simples y compuestos. **Construye** diagramas de árbol. **Calcula** probabilidades de eventos compuestos. **Realiza** operaciones de unión e intersección de eventos. **Determina** probabilidades de unión e intersección de eventos. **Identifica** eventos compatibles e incompatibles. **Resuelve** problemas del contexto donde aplica diversos experimentos estadísticos.

ACTIVIDADES

11 Marca con X los experimentos aleatorios.

- El número que saldrá con el premio de la lotería. X
- Obtener una cara o un escudo al lanzar una moneda.
- Acertar con el número con que termina una placa de un carro. X
- Esperar a que un trozo de hielo se funda con el calor.
- Sacar una bola verde de una funda que contiene 3 bolas verdes, 5 azules y 2 rojas. X

12 Escribe el espacio muestral y los eventos favorables.

- Se lanzan tres monedas al aire y se esperan exactamente 2 caras.
  *{CCC, **CCE**, **CEC**, **ECC**, CEE, ECE, EEC, EEE}*
- Se extrae de una funda un boleto de 10 numerados del 1 al 10 y se espera sacar un número impar.
  {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}
- Se lanza primero una moneda al aire y luego un dado y se esperan una cara y un 6.
  *{C1, C2, C3, C4, C5, **C6**, E1, E2, E3, E4, E5, E6,}.*
- Se lanzan dos dados al aire y se esperan sacar dos números iguales. *{11, 12, 13, 14, 15, 16, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 61, 62, 63, 64, 65, 66}*
- Se lanzan dos dados y se espera que la suma de los números sea 5. *{11, 12, 13, **14**, 15, 16, 21, 22, **23**, 24, 25, 26, 31, **32**, 33, 34, 35, 36, **41**, 42, 43, 44, 45, 46, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 61, 62, 63, 64, 65, 66}*

13 Piensa y, luego, responde las preguntas.

Una funda **A** tiene 3 bolas rojas, 2 azules y 1 verde y, una funda **B**, 2 bolas roja, 4 azules y 3 verdes. Se gana un premio si se saca de cualquiera de las fundas, en un solo intento, una bola verde.

- Si puedes tomar solo una de las fundas, ¿cuál elegirías para tener más chance de ganar?
  La funda B.
- ¿En qué sustentaste tu elección?
  *La probabilidad de sacar una bola verde en la funda **A** (1/6) es menor que la de sacar una bola verde en la funda **B** (1/3).*

14 Calcula las probabilidades de obtener los siguientes resultados del lanzamiento de tres monedas al aire.

- Exactamente una cara. *3/8*
- Al menos, una cara. *7/8*
- Tres escudos. *1/8*
- Exactamente dos escudos. *3/8*
- Como mínimo un escudo. *7/8*

15 Resuelve los problemas. Expresa las probabilidades porcentualmente.

- En un salón de clases hay 25 estudiantes, 14 de los cuales son hembras.
  - ¿Cuál es la probabilidad de que al elegir, al azar, sea una estudiante? *56 %*
  - ¿Y la probabilidad de que sea un estudiante? *44 %*
  - ¿Qué probabilidad hay de elegir un estudiante o una estudiante? *100 %*
- En una escuela con 20 maestros, algunos hablan lenguas extranjeras, además del español. Hay 8 de ellos que hablan inglés, 2 que hablan francés y uno que habla inglés y francés. *45 %*
  - Si se elige un maestro al azar, ¿cuál es la probabilidad de que hable solo el español?
  - ¿Cuál es la probabilidad de que hable inglés, pero no francés? *40 %*
  - ¿Cuál es la probabilidad de que hable francés, pero no inglés? *10 %*
  - ¿Cuál es la probabilidad de que hable inglés o francés? *55 %*

Competencias fundamentales

Competencia comunicativa

Es necesario que los estudiantes adquieran las habilidades necesarias para identificar si un experimento es determinista o aleatorio, calcular la probabilidad de ocurrencia de un evento y efectuar operaciones con eventos diversos.

Uso de algoritmos

Las reglas y procedimientos en la resolución de operaciones aritméticas son vitales para la persecución de resultados correctos. Por ejemplo, en las operaciones relacionadas con el cálculo de probabilidades y las operaciones con eventos diversos.

Sugerencias didácticas

- Las actividades propuestas en esta página están estrechamente vinculadas a los conceptos y procedimientos desarrollados a lo largo de la unidad. Haga que lean cuidadosamente las instrucciones y, después, verifique las respuestas obtenidas.
- Es importante observar de cerca que los estudiantes diferencian los experimentos deterministas y aleatorios, que siguen adecuadamente los pasos para efectuar las operaciones de unión e intersección de diversos eventos y para calcular las probabilidades de ocurrencia de los mismos.

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

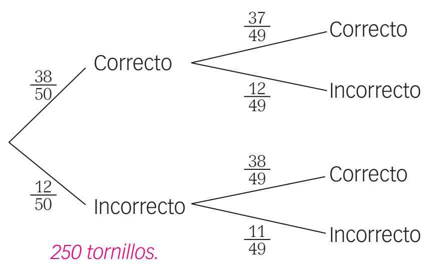
16 Resuelve el problema.

- Una fábrica de tornillos ha recibido quejas de una empresa que los utiliza. La queja consiste en que la longitud de los tornillos presenta variaciones que perjudican a los equipos electrónicos en cuya construcción se utilizan.

  Para comprobar lo atendible de la queja, la fábrica de tornillos tomó una muestra al azar de 50 de ellos, midió sus longitudes y construyó la siguiente tabla. El largo correcto de los tornillos es de 5 mm.

Longitud	Frecuencia
< 5 mm	4
5 mm	38
> 5 mm	8
Total	50

- Usando la muestra como referencia, ¿qué expectativas hay de que al escoger un tornillo al azar este no tenga la longitud adecuada? *24 %*
- Si las expectativas de obtener un tornillo de largo inadecuado son aceptables hasta un 5%, ¿cuántos tornillos no adecuados en una muestra de 50 unidades se aceptarían? *3 tornillos.*
- ¿Cuántos tornillos de largo inadecuado se esperarían en un lote de 5 000 tornillos? *250 tornillos.*
- Observa el diagrama de árbol de la prueba de sacar al azar, dos veces seguidas, un tornillo, sin regresarlo a la muestra y di por qué son esas las probabilidades de cada rama.

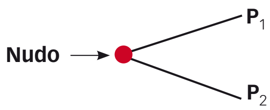


250 tornillos.

Porque los eventos de ramas que salen de un mismo nudo cubren el espacio muestral.

17 Piensa y, luego, responde.

- ¿Por qué la suma de las probabilidades de cada una de las ramas que salen de un mismo nudo del árbol debe ser la unidad? *Respuesta*



$P_1 + P_2 = 1.$

- La probabilidad de que no llueva en una semana es de alrededor de un 23%. ¿Cuál es la probabilidad de que llueva en esa semana? *77 %*

18 Lee, observa la tabla y, luego, responde.

En un colegio, se preguntó a los estudiantes si estaban de acuerdo o no con la fecha que fue elegida por la dirección para disfrutar de un pasadía en el Jardín Botánico para celebrar el fin del año escolar.

Para contestar las preguntas, utiliza la siguiente tabla en la que se muestran las respuestas dadas por los estudiantes.

	Sí	No	Total
Varones	82	28	110
Hembras	60	30	90
Total	142	58	200

- ¿Qué probabilidad hay de escoger al azar un estudiante que esté de acuerdo con la fecha? *0.71 %*
- ¿Cuál es la probabilidad de que, al elegir un estudiante al azar, se elija una hembra que no esté de acuerdo con la fecha? *0.15 %*
- ¿Qué probabilidad hay de escoger, entre los que están de acuerdo con la fecha, un varón? *0.58 %*
- ¿Cuál es la probabilidad de elegir, entre las hembras, una que no esté de acuerdo con la fecha? *0.33 %*
- ¿Y de elegir un varón, de entre todos los estudiantes, que esté de acuerdo con la fecha? *0.41 %*

Competencias fundamentales

Resolución de problemas

- Las habilidades y destrezas adquiridas por los estudiantes son necesarias para identificar las alternativas más convenientes en la persecución de la solución de problemas que forman parte de su diario vivir. En este aspecto radica la importancia de que los estudiantes adquieran las destrezas necesarias en los aspectos relacionados con el cálculo de probabilidades y las operaciones con eventos diversos.

Criterios de evaluación

Competencia comunicativa:

- Adaptación de las representaciones gráficas, simbólicas y numéricas a la situación de comunicación.

Uso de algoritmos:

- Seguimiento de las reglas, instrucciones y procedimientos.

Resolución de problemas:

- Adecuación de las estrategias y procedimientos al tipo de problema y al contexto.

Sugerencias didácticas

- **Resolución de problemas**. Proponga a sus estudiantes que lean detenidamente las instrucciones de los problemas propuestos en las actividades 14, 15 y 16. Estos problemas son aplicaciones cotidianas de los conceptos y procedimientos estadísticos estudiados en la unidad. Acompañe a sus estudiantes en la realización de estas actividades y ofrézcales las orientaciones necesarias.

Aprender a aprender

Motive a sus estudiantes para que inventen ejemplos de las aplicaciones cotidianas de los conceptos desarrollados en la unidad. Por ejemplo, pregunte al grupo:

- *¿Qué importancia tiene el uso de las probabilidades en la toma de decisiones?*

Discuta las diversas respuestas con el grupo.

Indicadores de logro de la evaluación

- **Reconoce** experimentos deterministas y aleatorios. **Identifica** el concepto de probabilidad. **Identifica** el concepto de espacio muestral. **Identifica** eventos más o menos probables. **Calcula** la probabilidad de un evento. **Escribe** probabilidades en forma decimal o porcentual. **Comprende** la probabilidad experimental. **Identifica** experimentos aleatorios simples y compuestos. **Construye** diagramas de árbol. **Calcula** probabilidades de eventos compuestos. **Realiza** operaciones de unión e intersección de eventos. **Determina** probabilidades de unión e intersección de eventos. **Identifica** eventos compatibles e incompatibles. **Resuelve** problemas del contexto donde aplica diversos experimentos estadísticos. **Utiliza** recursos virtuales y electrónicos: computadora, softwares educativos, juegos interactivos y otros, en la búsqueda de información.

Competencias específicas

- Comunica.
- Razona y argumenta.
- Usa algoritmos.
- Conecta.

Aprender a aprender

Preguntar al grupo:

- *¿Puede realizarse la operación de intersección en dos eventos incompatibles?*
- *¿Por qué?*

EVALUACIÓN

Comunica

19 Haz lo que se te pide.

- Describe un experimento aleatorio cuyo espacio muestral tenga tres eventos y di cómo calcularías la probabilidad de uno cualquiera de ellos.
- Explica en qué consiste el principio de la equiprobabilidad.

Razona y argumenta

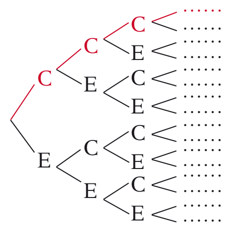
20 Piensa antes de responder.

- ¿Por qué es correcta la siguiente afirmación?

*La probabilidad **P** de cualquier evento está entre 0 y 1, incluyendo los valores 0 y 1.*

- ¿La afirmación anterior contradice a la afirmación del recuadro *Más información* de la página 179 de este libro? ¿Por qué?

21 Demuestra con un diagrama de árbol que en un experimento compuesto de **N** tiradas de una moneda, la probabilidad de obtener **N** caras seguidas es 2^{-N} . NOTA: Calcula las probabilidades para que en **N** = 1, 2, 3,… tiradas se obtengan los resultados C, CC, CCC,… sucesivamente.



$\mathbf{P}(\underbrace{CCC \ldots C}_{\mathbf{N}\text{ veces}}) = 2^{-\mathbf{N}}$

22 Escribe el espacio muestral de los siguientes experimentos aleatorios.

- **A**) Sacar una tarjeta de una funda que tiene 5 tarjetas marcadas con los números 1, 3, 5 y 6. *{1, 3, 5, 6}.*
- **B**) Sacar simultáneamente dos bolas de una caja que contiene 5 bolas cada una con una vocal. *{ae, ai, ao, au, ei, eo, eu, io, iu}.*
- **C**) Lanzar al aire dos monedas y un dado. *{cc1, cc2, cc3, cc4, cc5, cc6, ce1, ce2, ce3, ce4, ce5, ce6, ec1, ec2, ec3, ec4, ec5, ec6, ee1, ee2, ee3, ee4, ee5, ee6}.*

Usa algoritmos

23 Calcula la probabilidad de los eventos **A**, **B** y **C**, relativos a la actividad anterior.

- De obtener un número impar al sacar una tarjeta de la funda. *0.75*
- De obtener dos vocales fuertes al extraer dos bolas de la caja. *0.33*
- De obtener al menos una cara y un número menor que 5 al lanzar dos monedas y un dado. *0.50*

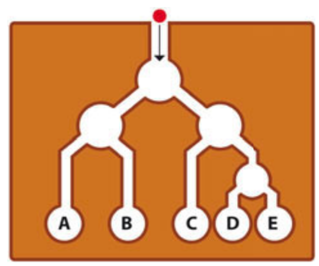
24 Calcula las probabilidades siguientes.

El experimento consiste en sacar una bola de una tómbola, en la que hay 100 bolas numeradas del 1 al 100.

- De que el número extraído sea mayor o igual que 30. *0.71*
- De que el número extraído termine en 0. *0.10*
- La probabilidad de que el número extraído esté comprendido entre 40 y 50. *0.09*
- De que el número extraído tenga dos cifras y las decenas sean mayores que las unidades. *0.46*

Conecta

25 Si se deja caer una bola por el orificio superior, ¿cuál es la probabilidad de que llegue a cada compartimiento **A**, **B**, **C**, **D** y **E**?



- Comprueba que la suma de las probabilidades de que la bola caiga en cada compartimiento es igual a la unidad. ¿Por qué?
  ***P**(**A**) = **P**(**B**) = **P**(**C**) = 0.25. **P**(**D**) = **P**(**E**) = 0.125.*

Sugerencias didáctica para la evaluación

- Es importante verificar, antes de dar inicio a las actividades de evaluación, que sus estudiantes identifican los experimentos deterministas y aleatorios. Observe que efectúen de forma correcta el cálculo de las probabilidades de un evento y las operaciones de unión e intersección de eventos. Además, que diferencien un evento compatible de uno incompatible.
- Si cuenta con tecnología como refuerzo, puede aplicar la prueba de la unidad que se encuentra en la plataforma didáctica Pleno.

26 **Estudio de caso**. Lean el texto y, luego, hagan lo que se les pide.

La probabilidad de un evento puede ser estimada mediante experimentos sucesivos. A medida que aumentamos el número de estos experimentos, la frecuencia relativa del evento esperado en cada uno de ellos varía en torno a un determinado valor y se acerca a este. Este valor es la probabilidad experimental de ocurrencia del evento.

- Formen grupos de un máximo de 5 estudiantes y lancen una moneda tantas veces como se muestra en la tabla, anotando cuántas caras obtuvieron en cada conjunto de lanzamientos. Llenen la tabla.

Número de lanzamientos, N	5	10	20	30	40	50
Número de caras obtenidas, n	…..	…..	…..	…..	…..	…..
Frecuencias relativas, n/N	…..	…..	…..	…..	…..	…..

- Hagan una gráfica poligonal con los datos de la tabla, tomando como modelo la gráfica de la página 181.
- Respondan. ¿Se acercan las frecuencias relativas a 0.5? Comenten entre sí los resultados.

27 Responde las preguntas.

- ¿Cómo puede afectar a la salud mental o emocional la práctica continua de los juegos de azar?
- ¿Qué daños a la economía personal o familiar puede provocar el juego compulsivo?

APRENDIZAJE AUTÓNOMO

28 Marca según tus logros.	Iniciado	En proceso	Logrado
• Reconozco experimentos deterministas y aleatorios.	☐	☐	☐
• Calculo probabilidades y las expreso de distintas formas.	☐	☐	☐
• Comprendo la probabilidad experimental.	☐	☐	☐
• Construyo diagramas de árbol.	☐	☐	☐

27 Reflexiona sobre tu aprendizaje.

- ¿Cuáles de los temas estudiados te parecieron más interesantes?
- ¿Qué importancia le ves a esos temas que seleccionaste?
- ¿Cómo aplicarías los conocimientos adquiridos en esta unidad en tu vida diaria?

Estudio de caso

- En la actividad 26, *Estudio de caso*, leerán un texto relacionado con la probabilidad experimental de la ocurrencia de un evento. En este caso, formarán grupos, lanzarán una moneda tantas veces como indica la tabla, luego, harán lo que se les indica y, finalmente, responderán las preguntas en sus cuadernos.

Actitudes y valores

Salud

En la sección destinada a *Actitudes y valores*, actividad 25, responderán cómo puede afectar a nuestra salud mental y emocional la práctica continua de los juegos de azar. Expresarán qué daños a la economía personal o familiar puede provocar el juego compulsivo.

Aprendizaje autónomo

- En el apartado *Aprendizaje autónomo*, actividad 26, evaluarán por ellos mismos si los conceptos y procedimientos que trabajaron en la unidad se encuentran en estado de iniciación, en proceso o logrados. En la actividad 27, reflexionarán sobre su proceso de aprendizaje.

Sugerencias didáctica para la evaluación

- Pregunte a sus estudiantes:
  - — *¿Qué es un experimento determinista?*
  - — *¿Qué es un experimento aleatorio?*
  - — *¿Qué elementos participan en la operación de unión de dos eventos?*
  - — *¿Qué elementos participan en la operación de intersección de dos eventos?*
  - — *¿Cuándo se dice que dos experimentos son compatibles?*

Aprender a aprender

- Haga que sus estudiantes apliquen los conceptos aprendidos en la unidad en situaciones de la cotidianidad, por ejemplo, preguntar:
  - — *¿Cuál es la importancia del uso del cálculo de probabilidades en el pronóstico del tiempo?*

Competencias fundamentales

- **Competencia científica y tecnológica**: Reconoce los avances del conocimiento matemático y emplea instrumentos tecnológicos para comprobar relaciones numéricas.
- **Pensamiento lógico, creativo y crítico**: Emplea correctamente procesos para comprobar proposicones matemáticas.

Indicadores de logro

- **Conoce** la importancia y el significado del número llamado *fi*.
- **Identifica** la presencia del número llamado *fi* en la naturaleza y en el arte.
- **Identifica** la presencia del número llamado *fi* en un segmento de recta.
- **Construye** rectángulos áureos de acuerdo con las especificaciones indicadas.

SABER HACER **Duración**: 2 sesiones de clase.

Proyecto

El empleo de proyectos en la enseñanza de las matemáticas favorece el desarrollo de las competencias fundamentales y propias del área del nuevo modelo curricular.

El trabajo con el proyecto podría ser desarrollado individual o grupalmente y discutido tras su realización en el aula.

Sugerencias didácticas

En este proyecto II, *Un extraño número llamado fi*, los estudiantes pondrán en práctica conocimientos adquiridos hasta ahora, en un contexto distinto vinculado a la vida cotidiana. Es importante acompañarles en el proceso y ofrecerles las orientaciones necesarias.

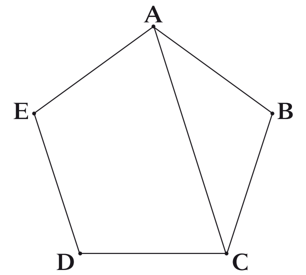
Un extraño número llamado *fi*

1 ¿Qué es el número *fi*?

Después de π (*pi*), el llamado número de oro, número áureo o, simplemente, número *fi*, es tal vez uno de los números que más ha llamado la atención en la historia, por su misteriosa relación con la belleza de muchas formas de la naturaleza y del arte.

Observa el pentágono regular de la derecha. El número de oro es la relación entre la longitud de la diagonal, $\overline{AC}$, de un pentágono regular y su lado, $\overline{AB}$.

Fi no es un número racional, esto es no puede ser escrito como un decimal exacto o periódico.

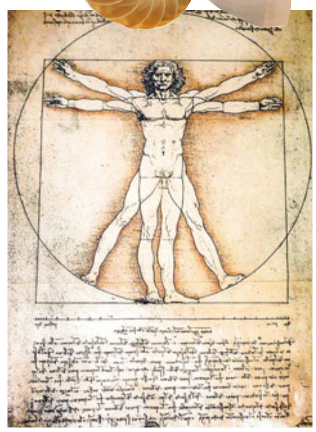


$$fi = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5}) \approx 1.618033\ldots$$

2 La presencia de *fi* en la naturaleza y en el arte

El número *fi* está presente en muchas formas espirales como la de algunas conchas de moluscos.

Si observas con atención el centro del girasol, notarás que en su diseño hay presente una combinación de espirales en sentidos opuestos que se acercan a un punto. El número de espirales en uno y otro sentido guarda relación con *fi*.



En algunas proporciones entre partes del cuerpo humano se obtienen razones muy cercanas al número aúreo.

El Partenón de Atenas, una obra de la arquitectura griega clásica, muestra una razón cercana a fi entre su anchura y su altura.

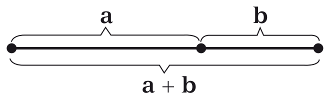
Sugerencias didácticas

- **Inicio:** Motivar al grupo para que lean y comenten en el aula el texto que expresa qué es el número *fi* y la presencia del *fi* en la naturaleza y en el arte. Pídales que observen y comenten las ilustraciones.
- **Desarrollo:** Pídales que lean en el grupo las informaciones relacionadas con el número *fi* en un segmento de recta. Haga que se fijen en la representación del rectángulo áureo de base **a** + **b** y de altura **a**.

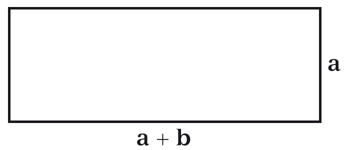
SABER HACER

3 El número *fi* en un segmento de recta

El segmento $\overline{AB}$ estará dividido con razón áurea si se compone de otros dos segmentos, uno mayor de longitud **a** y otro menor de longitud **b**, y se cumple que la razón de la longitud total del segmento, **a** + **b**, y la de su parte mayor, **a**, es igual a la razón entre la longitud de la parte mayor, **a**, y la de su parte menor.

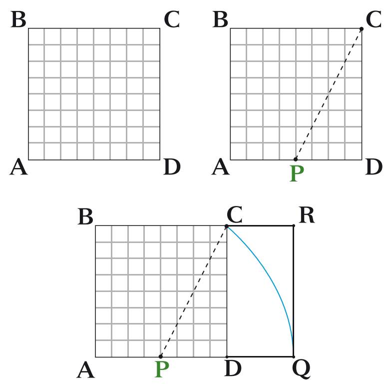


Un rectángulo de base de longitud **a** + **b** y de altura de longitud **a** se llama rectángulo áureo.



$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} = 1.618033\ldots$$

- **Construyan**, en grupos, lo que se les pide.
- Un rectángulo áureo siguiendo las instrucciones y el modelo.
  - **Traza** un cuadrado **ABCD** sobre una hoja de papel cuadriculado. **Escoge** un lado que tenga por longitud un número par de unidades.
  - **Ubica** el punto medio **P** de la base del cuadrado y, desde **P**, **traza** un segmento hasta el vértice **C**.
  - Con radio $\overline{PC}$ y centro en **P**, traza un arco que corte a la base prolongada en **Q** y une con un segmento al vértice **A** con el punto **Q**. El rectángulo **ABRQ** es el rectángulo áureo buscado. Compruébalo.

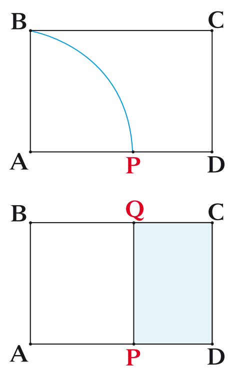


- Un rectángulo áureo a partir de otro.

Den los pasos indicados.

Un rectángulo áureo tiene la propiedad de que a partir de él se pueden construir incontables rectángulos áureos.

  - Si **ABCD** es un rectángulo áureo, con centro en **A** y radio $\overline{AB}$, se traza un arco que corte al lado $\overline{AD}$ en un punto **P**.
  - Luego, **traza** desde **P** un segmento perpendicular que toque al lado **BC** en un punto **Q**. El rectángulo **PQCD** es otro rectángulo áureo. ¿Cómo lo compruebas? **Hazlo**.



- **Comprueben**, usando la calculadora, que la razón áurea cumple con las siguientes propiedades.
  - Su cuadrado, fi^2 y su recíproca, $1/fi$, tienen la misma parte decimal.
  - Su cuadrado, fi^2, es el mismo *fi* aumentado en 1:

$$fi^2 = fi + 1.$$

- **Compartan** y **comenten** los resultados obtenidos por los distintos grupos.

- **Desarrollo:** Lean en el grupo los problemas propuestos en esta página y los procedimientos que deberán aplicar para alcanzar trazar o construir las figuras propuestas. Observe de cerca que ubican los puntos como se les indica para realizar correctamente el trazado de las figuras.
- **Cierre:** En la última actividad seguirán los mismo procedimientos para el trazado y, luego, comprobarán, usando la calculadora, que la razón áurea *fi* cumple con las propiedades indicadas. Ofrézcales las orientaciones que sean necesarias.

Otras sugerencias

Es importante explicar a los estudiantes en qué consiste el proyecto II, *Un extraño número llamado fi*. Hacer un breve comentario acerca de la presencia de la Matemática en la vida cotidiana y en aspectos relacionados con la naturaleza y el arte, como es el caso de las actividades que realizarán en este proyecto.

Forme en grupos y pídales que lean los pasos para construir el rectángulo áureo que se les indica. Para este fin, haga que sigan las instrucciones y que observen las figuras representativas del procedimiento.

Motíveles para que lean y comenten las informaciones sobre el siguiente rectángulo que construirán. Haga que sigan los pasos como se les indica en las instrucciones. Motíveles para que se fijen en la representación de los mismos en las figuras de la derecha de la página.

Acompáñeles y oriénteles en el proceso de realización de las actividades involucradas en este proyecto.

Previsión de dificultades

- Durante el proyecto los estudiantes podrían encontrar dificultades. Hágales las precisiones y sugerencias que sean necesarias para su mejor desempeño en la realización de las actividades.

Aprender a aprender

Pregunte al grupo:

- *¿Hubo alguno de los temas involucrados en este proyecto que les resultara difícil?*

B Las matemáticas de la vida

Propuesta de programación

ÁREAS	COMPETENCIAS ESPECÍFICAS	CONTENIDOS		
		Conceptuales	**Procedimentales**	**Actitudinales**
Matemática	• **Comunica**: **Expresa** con la notación adecuada las experiencias con medidas que ha experimentado en su diario vivir. **Usa** los símbolos de las unidades área y volumen. • **Modelar** y **representar**: **Usa** los símbolos de las unidades de área y volumen en diferentes sistemas de medidas. • **Usa algoritmo**: **Sigue** las reglas que les permiten obtener un resultado al resolver problemas que involucran cálculo de área y volumen de cuerpos diversos. • **Conecta**: **Aplica** las diferentes unidades de área y volumen para resolver problemas de situaciones del contexto, de otras ciencias y de la propia matemática. • **Resuelve problemas**: **Resuelve** problemas que involucran el cálculo de área y volumen de distintos cuerpos.	• Área y volumen de cuerpos geométricos. • Simetría y operaciones de simetría. • Determinación de la razón área/volumen. • Identificación y trazado de ejes y planos de simetría.	• Cálculo de áreas y volúmenes de cuerpos diversos y sus razones correspondientes. • Identificación de simetrías diversas en el entorno. • Resolución de problemas que involucran cálculo de áreas y volúmenes de cuerpos diversos.	• Valoración de la diversidad de los seres vivos. • Apreciación de un entorno saludable.
Ciencias Naturales	• **Comprende** la biosfera como el espacio de interacción de los seres vivos en el planeta Tierra.	• Los seres vivos.	• Identificación de la función e importancia de los organismos vivos en las diferentes capas de la Tierra.	• Demuestra interés en el cuidado de su salud y de los demás, así como adopción de medidas de seguridad en situaciones de riesgo.

Competencias fundamentales

Resolución de problemas: **Plantea** y **resuelve** problemas sobre situaciones del entorno que involucran el cálculo de áreas y volúmenes de diversos cuerpos.

Valor transversal

Ciencia y tecnología

INDICADORES DE LOGRO

- **Calcula** la longitud de poliedros regulares conocido su volumen.
- **Comprueba**, sustituyendo valores, la razones de áreas y volúmenes de cuerpos geométricos.
- **Obtiene** el radio de una esfera de igual volumen que un poliedro regular y **calcula** la razón de área/volumen de ambos cuerpos.
- **Representa** gráficamente cómo varía la razón área/volumen conforme crece el número de caras de los poliedros.
- **Calcula** el área y el volumen de organismos celulares o microorganismos.
- **Obtiene** la razón área/volumen de organismos microscópicos.
- **Resuelve** problemas de la vida cotidiana relacionados con el cálculo de volumen de microorganismos.
- **Identifica** las operaciones de simetría que transforman una figura y las rotaciones que son necesarias para que un cuerpo coincida consigo mismo.
- **Identifica** distintas clases de simetría en los seres vivos.
- **Traza** plano de simetría en cuerpos geométricos.
- **Utiliza** recursos virtuales y electrónicos: computadora, softwares educativos, juegos interactivos y otros, en la búsqueda de información.

- **Identifica** la función e importancia de los organismos vivos en las diferentes capas de la Tierra.

Recursos digitales

Plataforma digital CD

BIBLIOTECA DEL DOCENTE

- DOCUMENTOS PARA LA PLANIFICACIÓN
- GUÍA DE RECURSOS TIC

RECURSOS DE REFUERZO Y AMPLIACIÓN

LibroMedia

RECURSO MULTIMEDIA	
PÁGINA 193	Video: Medida de superficie

CD DE RECURSOS DIGITALES: PLAN REGULAR

Pleno — PRUEBA DE EVALUACIÓN FORMATIVA DE LA UNIDAD

Tiempo estimado de trabajo

Dos semanas.

Estrategias pedagógicas

- Recuperación de experiencias previas.
- Trabajo en equipo.
- Aprendizaje basado en problemas (ABP).

Unidad B

Competencias

- **Lee** y **comenta** las informaciones expuestas en el apartado *Situación de aprendizaje*.
- **Responde** preguntas relacionadas con las informaciones expuestas en el apartado *Situación de aprendizaje*.
- **Recupera** experiencias vividas mediante la observación de las imágenes de la ilustración.
- **Responde** preguntas vinculadas a sus experiencias previas sobre los conceptos que desarrollarán en la unidad en el apartado *Recuperación de conocimientos*.
- **Responde** preguntas vinculadas a las aplicaciones cotidianas de los conceptos que desarrollarán en la unidad en el apartado *Observación*.

Esquema de la unidad

Las matemáticas en la vida

Se presentan:

- La razón de la superficie/volumen de un cuerpo
  - En esta intervienen el:
    - Cálculo de área y volumen de diversos cuerpos
- Las simetrías
  - Ejes y planos de simetría de diversos cuerpos

B Las matemáticas de la vida

Situación de aprendizaje

A todos los estudiantes de la clase de Ciencias Naturales les pareció asombroso el video que mostró la diversidad de tamaños de los seres vivos: bacterias de dimensiones ínfimas comparten la biosfera con animales como las ballenas azules; plantitas apenas visibles pueblan los suelos junto a enormes secoyas.

El tamaño y la estructura de los seres vivos se vincula a procesos de intercambio de materia y energía con el entorno. El enorme tamaño de algunos animales tropicales es un medio eficiente para perder calor a través de la piel y evitar así un sobrecalentamiento. Algunos, sin ser demasiado grandes, aumentan con el mismo fin la superficie de su piel mediante pliegues o carecen de pelo.

- ¿Puedes mencionar otras soluciones de los seres vivos para optimizar el intercambio de materia y energía con el medio?

Conceptos y procedimientos

- Área y volumen de cuerpos geométricos.
- Simetrías y operaciones de simetría.
- Determinación de la razón área/volumen.
- Identificación y trazado de ejes y planos de simetría.

Actitudes y valores

- Valorar la diversidad de los seres vivos.
- Apreciar un entorno saludable.

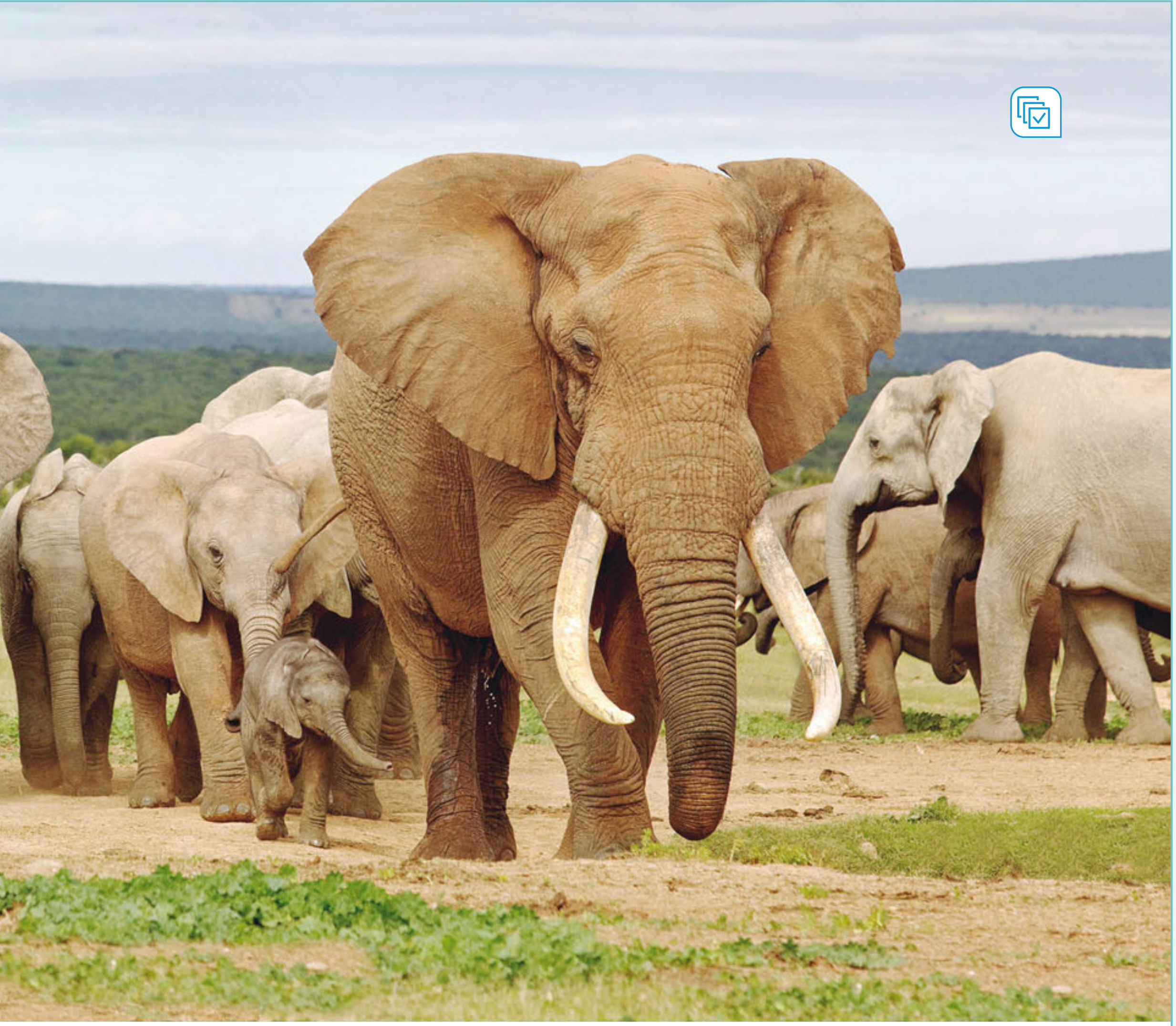
RECUPERACIÓN DE CONOCIMIENTOS

- ¿Qué características comparten los seres vivos que los diferencian de los no vivos?
- ¿Por qué es tan necesario para la vida el intercambio de materia, energía e información con el medio?
- ¿Qué cosa llama tu atención cuando recorres los distintos niveles de organización de los seres vivos que habitan nuestro planeta?

192

Trabajo colectivo de apertura

- **Situación de aprendizaje:** Guíe a sus estudiantes a leer y comentar en el grupo las informaciones expuestas en el apartado *Situación de aprendizaje*, relacionadas con la diversidad de tamaño de los seres vivos y los medios que utilizan para optimizar el intercambio de energía.
- **Recuperación de conocimientos:** Las preguntas de este apartado permiten hacer un diagnóstico de los conocimientos y las experiencias previas vinculados a las características de los seres vivos.



OBSERVACIÓN

- ¿Qué clase de animales se muestran en las ilustraciones?
- ¿En cuáles entornos viven estos animales?
- ¿Qué ventajas pueden tener para ellos las dimensiones que alcanzan?
- ¿Podría ser ventajoso para algunos animales tener un menor tamaño? ¿Puedes dar razones?

- **Observación:** En este apartado se plantean preguntas relacionadas con la diversidad de animales que observan en la ilustración.

Actividades de motivación

Pida a sus estudiantes que lean en la sección: *Conceptos y procedimientos*, los temas que trabajarán en esta unidad de aprendizaje y las actitudes y valores que estarán presentes en el desarrollo de la misma. Luego, para que interioricen la importancia del tamaño y la estructura de los seres vivos y los demás elementos del planeta, formúleles preguntas como las siguientes:

- *¿Qué dimensiones están presentes cuando determinamos el tamaño de una superficie o extensión de un terreno?*
- *¿Qué dimensiones se involucran en el cálculo de volumen?*
- *¿Qué elementos inciden en la necesidades vitales de un animal grande y uno pequeño?*

Video

Medidas de superficie

El recurso es un interesante video que desarrolla, de manera amplia y clara, el concepto de medida de superficie, su importancia para la cotidianidad y un poco de historia del uso de las medidas de superficie o área.

Cultivamos valores

Ciencia y tecnología

Aprovechar la situación planteada en el apartado *Situación de aprendizaje* y en las imágenes de la ilustración para conversar con sus estudiantes acerca de por qué las medidas están presentes en todos los aspectos de nuestra vida y del valor de la diversidad de los seres vivos. Pregunte al grupo:

- *¿Qué ventajas y desventajas tienen los animales de gran tamaño como el elefante?*

Indicadores de logro

- **Calcula** la longitud de poliedros regulares conocido su volumen.
- **Comprueba**, sustituyendo valores, la razones de áreas y volúmenes de cuerpos geométricos
- **Obtiene** el radio de una esfera de igual volumen que un poliedro regular y **calcula** la razón de área/volumen de ambos cuerpos.
- **Representa** gráficamente cómo varía la razón área/volumen conforme crece el número de caras de los poliedros.
- **Calcula** el área y el volumen de organismos celulares o microorganismos.
- **Obtiene** la razón área/volumen de organismos microscópicos.
- **Resuelve** problemas de la vida cotidiana relacionados con el cálculo de volumen de microorganismos.

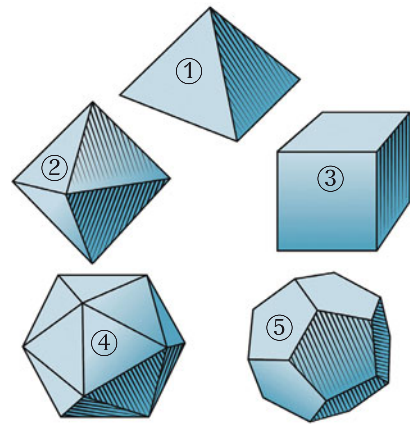
1 Lee y, luego, haz lo que se te pide.

A medida que aumenta el número de caras de un cuerpo geométrico, su volumen crece más rápidamente que la superficie que lo encierra; esto hace que el cuerpo ocupe más espacio cuanto menor es el cociente del área de su superficie y su volumen (A/V).

Para un volumen unitario, V = 1, el icosaedro ocupa más espacio que el tetraedro. El cociente A/V es menor en el icosaedro que en el tetraedro.

Una esfera de volumen unitario es el cuerpo que deja menos espacio por llenar. La esfera es más compacta que cualquiera de los cinco sólidos regulares que se muestran a la derecha.

La razón A/V de los cuerpos controla a múltiples fenómenos relacionados con el metabolismo.

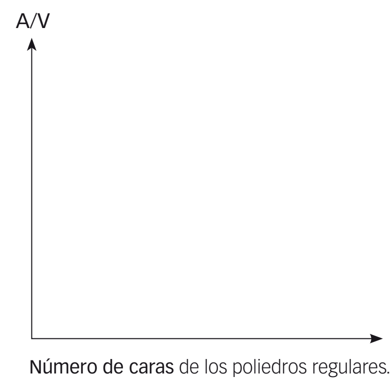


Sólidos regulares. **1**. Tetraedro. **2**. Octaedro. **3**. Cubo o hexaedro. **4**. Icosaedro. **5**. Dodecaedro.

- **Observa** el ejemplo de la primera fila de la tabla y, luego, **complétala**. NOTA: **l** representa la longitud de la arista de cada poliedro regular.

Poliedro regular	Área	Volumen	Razón A/V
Tetraedro	$1.732\, l^2$	$0.1179\, l^3$	$1.732\, l^2 / 0.1179\, l^3 = 14.69/l$
Cubo	$6\, l^2$	l^3	$6\, l^2/l^3 = 6/l$
Octaedro	$3.464\, l^2$	$0.471\, l^3$	$3.464\, l^2/0.471\, l^3 = 7.35/l$
Dodecaedro	$20.646\, l^2$	$7.663\, l^3$	$20.646\, l^2/7.663\, l^3 = 2.69/l$
Icosaedro	$8.66\, l^2$	$2.182\, l^3$	$8.66\, l^2/2.182\, l^3 = 3.97/l$

- Calcula las longitudes de las aristas de cada uno de los poliedros regulares de la tabla, si todos tuvieran un volumen V = 1 cm^3.
- Comprueba, sustituyendo los valores de l en cada una de las razones A/V de la tabla, que las mismas disminuyen conforme crece el número de caras de los poliedros.
- Obtén el radio de una esfera de volumen igual al de los poliedros de la tabla, V = 1 cm^3 y, luego, calcula el valor de A/V para esta esfera. Compara el valor de A/V para la esfera con los de los poliedros.
- Representa gráficamente cómo varía la razón A/V conforme crece el número de caras de los poliedros.



Sugerencias didácticas

- **Inicio:** Organice a sus estudiantes en grupos, luego, pídales que lean y comenten el texto relacionado con la relación del aumento del número de caras de un cuerpo geométrico y el aumento del volumen que ocupa este.
- **Desarrollo:** Motíveles para que observen el ejemplo de la primera fila de la tabla y, luego, la completen con la razón A/V. Calcularán las longitudes de las aristas de cada poliedro de la tabla siguiendo las indicaciones. Comprobarán la relación A/V sustituyendo los valores indicados. Obtendrán el radio de una esfera de igual volumen que los poliedros y graficarán como varía la razón A/V conforme crece el número de caras de los poliedros.

Más información

Recuerde a sus estudiantes que el volumen de un cubo de **n** lados es igual a **n** x **n** x **n**, es decir **n**^{3}.

Por ejemplo, un cubo de 2 cm de arista tiene un volumen de 2 x 2 x 2 = 23 = 8 cm^3.

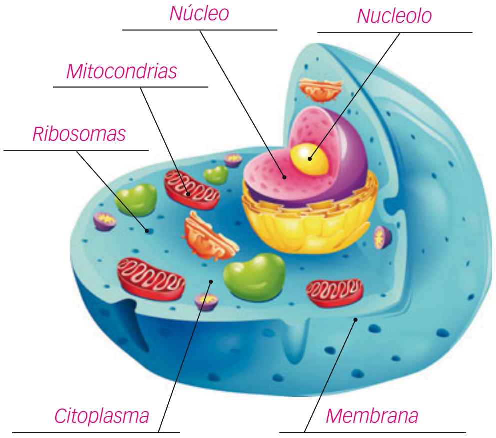
Un cubo de 3 cm de arista tiene un volumen de 3 x 3 x 3 = 33 = 27 cm^3.

El crecimiento del volumen es mayor que el de la superficie. Cuanto más crece un cubo mayor volumen tendrá por cada centímetro de superficie.

2 Lee y, luego, haz lo que se te pide.

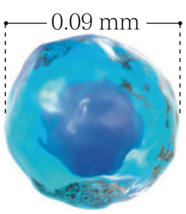
Las células son verdaderas máquinas químicas en las que ingresan insumos para obtener energía a partir de ellos y se expulsan materiales de desecho al exterior. La entrada y salida de materia del cuerpo celular se hace a través de la membrana que la rodea. Cuanta mayor área tiene esta membrana, mayores son las posibilidades de realizar el intercambio de nutrientes o desechos.

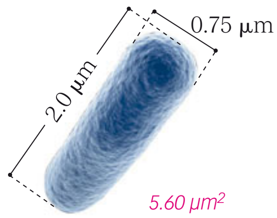
Para conseguir optimizar este intercambio, las células aumentan, creciendo el área de la superficie que las separa del medio. Pero no pueden crecer más allá del límite impuesto por la razón A/V: como el volumen crece más rápido que el área, la membrana llega a ser insuficiente para facilitar el intercambio adecuado al tamaño celular. El problema se enfrentó satisfactoriamente mediante la solución pluricelular que mantuvo una célula pequeña, aumentando considerablemente la superficie.

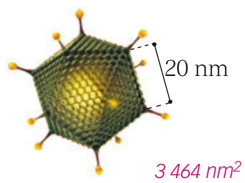


Célula animal. Su tamaño está comprendido entre unos cuantos micrómetros (10^{-6} m) y un metro, como es el caso de las células nerviosas, las neuronas.

- **Dibuja** en tu cuaderno y, luego, **escribe** el nombre de las partes de la célula de la figura.
- **Di** qué funciones desempeñan en la célula las partes señaladas.
- **Calcula** el área de los siguientes organismos. NOTA: 1 μm (micrómetro) = 10^{-6} m = 10^{-3} mm; 1 nm (nanómetro) = 10^{-9} m = 10^{-6} mm.



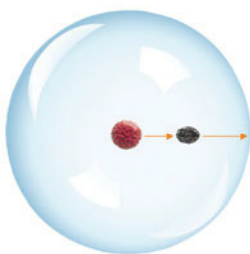




- **Responde.** ¿Cuál es el volumen de cada uno de ellos? *0.0004 mm³; 0.88 μm³; 17 456 nm³*
- **Obtén la razón A/V para cada uno de los organismos microscópicos.** *250 1/mm; 6.36 1/μm; 0.20 1/nm*

3 Resuelve el problema.

Las células transportan nutrientes y desechos a través de su citoplasma. Si la velocidad con que una célula expulsa un desecho de su interior es de aproximadamente 10 μm/s, ¿en qué tiempo es expulsado un desecho metabólico del centro de una célula esférica que tiene un volumen de 3.5×10^{-4} mm³? *4.37 s*



Atención a la diversidad

Refuerzo: Forme varios grupos de estudiantes y, luego, motíveles para que resuelvan los ejercicios indicados a continuación:

- Calcula el área total, el volumen y la razón A/V de un tetraedro cuyas aristas miden 5 cm.

  Resp.: At = 43.30 **l**^{2}.
  V = 14.73 **l**^{3}.
  A/V = 2.94 **l**.

- Calcula el área total, el volumen y la razón A/V de un octaedro cuyas aristas miden 5 cm.

  Resp.: At = 86.60 **l**^{2}.
  V = 58.92 **l**^{3}.
  A/V = 1.47 **l**.

- Calcula el área total, el volumen y la razón A/V de un icosaedro cuyas aristas miden 5 cm.

  Resp.: At = 216.51 **l**^{2}.
  V = 272.71 **l**^{3}.
  A/V = 0.79 **l**.

- **Desarrollo:** Para la actividad 2, motive a los grupos formados anteriormente para que lean y comenten el contenido del texto que trata sobre la célula, sus elementos y su forma de nutrición. Pídales que observen la representación de la célula animal a la derecha de la página y que lean y comenten las informaciones al pie de la misma. Motíveles para que lean y sigan las instrucciones de las actividades propuestas, luego, compare los resultados en conjunto.
- **Cierre:** En la actividad 3, determinarán en qué tiempo es expulsado un desecho metabólico del centro de una célula esférica conocido su volumen. Ofrézcales las orientaciones necesarias.

Aprender a aprender

Pregunte a sus estudiantes:

- *¿Necesitaron de ayuda adicional para realizar alguna de las actividades propuestas?*
- *¿En qué consistió la ayuda?*
- *¿Qué procedimientos aplicaron para resolver la actividad número 3?*

Indicadores de logro

- **Identifica** las operaciones de simetría que transforman una figura y las rotaciones que son necesarias para que un cuerpo coincida consigo mismo.
- **Identifica** distintas clases de simetría en los seres vivos.
- **Traza** planos de simetría en cuerpos geométricos.

1 **Lee y, luego, haz lo que se te pide.**

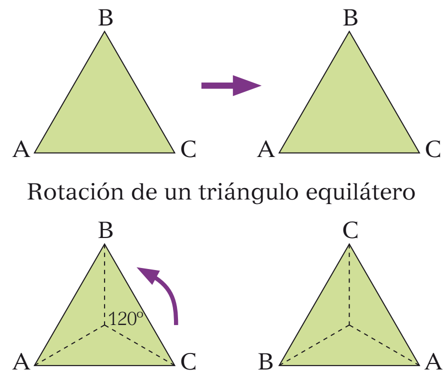
Una simetría indica la característica de ciertas figuras de no modificarse al ser sometidas a determinadas transformaciones llamadas operaciones de simetría.

El triángulo equilátero de la derecha permanece igual a sí mismo al trasladarse en una dirección o rotar ángulos de 120°, 240° o 360°.

Las figuras simétricas tienen una enorme presencia en la naturaleza. El matemático Hermann Weyl destacó, hace más de seis décadas, que la presencia de simetrías en el mundo natural era el resultado de la presencia y la actuación de leyes matemáticas en la base de sus numerosos fenómenos.

Traslación de un triángulo equilátero.

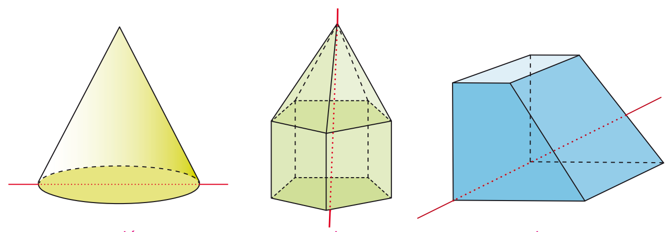
Rotación de un triángulo equilátero



- **Observa** las letras siguientes y, luego, **identifica** una operación de simetría que las transforma en sí mismas.

A B H N

2 **Observa los cuerpos y la línea de puntos (eje de simetría) en cada caso y, luego, responde la pregunta.**



1 rotación | *5 rotaciones* | *4 rotaciones*

Simetrías en el mundo natural. Dibujos del naturalista alemán Ernest Haeckel (1843-1919).

- ¿Cuántas rotaciones alrededor de la línea de puntos se necesitan para que el cuerpo geométrico coincida consigo mismo?
- **Identifica** y, luego, **traza** otro eje de simetría en cada figura.

Más información

Comentar a sus estudiantes, que el concepto bilateral está relacionado con las dos partes o dos lados de un objeto o cuerpo. En la biología, la simetría expresa la disposición ideal del cuerpo y de sus partes respecto a un plano, un eje o un centro. La simetría bilateral contempla un plano sagital que provoca la división del cuerpo en dos partes teóricamente idénticas.

En la simetría bilateral el cuerpo se divide en dos partes iguales, una derecha y otra izquierda divididas por un eje de simetría.

Las especies que disponen de simetría bilateral reciben el nombre de bilaterales. En estas especies el organismo resulta simétrico con respecto al plano sagital. Las mariposas, los osos, los seres humanos, etc. constan de simetría bilateral.

Algunas especies vegetales como las orquídeas cuentan con simetría bilateral.

Sugerencias didácticas

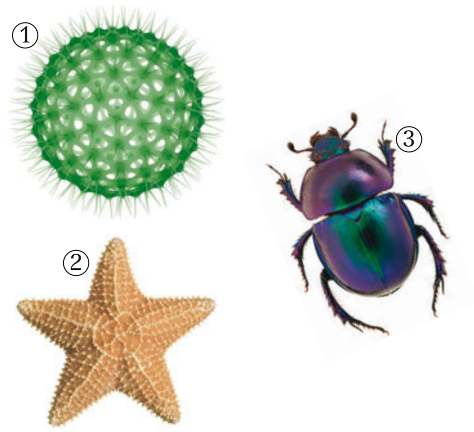
- **Inicio:** Organice a sus estudiantes en grupos pequeños, luego, pídales que lean y comenten el texto relacionado con el concepto de simetría y las operaciones de simetría. Pídales que observen la representación gráfica de las operaciones simétricas a la derecha de la página y que comenten qué ocurre en cada caso.
- **Desarrollo:** Motive a los grupos para que observen las letras mayúsculas e identifiquen las operaciones de simetría que las transforman en sí mismas. A continuación, haga que observen los cuerpos y los ejes de simetría representados con líneas de puntos y, después, respondan las preguntas. Haga que observen los dibujos titulados *Simetrías en el mundo natural.*

3 Lee con detenimiento el texto y, luego, haz lo que se te pide.

Un cuerpo tiene simetría bilateral si hay un plano que corta al cuerpo en dos partes iguales y dispuestas de manera opuesta respecto a ese plano. Este plano se llama plano sagital.

En su desarrollo evolutivo, los seres vivos pasaron de ser generalmente asimétricos, a tener simetría radial o esférica y de aquí, a adoptar la simetría bilateral, la más avanzada clase de simetría que facilitó el movimiento en una dirección y contribuyó con la aparición de una cabeza que contendría al cerebro, los ojos y la boca.

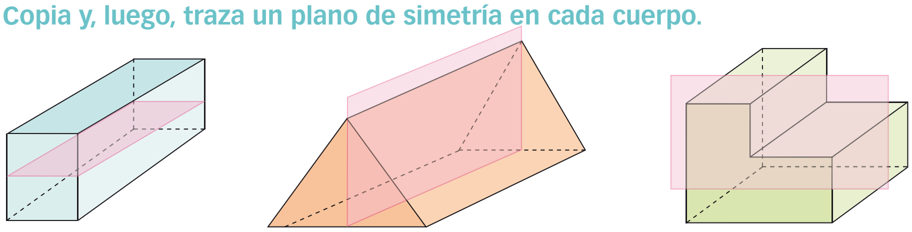
Se cree que en algún momento de la historia de la vida en la Tierra surgió un organismo hipotético, el *urbilateria*, con esta clase avanzada de simetría y de él descienden todos los seres vivos que la poseen, desde los gusanos marinos hasta el ser humano.



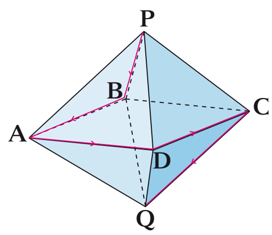
Simetrías. 1. Esférica. 2. Radial. 3. Bilateral.

- **Identifica** la clase de simetría de los siguientes seres vivos y, en caso de haber simetría bilateral, **traza** una línea vertical por donde pasa el plano sagital.

4 Copia y, luego, traza un plano de simetría en cada cuerpo.



5 Observa el octaedro regular y, luego, responde.



- Si se toma la longitud de una arista como una unidad de medida, ¿cuál es el menor de los recorridos que nos lleva de **P** a **Q**? *2*
- ¿Cuál es el mayor de esos recorridos? **Identifícalo** en la figura. *5*
- **Identifica** tres caminos para ir de **P** a **Q** que necesiten para recorrerse 2 y 3 aristas.

Atención a la diversidad

Refuerzo: Pida a sus estudiantes que observen la descripción de los siguientes tipos de simetría y, luego, dibujen en sus cuadernos dos ejemplos de cada una.

Simetría axial: Es la que se presenta frecuentemente en las hojas de las plantas. La simetría axial se identifica cuando el eje no presenta cambios de perspectiva con respecto al espacio y muestra idénticas proporciones de ambos lados.

Simetría esférica: En este caso el eje simétrico es un punto central, en el cual, sea un sistema geométrico u otro elemento físico, la simetría se comprueba cuando todas las distancias a dicho punto central son equivalentes.

Simetría reflectiva: En este tipo de simetría se puede identificar que la mitad de un objeto es exactamente igual a la otra mitad. En el caso de dividir el objeto por una línea o al separarlo físicamente, ambas partes son exactamente iguales y pueden ser ensambladas.

- **Desarrollo:** En la actividad 3, motive a los grupos formados anteriormente para que lean y comenten el contenido del texto con las informaciones sobre la simetría bilateral y el plano sagital. Después, motíveles para que observen las imágenes de las simetrías esféricas, radial y bilateral. A continuación, haga que identifiquen la clase de simetría de los seres vivos representados. En la actividad 4, copiarán los cuerpos en sus cuadernos y, luego, trazarán un plano de simetría en cada uno.
- **Cierre:** En la actividad 5, observarán el octaedro y, luego, responderán las preguntas relacionadas con los recorridos de los puntos **P** a **Q**. Ofrezca a los grupos las orientaciones necesarias.

Aprender a aprender

Pregunte a sus estudiantes:

- *¿Qué caracteriza la simetría esférica?*
- *¿Cómo son los lados de un objeto cuya simetría es bilateral?*

Indicadores de logro

- **Calcula** la longitud de poliedros regulares conocido su volumen. **Comprueba**, sustituyendo valores, la razones de áreas y volúmenes de cuerpos geométricos. **Obtiene** el radio de una esfera de igual volumen que un poliedro regular y **calcula** la razón de área/volumen de ambos cuerpos. **Representa** gráficamente cómo varía la razón área/volumen conforme crece el número de caras de los poliedros. **Calcula** el área y el volumen de organismos celulares o microorganismos. **Obtiene** la razón área/volumen de organismos microscópicos. **Resuelve** problemas de la vida cotidiana relacionados con el cálculo de volumen de microorganismos. **Identifica** las operaciones de simetría que transforman una figura y las rotaciones que son necesarias para que un cuerpo coincida consigo mismo. **Identifica** distintas clases de simetría en los seres vivos. **Traza** plano de simetría en cuerpos geométricos. **Utiliza** recursos virtuales y electrónicos: computadora, softwares educativos, juegos interactivos y otros, en la búsqueda de información.

Competencias fundamentales

Competencia comunicativa

Es necesario que los estudiantes adquieran las habilidades necesarias para identificar las unidades de área y volumen y, al mismo tiempo, puedan desarrollar las competencias comunicativas que les permitan aplicarlas en contextos diversos.

Algoritmos

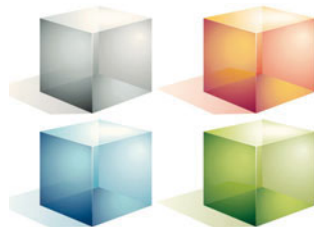
Las reglas y procedimientos en la resolución de operaciones aritméticas son vitales para la persecución de resultados correctos. Por ejemplo, en las operaciones que involucran el cálculo de área y volumen y la determinación de la razón entre ambas unidades de medidas.

SABER HACER

Comunica

1 Explica por qué son simétricas las figuras siguientes y qué clase de simetría tiene cada una.

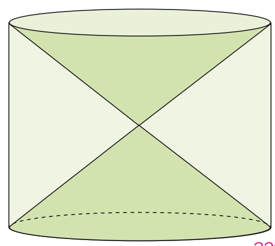




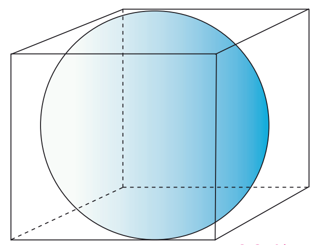
Usa algoritmos

2 Calcula lo que se te pide.

- El porcentaje del volumen del cilindro ocupado por los dos conos.
- El porcentaje del volumen del cubo que llena la mayor esfera que quepa en dicho cubo.



33%

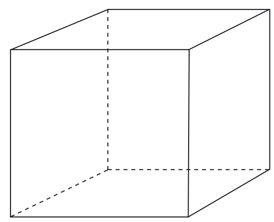


52.36%

Modela y representa

3 Copia y, luego, construye los planos indicados en el cubo.

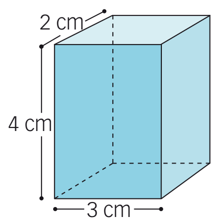
- Dos planos que al cortar el cubo formen dos rectángulos congruentes.
- Dos planos que al cortar el cubo formen dos rectángulos no congruentes.
- Un plano que al cortar el cubo forme un triángulo equilátero.



Razona y argumenta

4 Observa el prisma de base rectangular y, luego, haz lo que se te pide.

- Copia el prisma y, luego, dibuja dos planos de simetría que sean perpendiculares entre sí.
- Dibuja dos planos de simetría que no sean perpendiculares entre sí.
- Piensa y responde. ¿Cómo compruebas, con los datos de la figura, que los planos que trazaste son planos de simetría?



Sugerencias didácticas para el *Saber hacer*

Las actividades propuestas en esta página están estrechamente vinculadas a los conceptos y procedimientos desarrollados a lo largo de esta unidad de aprendizaje. Haga que lean cuidadosamente las instrucciones y, después, verifique las respuestas obtenidas.

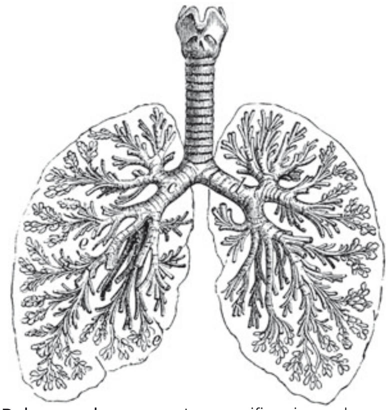
Es importante observar de cerca que los estudiantes siguen los pasos correctos para identificar las diversos tipos de simetría y las operaciones que involucra el cálculo de áreas y volúmenes y las razones A/V.

SABER HACER

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

5 Lean el texto y, luego, formen grupos y hagan lo que se les pide.

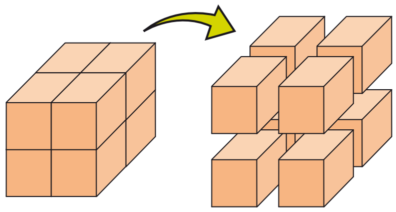
> Los seres vivos hacen más eficientes las funciones de algunos órganos sin que sus volúmenes crezcan más allá de ciertos límites aceptables y lo hacen ramificando o plegando a dichos órganos: los bronquios están ramificados, las paredes del intestino delgado tienen vellosidades y el cerebro circunvoluciones, todo con el mismo fin: aumentar la razón área/volumen del órgano.



Pulmones humanos. Las ramificaciones bronquiales tienen el efecto de aumentar el área para un más eficiente transporte del oxígeno.

- Llenen la siguiente tabla utilizando como referencia los ocho bloques de la figura de la derecha.

	Área	Volumen	A/V
Bloques unidos	24 cm^2	8 cm^3	3 1/cm
Bloques separados	48 cm^2	8 cm^3	6 1/cm



- **Responde**. ¿Cómo cambia la razón **A/V** cuando se divide el bloque original en 8 bloquecitos? *Aumenta.*

- Construyan dos plantillas o redes, una del bloque entero y otra de uno de los 8 bloquecitos. Extiendan sobre el plano la primera red y 8 veces la segunda red y comparen las áreas de las dos figuras resultantes. ¿Qué comprueban?
  Que el área total del cubo dividido es mayor, aunque tengan el mismo volumen total ambas figuras.

- ¿Cómo juzgas tu trabajo con las actividades de esta unidad?

APRENDIZAJE AUTÓNOMO

6 Mide tu aprendizaje.

	Iniciado	En proceso	Logrado
• Reconozco y clasifico cuerpos geométricos.	☐	☐	☐
• Calculo áreas y volúmenes de distintos cuerpos.	☐	☐	☐
• Comprendo y calculo la relación área/volumen.	☐	☐	☐
• Reconozco figuras simétricas y operaciones de simetría.	☐	☐	☐
• Trazo planos de simetría.	☐	☐	☐
• Aplico las matemáticas al estudio de la vida.	☐	☐	☐

Resolución de problemas: Proponga a sus estudiantes que lean detenidamente las instrucciones y el contenido del texto que trata sobre las funciones de algunos órganos de los seres vivos. Haga que observen y lean el pie de la imagen de los pulmones humanos. Pídales que llenen la tabla utilizando como referencia los bloques de la figura de la derecha y, luego, construyan las plantillas que se les indican.

En el apartado *Aprendizaje autónomo* evaluarán por ellos mismos si el nivel de conocimiento de la unidad se encuentra en estado de iniciación, en proceso o logrado.

Competencias fundamentales

Resolución de problemas:

Las habilidades y destrezas adquiridas por los estudiantes son necesarias para identificar las alternativas más convenientes en la persecución de la solución de problemas que forman parte de su diario vivir.

En este aspecto radica la importancia de que los estudiantes adquieran las destrezas necesarias en los temas relacionados con las unidades de área y volumen y los diversos tipos de simetrías desarrollados en esta unidad de aprendizaje.

Criterios de evaluación

Competencia comunicativa:

- Adaptación a las representaciones gráficas, simbólicas y numéricas a la situación de comunicación.

Uso de algoritmos:

- Seguimiento de las reglas, instrucciones y procedimientos.

Resolución de problemas:

- Adecuación de las estrategias y procedimientos al tipo de problema y al contexto.

Aprender a aprender

Motive a sus estudiantes para que reflexionen sobre la importancia de los conceptos trabajados en esta unidad de aprendizaje. Por ejemplo, pregunte al grupo:

- *¿Qué importancia tiene que podamos establecer la relación de la superficie y el espacio que ocupa un determinado objeto?*

Discuta las diversas respuestas con el grupo.

199